УДК 517.5

Н. М. Консевич (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ $L^{\psi}_{\beta,p}$

We obtain order estimates of the best orthogonal trigonometric approximations of classes of functions of many variables $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q, $1 < p < q < \infty$, $q > 2$.

Одержано порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q, $1 < p < q < \infty$, $q > 2$.

Нехай $x = (x_1, \dots, x_d)$ — елемент евклідового простору R^d і $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$. Позначимо через $L_q(\pi_d)$, $1 \le q < \infty$, множину 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} = \|f\|_q = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Надалі скрізь вважаємо, що для функцій $f(x) \in L_q(\pi_d)$ виконується умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Нехай $\{k^j\}_{j=1}^{M}$ — довільний набір векторів $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ з цілочисловими координатами і $S_M(f; x)$ — тригонометричний поліном вигляду

$$\sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j, x)},$$

де $\hat{f}(k^j) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x) e^{-i(k^j, x)} dx$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, а $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \ldots + k_d^j x_d$. Розглянемо величину

$$e_M^{\perp}(f)_q := \inf_{k^j,\, 1 \le j \le M} \|f(x) - S_M(f; x)\|_q, \tag{1}$$

яку називають найкращим M-членним ортогональним тригонометричним наближенням функції $f(x) \in L_q$. Величина (1) є частинним випадком величини $e_M(f)_q$ (означення див., наприклад, в [1, с. 97]). Якщо F — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M^{\perp}(F)_q := \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q. \tag{2}$$

Зазначимо, що для величин $e_M^{\perp}(F)_q$ та $e_M(F)_q$ виконується нерівність

$$e_M^{\perp}(F)_q \ge e_M(F)_q. \tag{3}$$

Мета цієї роботи полягає в знаходженні порядкових оцінок для величин (2), де роль F відіграє клас періодичних функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$, а між параметрами p та q виконується співвідношення $1 < p < q < \infty$, $q > 2$. З означенням класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ у одновимірному випадку можна ознайомитись в роботі [2] або [3]. Нагадаємо означення класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ у багатовимірному випадку. Нехай $\psi_j(\cdot) \neq 0$ — довільні фіксовані функції натурального аргументу, β_j — фіксовані дійсні числа. Припустимо, що ряд

$$\sum_k \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{(i\pi\beta_j/2)\operatorname{sign}k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \hat{f}(k)\, e^{i(k,x)},$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(x)\, e^{-i(k,x)}\, dx$, є рядом Фур'є деякої функції із $L_1(\pi_d)$, яку називають (ψ, β)-похідною функції $f(x)$ і позначають $f^{\psi}_{\beta}(x)$. Тоді функції $f(x)$ із $L_1(\pi_d)$, для яких існує (ψ, β)-похідна і $\|f^{\psi}_{\beta}\|_p \leq 1$, утворюють клас $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Слід зауважити, що при $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in Z \setminus \{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ збігаються з класами Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ (див., наприклад, [3]).

При дослідженні поведінки величин $e^{\perp}_M(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ на функції $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1,d}$, накладаються певні умови, а саме:

1) $\psi_j(\cdot)$ — додатні та незростаючі;

2) для довільного $j = \overline{1,d}$ існує стала $M_j > 0$ така, що

$$\frac{\psi_j(k)}{\psi_j(2k)} \leq M_j.$$

Множину таких функцій позначимо через D.

Тепер перейдемо до формулювання допоміжних тверджень, які будуть використовуватись далі.

Нехай $\rho(s) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}, s_j \in N\right\}$, позначимо

$$\delta_s(f; x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k)\, e^{i(k,x)}.$$

Лема 1 [1, с. 25]. *Нехай* $1 \leq p < q < \infty$ *і* $f \in L_p(\pi_d)$. *Тоді*

$$\sum_s \|\delta_s(f;\cdot)\|_p^q\, 2^{(s,1)(1/p-1/q)q} >> \|f\|_q^q, \quad (s,1) = s_1 + \ldots + s_d.$$

