УДК 517.5

И. Я. Тырыгин, канд. физ.-мат. наук. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ОПЕРАТОРА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Установлен критерий для оператора наилучшего приближения, равносильный известной теореме А. Н. Колмогорова, характеризующей элемент наилучшего приближения. Практическое использование критерия проиллюстрировано примерами.

Встановлено критерій для оператора найкращого наближення, рівносильний відомій теоремі А. М. Колмогорова, що характеризує елемент найкращого наближення. Практичне використання критерію проілюстроване прикладами.

Пусть K — произвольный метрический компакт с метрикой $\rho(s, t)$, $s, t \in K$. Через $\mathbb{C}(K)$ обозначим линейное нормированное пространство вещественных функций $x(t)$, непрерывных на K, с нормой $\| x \|_C = \max\limits_{t \in K} | x(t) |$. В пространстве $\mathbb{C}(K)$ зафиксируем компакт M и подпространство F_n конечной размерности n. Будем считать, что на компакте M задан непрерывный оператор $A: M \to \mathbb{C}(K)$ и линейное многообразие $\mathfrak{B}$ непрерывных на M операторов $B: M \to F_n$, причем $A \notin \mathfrak{B}$. Пусть

$$\| A - B \|_{C(M)} = \max_{x \in M} \| (A - B)x \|_C,$$

где $B \in \mathfrak{B}$. В дальнейшем будем предполагать существование оператора $B_0 \in \mathfrak{B}$ такого, что

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} \| A - B \|_{C(M)} = \| A - B_0 \|_{C(M)}. \tag{1}$$

Нас интересует задача нахождения и описания оператора B_0, который можно назвать оператором наилучшего равномерного приближения для оператора A. В такой постановке эта задача является частным случаем известной „операторной" задачи теории приближений [1 – 3].

В 1948 г. А.Н. Колмогоров обобщил критерий П.Л. Чебышева для полинома наилучшего равномерного приближения фиксированной непрерывной функции.

Теорема (А. Н. Колмогоров [4]). *Пусть F есть линейное подпространство пространства $\mathbb{C}(K)$ (K — компакт) и $x \in \mathbb{C}(K) \setminus F$. Элемент $g_0 \in F$ будет элементом наилучшего приближения для x:*

$$\| x - g_0 \| = \inf_{g \in F} \| x - g \|$$

тогда и только тогда, когда для каждого $g \in F$ существует элемент $q = q(g) \in K$ такой, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{\left(x(q) - g_0(q) \right)} \, g(q) \right\} \ge 0,$$

и

$$| x(q) - g_0(q) | = \max_{t \in K} | x(t) - g_0(t) |.$$

Известно большое число различных обобщений теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, обзор [3]). Касаясь тематики приближения операторов, отметим, что основное внимание здесь уделяется приближению линейных операторов.

Положим

$$\mathfrak{M}(B) = \{x \mid x \in M, \| A - B \|_{C(M)} = \| (A - B)x \|_C\},$$

$$\mathfrak{N}(x, B) = \{t \mid t \in K, \| (A - B)x \|_C = | (A - B)x(t) |\},$$

где $B \in \mathfrak{B}$, $x \in M$. Нетрудно доказать существование

$$\max_{x \in \mathfrak{M}(B_1)} \max_{t \in \mathfrak{N}(x, B_1)} \{(A - B_1)x(t)\, B_2 x(t)\},$$

где $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор B_0 удовлетворял условию* (1), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\max_{x \in \mathfrak{M}(B_0)} \max_{t \in \mathfrak{N}(x, B_0)} \{(A - B_0)x(t)\, Bx(t)\} \geq 0, \tag{2}$$

где B — произвольный оператор из линейного многообразия $\mathfrak{B}$.

