УДК 517. 926

А. А. Бойчук, канд. физ.-мат. наук (Ин-т геофизики АН Украины, Киев),
Р. Ф. Хращевская, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Получены коэффициентные достаточные условия существования и итерационный алгоритм построения решений слабонелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в общем случае, когда число краевых условий не совпадает с порядком дифференциальной системы. Построено уравнение для порождающих амплитуд таких краевых задач, определяющее амплитуду порождающего к искомому решения и дающее необходимое условие его существования.

Одержані коефіцієнтні достатні умови існування та ітераційний алгоритм побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією в загальному випадку, коли число крайових умов не співпадає з порядком диференціальної системи. Побудовано рівняння для породжуючих амплітуд таких крайових задач, яке визначає амплітуду породжуючого до шуканого розв'язку і дає необхідні умови його існування.

1. Линейные краевые задачи. Прежде чем исследовать нелинейные краевые задачи, найдем критерий существования и структуру общего решения линейных неоднородных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных краевых уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени:

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t), \quad t \neq \tau_i, \ \Delta z \big|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \tag{1}$$

$$lz = \alpha, \ \tau_i, t \in [a,b]. \tag{2}$$

Приняты следующие предположения и обозначения из [1, 2]; $A(t)$ и $\varphi(t)$ — $(n \times \times n)$-матричные и $(n \times 1)$-векторные функции, компоненты которых принадлежат пространству $C([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$ непрерывных или кусочно-непрерывных на $[a,b]\setminus\{\tau_i\}$ функций, имеющих разрывы первого рода по t при $t = \tau_i$; S_i – $(n\times n)$-мерные постоянные матрицы такие, что $(E+S_i)$ невырождены; a_i — n-мерный вектор-столбец констант: $a_i \in R^n$; $-\infty < \alpha < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_p < b < +\infty$, $i = 1,\ldots,p$; $l = \operatorname{col}(l_1,\ldots,l_m)$-линейный ограниченный m–мерный вектор-функционал; $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in R^m$. Обозначим через $X(t)$ нормальную $(X(a) = E)$ фундаментальную матрицу соответствующей (1) однородной $(\varphi(t) = 0,\ a_i = 0)$ системы с импульсным воздействием, а в качестве матрицы Грина $K(t, \tau)$ задачи Коши для этой системы возьмем [1] следующую:

$$K(t,\tau) = \begin{cases} X(t)X^{-1}(\tau) & \text{при } 0 \le \tau \le t \le T, \\ 0 & \text{при } 0 \le t < \tau \le T. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $Q = lX(\cdot)$ — $(m\times n)$-мерная матрица, полученная подстановкой в краевое условие матрицы $X(t)$, а Q^+— единственная псевдообратная к ней $(n\times m)$-мерная матрица [2]. Обозначим через $P_Q (n \times m)$-матрицу (ортопроектор $P_Q^2 = P_Q = P_Q^*$), проектирующую R^n на нуль-пространство $N(Q)$ матрицы Q: $: P_Q: R^n \to \to N(Q)$; аналогично P_{Q^*} – $(m \times m)$-матрица: $R^m \to N(Q^*)$. Далее, обозначим через $P_{Q_r} (n \times r)$-матрицу, столбцы которой — r-линейно-независимые столбцы матрицы $P_Q (r = n - n_1, n_1 = \operatorname{rank} Q)$; $P_{Q_d^*}$ – $(d \times m)$-матрица, строки которой — d-линейно-независимые строки матрицы p_{Q^*} $(d = m - n_1)$; $X_r(t) = X(t)\, P_{Q_r}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть линейная неоднородная краевая задача* (1), (2) *с импульсным воздействием удовлетворяет указанным выше условиям и* $\operatorname{rank} Q = n_1 \le \min(n, m)$. *Тогда соответствующая* (1), (2) *однородная* ($\varphi(t) = 0$, $a_i = 0$, $\alpha = 0$) *краевая задача имеет* $r = n - n_1$ *и только* r *линейно независимых решений. Неоднородная краевая задача* (1), (2) *разрешима для тех и только тех* $\varphi(t) \in C([a,b]\setminus\{\tau_i\}_1)$, $a_i \in R^n$, $\alpha \in R^m$, *которые удовлетворяют условию*

$$P_{Q^*_d}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau - l\sum_{i=T}^{p} k(\cdot,\tau_i+0)\,a_i\right\} = 0, \tag{4}$$