Лема 2 [1, с. 28]. *Нехай* $1 < p < q \leq \infty$ *і* $f \in L_p(\pi_d)$. *Тоді*

$$\sum_s \|\delta_s(f;\cdot)\|_q^p\, 2^{(s,1)(1/q-1/p)p} << \|f\|_p^p.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $q \geq 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in R$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім цього,* $\psi_j(|k_j|)\, |k_j|^{2(1/p-1/q)}$ *не зростають. Тоді має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)} << e^{\perp}_M(L^{\psi}_{\beta,p})_q <<$$
$$<< \Psi(n) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)},$$

де

$$\Phi(n) = \min_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}), \quad \Psi(n) = \max_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}),$$

n *задовольняє умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Доведення. Отримаємо оцінку зверху. Нехай $f(x)$ — довільна функція із класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ і задано достатньо велике число M. Наближаємо $f(x)$ поліномом $S_M(f;x)$, який складається з частинної „ступінчасто-гіперболічної" суми Фур'є функції $f(x)$ та полінома $Q(x)$:

$$S_M(f;x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f;x) + Q(x), \tag{4}$$

причому $S_M(f;x)$ містить за порядком M гармонік і n пов'язане з M співвідношенням $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Зауважимо також, що вигляд полінома $Q(x)$ буде залежати від співвідношень між параметрами p та q.

1. Розглянемо випадок $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Нехай $l \in N$ і $l \in [n, n_0)$, $n_0 = [n + (d-1)\log n]$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Для $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$ покладемо

$$S_l = \left(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f^{\psi}_{\beta};x)\|_2^p \, 2^{(s,1)(1/2-1/p)p} \right)^{1/p}. \tag{5}$$

Введемо множину $B_l = \{s:\ (s,1) = l,\ l \in [n, n_0)\}$. Для векторів $s \in B_l$ упорядкуємо числа $\|\delta_s(f^{\psi}_{\beta};x)\|_2$ за спаданням і позначимо їх через $\beta_i(f^{\psi}_{\beta};l)$, де $i = 1, 2, \ldots, |B_l|$, $|B_l|$ — кількість точок множини B_l. Виходячи з (5), маємо

$$\beta_i(f^{\psi}_{\beta};l) \leq i^{-1/p} 2^{l(1/p-1/2)} S_l. \tag{6}$$

Поставимо у відповідність кожному $l \in [n, n_0)$, $l \in N$, число

$$m_l = [2^n n^{d-1} 2^{-l} S_l^p] + 1. \tag{7}$$

Легко перевірити, що кількість чисел m_l при $l \in [n, n_0)$ не перевищує за порядком $|B_l| \asymp n^{d-1}$.

Тепер визначимо вигляд полінома $Q(x)$ у правій частині рівності (4). Покладемо

$$Q(x) = \sum_{n \leq l \leq n_0} \sum_{(s,1)=l}{}' \delta_s(f;x), \tag{8}$$

де штрих означає, що кожному $l \in [n, n_0)$ виділяється із суми $\sum_{(s,1)=l} \delta_s(f;x)$ m_l „блоків" $\delta_s(f;x)$ за тими s, яким відповідають перші за порядком числа $\beta_i(f^{\psi}_{\beta};l)$, $i = 1, 2, \ldots, m_l$. А суму, що містить решту „блоків" $\delta_s(f;x)$, позначимо двома штрихами

$$\sum_{n \leq l < n_0} \sum_{(s,1)=l}{}'' \delta_s(f;x) = \sum_{n \leq (s,1) < n_0} \delta_s(f;x) - \sum_{n \leq l \leq n_0} \sum_{(s,1)=l}{}' \delta_s(f;x). \tag{9}$$

З урахуванням співвідношень (4), (8), (9), за нерівністю Мінковського одержимо

$$\|f(x) - S_M(f;x)\|_q \leq \left\| f(x) - \sum_{(s,1)<n_0} \delta_s(f;x) \right\|_q + \left\| \sum_{n \leq l < n_0} \sum_{(s,1)=l}{}'' \delta_s(f;x) \right\|_q. \tag{10}$$

Оцінка першого доданка на підставі теореми 2.1 роботи [4] відома:

$$\left\| f(x) - \sum_{(s,1)<n_0} \delta_s(f;x) \right\|_q \ll \Psi(n_0)\, 2^{n_0(1/p-1/q)}. \tag{11}$$