Доказательство теоремы 1 использует идею доказательства теоремы А. Н. Колмогорова [4] и может быть приведено без использования этой теоремы [5]. Однако проще заметить, что теорема 1 непосредственно вытекает из теоремы А. Н. Колмогорова, если в качестве исходного компакта взять декартово произведение $M \times K$ с метрикой

$$\hat{\rho}((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = \| x_1 - x_2 \|_C + \rho(t_1, t_2)$$

и ввести норму для операторов равенством

$$\| A - B \|_{C(M)} = \max_{\substack{x \in M \\ t \in K}} | (A - B)x(t) |,$$

С другой стороны, мы можем получить критерий А.Н. Колмогорова из теоремы 1, если положим $A = I$ (I — тождественный оператор), $M = x_0(t)$, $\mathfrak{B}$ — линейное многообразие всевозможных непрерывных операторов $B\colon x_0(t) \to F$. Таким образом, теорема 1 равносильна теореме А.Н. Колмогорова (в действительнозначном варианте).

Приведем несколько примеров практического использования теоремы 1. Здесь необходимо отметить, что для указания оптимального в смысле (1) оператора не используются оценки погрешности $\| A - B_0 \|_{C(M)}$ и $\| A - B \|_{C(M)}$, а проверяется только выполнение условия (2). Везде далее $A = I$, и речь, таким образом, идет о нахождении оператора наилучшего приближения в каком-либо смысле.

***Пример* 1.** Пусть $K = [0, 2\pi]$, M — компактное множество из класса $\tilde{W}^r_\infty$, определяемое условием $\| x \|_C \leq C$, где $C \geq \| \varphi_{n,r} \|_C$ ($\varphi_{n,r}$ — экстремальная функция [6]), и $\mathfrak{B}$ — линейное многообразие всевозможных непрерывных операторов, отображающих M в подпространство тригонометрических полиномов $T_{n-1}(t)$ степени $n - 1$. В качестве оператора B_1 возьмем оператор Фавара [6]. Известно, что в этом случае $\varphi_{n,r} \in \mathfrak{M}(B_1)$, причем $B_1 \varphi_{n,r}(t)$ совпадает с полиномом наилучшего приближения для $\varphi_{n,r}(t)$ и является тождественным нулем. Тогда, учитывая число нулей на периоде у любого полинома $T_{n-1}(t)$, получаем

$$\max_{x \in \mathfrak{M}(B_1)} \max_{t \in \mathfrak{N}(x, B_1)} \{(x(t) - B_1 x(t)) B x(t)\} \geq$$

$$\geq \max_{t \in \mathfrak{N}(\varphi_{n,r}, B_1)} \{\varphi_{n,r}(t) B_1 \varphi_{n,r}(t)\} \geq 0,$$

где $B \in \mathfrak{B}, B\varphi_{n,r}(t) = T_{n-1}(t)$. Отсюда в силу теоремы 1 следует что $B_1 = B_0$, т. е. оператор Фавара оптимален в смысле (1) в данной ситуации. Устремляя $C \to \to +\infty$, распространяем этот факт на весь класс $\tilde{W}_\infty^r$.

***Пример* 2.** Пусть $K = [0, 1]$, M — компактное подмножество класса $\tilde{W}_\infty^{r+1}$, определяемое условием $\| x \|_C \leq C$ $(C \geq \| \varphi_{n,r+1} \|_C)$, $\mathfrak{B}$ — линейное многообразие операторов, отображающих M в пространство сплайнов $\tilde{S}_{2n,r}(t)$ [7]. Оператором B_1 будем задавать интерполяционный сплайн $\sigma_{2n,r}(t)$, который определяется условиями $x(\tau_k) = \sigma_{2n,r}(\tau_k)$, где τ_k — нули функции $\varphi_{n,r+1}(t)$. В этом случае $\varphi_{n,r+1} \in \mathfrak{M}(B_1)$ и $B_1 \varphi_{n,r+1}(t) \equiv 0$. Если мы попытаемся построить сплайн $\tilde{S}_{2n,r}^0(t)$ такой, что для него не выполняется условие (2), то получим, что $\tilde{S}_{2n,r}^0(t)$ обязан иметь не менее $2n$ нулей, лежащих строго между нулями функции $\varphi_{n,r+1}(t)$. В силу следствия 1.2.19 [7] $\tilde{S}_{2n,r}^0(t) \equiv 0$. Таким образом, условие (2) должно выполняться, т. е. оператор интерполирования B_1 оптимален. Учитывая, что $B_1 1 = 1$, распространяем этот факт на весь класс $\tilde{W}_\infty^{r+1}$.