и при этом имеет r*-параметрическое семейство решений* $z_0(t, c_r)$ *на пространстве* $C^1([a,b]\setminus\{\tau_i\}_1)$ *кусочно-непрерывно дифференцируемых вектор-функций, имеющих разрывы первого рода по* t *при* $t = \tau_i$

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)\,c_r + \left(G\begin{bmatrix}\varphi\\ a_i\end{bmatrix}\right)(t) + X(t)\,Q^+\alpha, \tag{5}$$

где $\left(G\begin{bmatrix}*\\ *\end{bmatrix}\right)(t)$*-обобщенный оператор Грина краевой задачи* (1), (2), *имеющий вид*

$$\left[K\left(G\begin{bmatrix}\varphi\\ a_i\end{bmatrix}\right)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\left[\int_a^b K(t,\tau) * d\tau - X(t)Q^+\, l\int_a^b K(\cdot,\tau) * d\tau,\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left[K\sum_{i=1}^{p} K(t,\tau_{i+0}) * - X(t)Q^+\, l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot,\tau_{i+0}) *\right]\begin{bmatrix}\varphi(r)\\ a_i\end{bmatrix}\right]\right)(t). \tag{6}$$

Доказательство теоремы проводится по аналогии с [3], а в случае периодической краевой задачи (1), (2) ($m = n$, $lz = z(0) - z(T)$, $\alpha = 0$, $\tau_{i+p} = \tau_i + T$) из теоремы 1 следует известный факт [4].

2. Слабонелинейные краевые задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}\dot z = A(t)z + \varphi(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon),\; t \ne \tau_i \in [a, b],\\ \Delta z\,|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i - 0, \varepsilon)\varepsilon),\\ lz = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),\; i = 1, \ldots, P.\end{gathered} \tag{7}$$

Найдем условия существования и алгоритм построения решения $z_0(t, \varepsilon)$: $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b]\setminus\{\tau_i\}_1)$, $z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, задачи (7), обращающегося при $\varepsilon = 0$ в порождающее решение $z_0(t, c_r)$ (5) порождающей краевой задачи (1), (2), получающейся из (7) при $\varepsilon = 0$. Будем предполагать при этом, что выполнены условия теоремы 1. Кроме того, нелинейная n-мерная вектор-функция $Z(z, t, \varepsilon)$ такова, что $Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\,\|z - z_0\| \le q]$, $Z(z, \cdot, \varepsilon) \in C([a, b]\setminus\{\tau_i\}_1)$, $Z(z, t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$; $J_i(z(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)$, $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейные n- и m-мерные векторные функционалы по первому аргументу z непрерывно-дифференцируемы (по Фреше), а как вектор-функции второго аргумента непрерывны по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Необходимое условие существования искомого решения краевой задачи (7) состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть слабонелинейная краевая задача* (7) *с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени имеет решение* $z(t, \varepsilon)$: $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b] \setminus \{\tau_i\}_1)$, $z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, *обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в одно из решений* $z_0 = z_0(t, c_r)$ *порождающей для* (7) *краевой задачи* (1),(2) *с константой* $c_r = c_r^* \in R^r (r = n - \operatorname{rank} Q = n - n_1)$. *Тогда векторная константа* c_r^* *удовлетворяет уравнению* $F(c_r^*) = 0$, *где уравнение*

$$F(c_r) = P_{Q_d^*}\Big\{ J(z_0(\cdot, c_r), 0) - l\int_a^b K(\cdot, \tau) Z(z_0(\tau, c_r), \tau, 0)\, dr -$$
$$- l\sum_{i=1}^{p} K(t, \tau_i + 0)\; J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r), 0)\Big\} = 0 \tag{8}$$