Оцінимо другий доданок, використовуючи спочатку лему 1 та співвідношення

$$\| \delta_s(f;x)\|_p \asymp \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \|\delta_s(f_\beta^\Psi;x)\|_p, \quad 1<p<\infty, \tag{12}$$

яке випливає з результату роботи [5, с. 94]. Отже,

$$\left\| \sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' \delta_s(f;x) \right\|_q \ll \left(\sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' \|\delta_s(f;x)\|_2^q\, 2^{(s,1)(1/2-1/q)q} \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \le l < n_0} 2^{l(1/2-1/q)q} \sum_{(s,1)=l}'' \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^q \|\delta_s(f_\beta^\Psi;x)\|_2^q \right)^{1/q}. \tag{13}$$

Тепер продовжимо нерівність (13), зважаючи на співвідношення (6), (5):

$$\le \left(\sum_{n \le l < n_0} 2^{l(1/2-1/q)q} \sum_{(s,1)=l}'' \left(\max_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^q \|\delta_s(f_\beta^\Psi;x)\|_2^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l) 2^{l(1/2-1/q)q} \sum_{i>m_l} (\beta_i(f_\beta^\Psi;l))^q \right)^{1/q} \le \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/2-1/q)q} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i>m_l} i^{(p-q)/p}\, 2^{l(1/p-1/2)(q-p)} S_l^{q-p} \beta_i^p(f_\beta^\Psi;l) \right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)q} m_l^{(p-q)/p} S_l^q \right)^{1/q}. \tag{14}$$

Після підстановки m_l (див. (7)) в (14) маємо

$$\left\| \sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' \delta_s(f;x) \right\|_q \ll$$

$$\ll 2^{-n(1/p-1/q)} n^{-(d-1)(1/p-1/q)} \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{2l(1/p-1/q)q} S_l^p \right)^{1/q}.$$

Якщо $\Psi(l) 2^{2l(1/p-1/q)}$ не зростає, то остання сума має оцінку

$$\left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{2l(1/p-1/q)q} S_l^p \right)^{1/q} \le \Psi(n)\, 2^{2n(1/p-1/q)} \left(\sum_{n \le l < n_0} S_l^p \right)^{1/q}$$

і за лемою 2 для неї виконується нерівність

$$\ll \Psi(n)\, 2^{2n(1/p-1/q)} \|f_\beta^\Psi\|_p^{p/q} \le \Psi(n)\, 2^{2n(1/p-1/q)}.$$

Таким чином,

$$\left\| \sum_{n \le l < n_0} \sum_{(s,1)=l}'' \delta_s(f;x) \right\|_q \ll \Psi(n)\, 2^{n(1/p-1/q)} n^{-(d-1)(1/p-1/q)}. \tag{15}$$

Повертаючись до співвідношення (10) з урахуванням (11), (15), одержуємо

$$\|f(x) - S_M(f;x)\|_q \ll \Psi(n_0)\, 2^{n_0(1/p-1/q)} +$$
$$+ \Psi(n)\, 2^{n(1/p-1/q)}\, n^{-(d-1)(1/p-1/q)} \ll$$
$$\ll \Psi(n)\, 2^{n(1/p-1/q)}\, n^{-(d-1)(1/p-1/q)} \ll$$
$$\ll \Psi(n)\, M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

2. Розглянемо випадок $2 \le p < q < \infty$. Будемо будувати поліном $Q(x)$ способом, аналогічним до попереднього. Спочатку для $f(x)$ із $L^{\Psi}_{\beta,p}$ покладемо

$$S_l = \left(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f^{\Psi}_{\beta}; x)\|_p^p \right)^{1/p}, \tag{16}$$

де $l \in N$, $l \in [n, n_0)$. Упорядкуємо числа $\|\delta_s(f^{\Psi}_{\beta}; x)\|_p$, $s \in B_l$, за спаданням і позначимо їх через $\gamma_i(f^{\Psi}_{\beta}; l)$, де $i = 1, 2, \ldots, |B_l|$. Тоді

$$\gamma_i(f^{\Psi}_{\beta}; l) \le i^{-1/p} S_l. \tag{17}$$

Отже, поліном $Q(x)$ у правій частині рівності (4) має вигляд (8), де штрих означає, що підсумовування виконується за тими векторами s, яким відповідають числа $\gamma_l(f^{\Psi}_{\beta}; l)$, $i = 1, 2, \ldots, m_l$.