***Пример* 3.** Пусть $K = [0, 1]$; M — компактное подмножество класса $\tilde{W}_C^1 H^\omega$ ([7], $\omega(t)$ — выпуклый вверх на $[0, 1]$ модуль непрерывности), определяемое условием $x(0) = 0$, $\mathfrak{B}$ — линейное многообразие непрерывных операторов, отображающих M в подпространство 1-периодических ломаных $\tilde{W}_C^1 \tilde{S}_{2n,1}(t)$ по равномерному разбиению отрезка $[0, 1]$. Оператором B_1 будет задаваться ломаная, интерполирующая функцию в точках разбиения $k/2n$, $k = \overline{0, 2n}$. В этом случае $f_{2n,1}(\omega, t) \in \mathfrak{M}(B_1)$, и $B_1 f_{2n,1}(\omega, t) \equiv 0$, где $f_{2n,1}(\omega, t)$ — известная экстремальная функция [7]. Как и в предыдущих примерах, можно доказать [5] от противного, что выполняется неравенство (2), т. е. оператор B_1 оптимален.

Примеры 1 – 3 показывают, как теорема 1 может быть использована для несложных доказательств оптимальности того или иного оператора в уже известных случаях. Кроме того, теорема 1 применима и для решения новых задач.

***Пример* 4.** Пусть $K = [0, 1]$, M — компактное подмножество класса H^ω ($\omega(t)$ — строго выпуклый вверх на $[0, 1]$ модуль непрерывности), определяемое условием $x(0) = 0$, $\mathfrak{B}$ — линейное многообразие непрерывных линейных операторов, отображающих M в числовую прямую R^1. Таким образом, $\mathfrak{B}$ совпадает с пространством функционалов M^*. Покажем, что функционал

$$B_1 x = \int_0^1 x(t)\, dt$$

не является оптимальным в смысле (1) для множества M. Эта задача порождена тем обстоятельством, что указанный функционал оптимален для множества M в смысле метрики L_p при $0 < p \leq 3$, и долгое время существовала гипотеза об оптимальности этого функционала и при больших p, в частности при $p = +\infty$. Справедлива точная оценка

$$\| x(t) - \int_0^1 x(u)\,du \|_C \le \int_0^1 \omega(u)\,du,$$

где $x \in H^{\omega}$. Знак равенства реализуется для функций $\pm(\omega(1)-\omega(1-t))$, $\pm\omega(t)$ (для простоты предполагаем $\omega(1) \neq 1$, поскольку в противном случае необходимо рассматривать также функции $\pm(\omega(1)-\omega(1-t))^{-1}$, $\pm\omega(t)^{-1}$). Таким образом,

$$\mathfrak{M}(B_1) = \{\pm\omega(t), \pm(\omega(1)-\omega(1-t))\},$$

$$\mathfrak{N}(\pm\omega(t), B_1) = 0,$$

$$\mathfrak{N}(\pm(\omega(1)-\omega(1-t)), B_1) = 1.$$

В силу условия нелинейности модуля непрерывности функции $\omega(t)$ и $\omega(1) - \omega(1-t)$ линейно независимы. На подпространстве, натянутом на элементы $\omega(t)$, $\omega(1)-\omega(1-t)$, определим линейный функционал B_2 равенствами

$$B_2(\omega(1)-\omega(1-t)) = C_1 < 0, \quad B_2\,\omega(t) = C_2 > 0$$

и построим продолжение этого функционала на все пространство $\mathfrak{C}(K)$. Тогда в силу соотношения

$$\operatorname{sgn}\{\omega(0) - \int_0^1 \omega(t)\,dt\} = -\operatorname{sgn}\{\omega(1)-\omega(1-1) -$$
$$-\int_0^1 (\omega(1)-\omega(1-t))\,dt\} < 0$$

условие (2) не будет выполняться, т. е. оператор (функционал) B_1 не является оптимальным дла множества M. В качестве функционала B_2 можно взять, например, $B_2 x = x(1/2) - \int_0^1 x(t)\,dt$.