будем называть уравнением для порождающих амплитуд краевой задачи (7) *с импульсным воздействием.*

Доказательство проводится методом от противного с использованием теоремы 1 и аналогично доказательству соответствующих теорем для периодических краевых задач с импульсным воздействием [4] и для краевых задач без импульсов [2, 5, 6]. Уравнение (8) при этом переходит в известные уравнения для порождающих амплитуд соответствующих краевых задач.

Найдем достаточные условия существования искомого решения краевой задачи (7). Выполняя в (7) замену переменных $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$, получаем задачу отыскания решения $x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a, b] \setminus \{\tau_i\}_1)$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = 0$ краевой задачи

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \; t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \varepsilon J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*) + x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon), \tag{9}$$
$$lx = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Учитывая условия на нелинейности, имеем следующие разложения в окрестности $x = 0, \varepsilon = 0$:

$$Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = Z(z_0, t, 0) + A_1(t)x + R(x, t, \varepsilon),$$
$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z, t, 0)}{\partial z}\bigg|_{z = z_0(t, c_r^*)}, \; R(0, t, 0) = 0, \; \frac{\partial R(0, t, 0)}{\partial x} = 0;$$
$$J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*) + x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) = J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*), 0) +$$
$$A_{1i} x(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon),$$
$$A_{1i}(t) = \frac{\partial J_i(z, 0)}{\partial z}\bigg|_{z = z_0(\tau_i - 0, c_r^*)}, \quad R_i(0, 0) = 0, \; \frac{\partial R_i(0, 0)}{\partial x} = 0;$$
$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + l_1 x(\cdot, \varepsilon) + R_0(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$

$l_1 x(\cdot, \varepsilon)$ — линейная часть векторного функционала

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon); \;\; R_0(0, 0) = 0, \; \frac{\partial R_0(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

Рассматривая нелинейности в (9) формально как неоднородности и применяя к (9) теорему 1, для решения $x(t, \varepsilon)$ слабонелинейной импульсной краевой задачи (9) получаем представление

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c + x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{10}$$

в котором неизвестный постоянный вектор $c = c(\varepsilon) \in R^r$ определяется из условия типа (4) существования решения краевой задачи (9)

$$P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)Z(z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\,d\tau -$$
$$- l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot,\tau_i+0)\,J_i(z_0(\tau_i-0,c_r^*) + x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\} = 0, \tag{11}$$

а неизвестная вектор-функция $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ с помощью обобщенного оператора Грина $\left(G\begin{bmatrix}*\\ *\end{bmatrix}\right)(t)$ имеет представление

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon X(t)Q^+J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\left(G\begin{bmatrix}Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\\ J_i(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t). \tag{12}$$

Учитывая, что векторная константа $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ необходимо удовлетворяет уравнению (8) для порождающих амплитуд краевой задачи (7), с учетом разложения нелинейностей для отыскания решения краевой задачи (7) получаем следующую эквивалентную операторную систему:

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$B_0c = -P_{Q_d^*}\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$- l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]\,d\tau -$$
$$- l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot,\tau_i+0)[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i-0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)]\}, \tag{13}$$
$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon X(t)Q^+[J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1(X_r(\cdot)c + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] +$$
$$+\left(G\begin{bmatrix}Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0) + A_1(\tau)(X_r(\tau)c + x^{(1)}(\tau,\varepsilon)) + R(x,\tau,\varepsilon)\\ J_i(z_0(\tau_i-0,c_r^*),0) + A_{1i}(X_r(\tau_i-0)c + x^{(1)}(\tau_i-0,\varepsilon)) + R_i(x(\tau_i-0),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t),$$

где $B_0 = P_{Q_d^*}\{l_1X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)\,d\tau - l\sum_{i=1}^{p}K(\cdot,\tau_i+0)A_{1i}X_r(\tau_i-0)\}$ — $(d\times r)$-мерная матрица $(r = n - n_1,\ d = m - n_1,\ n_1 = \operatorname{rank} Q)$.