З урахуванням оцінки (11) маємо

$$\|f(x) - S_M(f;x)\|_q \ll \Psi(n_0)\, 2^{n_0(1/p-1/q)} + \left\| \sum_{n \le l < n_0} \sideset{}{''}\sum_{(s,1)=l} \delta_s(f;x) \right\|_q. \tag{18}$$

Оцінимо другий доданок у правій частині нерівності (18), використовуючи лему 1 та співвідношення (12), (17), (16)

$$\left\| \sum_{n \le l < n_0} \sideset{}{''}\sum_{(s,1)=l} \delta_s(f;x) \right\|_q \ll \left(\sum_{n \le l < n_0} \sideset{}{''}\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f;x)\|_p^q\, 2^{(s,1)(1/p-1/q)q} \right)^{1/q} \ll$$
$$\ll \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)q} \sum_{i > m_l} \gamma_i^q(f^{\Psi}_{\beta}; l) \right)^{1/q} \ll$$
$$\ll \left(\sum_{n \le l < n_0} \Psi^q(l)\, 2^{l(1/p-1/q)q} S_l^q\, m_l^{(p-q)/p} \right)^{1/q}.$$

Для того щоб продовжити останню нерівність, підставляємо значення для m_l (7) і враховуємо умову теореми: $\Psi(l)2^{2l(1/p-1/q)}$ не зростає. Отже,

$$\left\| \sum_{n \le l < n_0} \sideset{}{''}\sum_{(s,1)=l} \delta_s(f;x) \right\|_q \ll \Psi(n)\, 2^{n(1/p-1/q)}\, n^{-(d-1)(1/p-1/q)} \left(\sum_{n \le l < n_0} S_l^p \right)^{1/q}.$$

Оскільки

$$\left(\sum_s \|\delta_s(f;\cdot)\|_p^p \right)^{1/p} \ll \|f\|_p, \quad p \ge 2,$$

то

$$\left(\sum_{n \le l < n_0} S_l^p \right)^{1/q} \ll \|f^{\Psi}_{\beta}\|_p^{p/q} \le 1.$$

Таким чином,

$$\| f(x) - S_M(f;x)\|_q << \Psi(n) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)},$$
$$M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Оцінку зверху доведено.

Доведемо оцінку знизу. При доведенні будемо використовувати відоме екстремальне співвідношення (див., наприклад, [6, с. 392]): якщо $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le \le p \le \infty$, то

$$\| f\|_p = \sup_{\|\varphi\|_{p'} \le 1} \int_{\pi_d} f(x)\varphi(x)\,dx . \qquad (19)$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Згідно з (19), для $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$, має місце рівність

$$\| f(x) - S_M(f;x)\|_q = \sup_{\|\varphi\|_{q'} \le 1} \int_{\pi_d} (f(x) - S_M(f;x))\varphi(x)\,dx , \qquad (20)$$

де $S_M(f;x)$ — поліном, що містить M довільних членів розкладу функції $f(x)$ в ряд Фур'є $\left(S_M(f;x) = \sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j,x)} \right)$.

Нехай задано M. Виберемо l таким чином, щоб виконувались співвідношення $M \asymp 2^l l^{d-1}$, $2^l l^{d-1} \ge 2M$. Розглянемо „ступінчасто-гіперболічне" ядро Діріхле

$$D_l(x) = \sum_{(s,1)\le l} \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}.$$

Відомо [7], що

$$\| D_l(x)\|_p \asymp 2^{l(1-1/p)} l^{(d-1)/p}, \quad 1 < p < \infty. \qquad (21)$$

Покажемо, що функція $f(x) = C_1 \Phi(l) 2^{l(1/p-1)} l^{-(d-1)/p} D_l(x)$, $C_1 > 0$, належить до класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Оскільки $D_l(x)$ — поліном з „номерами" гармонік із „ступінчастого гіперболічного хреста", то має місце нерівність [5, с. 97]

$$\|(D_l(x)^{\psi}_{\beta})\|_p << \Phi^{-1}(l)\| D_l(x)\|_p, \qquad (22)$$

де $\Phi(l) = \min_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j})$, $\psi_j \in D$, $1 < p < \infty$. Отже, згідно з (22), (21) $\| f^{\psi}_{\beta}(x)\|_p \le 1$ і функція $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Виберемо функцію $\varphi(x)$, що задовольняє умову $\|\varphi(x)\|_{q'} \le 1$, у вигляді

$$\varphi(x) = D_l(x)\| D_l(x)\|^{-1}_{q'} = C_2 2^{-l/q} l^{-(d-1)/q'} D_l(x), \quad C_2 > 0.$$

Підставляючи функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ у співвідношення (20), одержуємо

$$\| f(x) - S_M(f;x)\|_q >>$$
$$>> \Phi(l) 2^{l(1/p-1)} l^{-(d-1)/p} 2^{-l/q} l^{-(d-1)/q'} \int_{\pi_d} (D_l(x) - S_M(D_l;x)) D_l(x)\,dx >>$$
$$>> \Phi(l) 2^{l(1/p-1/q-1)} l^{-(d-1)(1/p-1/q+1)} (2^l l^{d-1} - M) >>$$
$$>> \Phi(l) 2^{l(1/p-1/q)} l^{-(d-1)(1/p-1/q)} >>$$
$$>> \Phi(l) M^{1/p-1/q} (\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/q)}.$$

Оцінку знизу доведено.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Як зазначалось вище, величини $e_M^{\perp}(F)_q$ та $e_M(F)_q$ пов'язані співвідношенням (3). Тому для порівняння природно навести оцінки величин M-членних тригонометричних наближень класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у метриці L_q, $1 < p < q < \infty$, $q > 2$. Відомо [8], що у випадку $1 < p \le 2 < q < \infty$, коли $\psi_j \in D$, $\psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{1/p+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають, має місце співвідношення

$$\Phi(n)\,M^{1/p-1/2}(\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/2)} \ll e_M(L_{\beta,p}^{\psi})_q \ll$$

$$\ll \Psi(n)\,M^{1/p-1/2}(\log M)^{-2(d-1)(1/p-1/2)},$$

а у випадку $2 \le p < q < \infty$, коли $\psi_j \in D$, $\psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{1/2+\varepsilon}$, $j = \overline{1,d}$, не зростають, —

$$\Phi(n) \ll e_M(L_{\beta,p}^{\psi})_q \ll \Psi(n).$$

***Зауваження* 2.** Величини $e_M^{\perp}(W_{\beta,p}^{\psi})_q$ при $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, вивчалися в роботі [9], а при $2 \le p < q < \infty$ — в [10].

***Зауваження* 3.** Функції $\Psi(n)$ та $\Phi(n)$ можуть бути функціями одного чи різних порядків. Наведемо два приклади для $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1,d}$, що належать до множини D.

***Приклад* 1.** Покладемо $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r}$, $k_j \in Z\setminus\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, $r > 0$. Тоді

$$\Psi(n) = \Phi(n) = 2^{-nr}.$$

***Приклад* 2.** Якщо $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r}$, $j = \overline{1,d-1}$, $\psi_d(|k_d|) = |k_d|^{-r} \times \ln(|k_d| + 1)$, то

$$\Psi(n) \asymp 2^{-nr} n, \quad \Phi(n) \asymp 2^{-nr}.$$

1. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Романюк А. С.* Приближение периодических функций многих переменных в метрике L_q // Приближение периодических функций в метрике пространства L_p. – Киев, 1987. – С. 42 – 58. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.47).
5. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L_{\beta,p}^{\psi}$ // Исследования по теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92 – 105.
6. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
7. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 1. – С. 32 – 43.
8. *Консевич Н. М.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у просторі L_q // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 3. – С. 204 – 219.
9. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Яросл. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
10. *Романюк А. С.* Приближение классов $B_{p,\theta}^{r}$ периодических функций многих переменных частными суммами Фурье с произвольным выбором гармоник // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 112 – 118.

Одержано 29.02.2000