Обозначим через P_{B_0} $(r\times r)$-мерную матрицу (ортопроектор), проектирующую R^r на $N(B_0)$, а через $P_{B_0^*}$ — $(d\times d)$-мерную матрицу, проектирующую R^d на $N(B_0^*)$. Тогда при условии

$$P_{B_0} = 0, \quad P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0 \tag{14}$$

второе уравнение операторной системы (13) однозначно разрешимо относительно c:

$$c = -B_0^+\,P_{Q_d^*}\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]\,d\tau - l\sum_{i=1}^{p}K(\cdot,\tau_i+0)[A_{1i}x^{(1)}(\tau_i-0,\varepsilon) + R_i(x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)]\},$$

B_0^+ — псевдообратная $(r \times d)$-матрица. В результате этого для решения полученной операторной системы применим метод простых итераций [5, 6]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть краевая задача* (9) *удовлетворяет указанным выше условиям так, что* $\operatorname{rank} Q = n_1$ *и соответствующая порождающая краевая задача* (1), (2) *при условии* (4) $(d = m - n_1)$ *и только при нем имеет* r*-параметрическое семейство* $(r = n - n_1)$ *порождающих решений* $z(t, c_r)$ (5). *Тогда для каждого значения вектора* $c_r = c_r^* \in R^r$, *удовлетворяющего уравнению* (8) *для порождающих амплитуд, при условии* (14) *краевая задача* (9) *имеет единственное решение* $x(t, \varepsilon)$: $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, *обращающееся в нуль при* $\varepsilon = 0$. *Это решение можно определить с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_*]$ *итерационного процесса*

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{l_1 x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- l\int_a^b K(\cdot, \tau)[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau, \varepsilon) + R(x_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)]d\tau -$$

$$- l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot, \tau_i + 0)[A_{1i}x_k^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon) + R_i(x_k(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)]\}, \tag{15}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon X(t)Q^+[J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + l_1(X_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)) + R_0(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)] +$$

$$+ \left(G\begin{bmatrix} Z(z_0(\tau, c_r^*), \tau, 0) + A_1(\tau)(X_r(\tau)c_k + x_k^{(1)}(\tau, \varepsilon)) + R(x_k, \tau, \varepsilon) \\ J_i(z_0(\tau_i - 0, c_r^*), 0) + A_{1i}(X_r(\tau_i - 0)c_k + x_k^{(1)}(\tau_i - 0, \varepsilon)) + R_i(x_k(\tau_i - 0), \varepsilon) \end{bmatrix} \right)(t),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_k + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \; x_0^{(1)} = x_0 = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Краевая задача (7) *имеет при этом единственное, обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в порождающее* $z_0(t, c_r^*)$ (5), *решение* $z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_*]$, *которое определяется с помощью итерационного процесса* (15) *и формулы* $z_k(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Заметим, что в случае краевых задач фредгольмового типа $(m = n)$ из $P_{B_0} = 0$ следует $P_{B_0^*} = 0$, и поэтому условие $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ в (14) автоматически выполняется. По аналогии с [2, 6] можно показать, что условие $P_{B_0} = 0$ (или же условие $\det B_0 = 0\,(m = n)$) эквивалентно требованию простоты корней уравнения (8) для порождающих амплитуд.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
3. *Самойленко А. М., Бойчук А. А.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр.мат.журн. – 1992. – **44**, №3. – С. 582 –586.
4. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – №9. – С. 1516 – 1521.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
6. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 431 с.

Получено 25. 03. 92