***Пример* 5.** Пусть сохранены все условия примера 4, но $\mathfrak{B}$ — одномерное пространство функционалов вида

$$Bx = C\int_0^1 x(t)\,dt, \; C \in R^1.$$

В этом случае функционал $B_1 x$ (т. е. $C = 1$) будет оптимален среди всех функционалов из $\mathfrak{B}$ в смысле (1). Доказательство проводится по схеме доказательств примеров 1, 2.

Задача нахождения оптимального линейного функционала для класса H^{ω} в метрике C очень сложна. Однако один из подходов к решению этой задачи в простой ситуации дается следующим примером.

***Пример* 6.** Пусть $K[0, 1]$, M — множество двухзвенных ломаных по равномерному разбиению отрезка $[0, 1]$, равных 0 в нуле и принадлежащих классу H^{ω}. Таким образом, M состоит из функций вида

$$l(t) = \begin{cases} at, \; 0 \le t \le 1/2; \\ a/2 + b(t-1/2), \; 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$

где $\max\{|a|/2, |b|/2\} \le \omega(1/2)$, $|a+b|/2 \le \omega(1)$.

Пусть также $\mathfrak{B} = M^*$. Речь идет о нахождении оптимального линейного функционала для класса $M \subset H^{\omega}$. Ограничениями на a и b задается выпуклое множество Q на плоскости R^2. Для любого линейного функционала

$B\,l=\gamma a+\delta b \max\limits_{l\in M}\|\,l\,(t)-B_1 l\,\|_C$ достигается в точках, лежащих на границе области Q. Положим

$$B_1 l = \frac{a}{2}\left\{1-\frac{\omega(1/2)}{4\omega(1/2)-\omega(1)}\right\}+\frac{b}{2}\,\frac{\omega(1/2)}{4\omega(1/2)-\omega(1)}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\max_{l\in M}\left\|l(t)-B_1 l\right\|_C = \frac{2(\omega(1/2))^2}{4\omega(1/2)-\omega(1)},$$

и эта оценка реализуется для угловых точек многоугольника Q. Существенным является тот факт, что при обходе границы области Q в каждой из указанных точек величина

$$l\,(t)-B_1 l,\ t\in \mathfrak{N}(l,B_1), \tag{3}$$

поочередно меняет знак, т. е. функционал (3) меняет знак по крайней мере 6 раз. Если мы попытаемся построить функционал $B_2\,l$ так, чтобы не допустить выполнения неравенства (2), то получим, что $B_2 l$ должен обращаться в нуль по крайней мере вдоль трех различных прямых, пересекающихся в начале координат. Однако этот функционал линеен, т. е. $B_2 l\equiv 0$, и неравенство (2) выполняется. Таким образом, функционал $B_1 l$ оптимален, и

$$E(M,C)=\omega(1)/2\le E_{\text{лин.}}(M,C)=\frac{2(\omega(1/2))^2}{4\omega(1/2)-\omega(1)}\le$$

$$\le E_{\text{интерп.}}(M,C)=\omega(1/2),$$

где $E, E_{\text{лин.}}$ и $E_{\text{интерп.}}$ — погрешности соответственно наилучшего приближения, наилучшего линейного приближения и интерполирования класса M константами. Метод, использованный в примере 6, может быть применен к построению приближений оптимального линейного функционала для класса H^{ω}. Сначала необходимо проинтерполировать с достаточной точностью функции класса $H^{\omega}n$ — звенными ломаными, а затем построить оптимальный функционал уже на множестве ломаных. Однако на таком пути мы сталкиваемся с анализом многогранников в пространствах R^n, что, конечно же, является трудной задачей.

Во многих случаях необходимо сравнивать различные подпространства, возможно, разной размерности, относительно их аппроксимационных свойств. Эта задача является „ослабленным" вариантом задачи нахождения колмогоровских поперечников (однако при вычислении поперечников размерность подпространств предполагается равной). По аналогии с достаточным условием теоремы 1 можно сформулировать критерий для определения экстремального подпространства.

Пусть K, $\mathfrak{C}(K)$, M, A обозначают те же объекты, что и ранее. Через $\mathfrak{A}$ обозначим совокупность конечномерных подпространств $F_\alpha\subset\mathfrak{C}(K)$, где размерность $n=n(F_\alpha)$ подпространства F_α зависит от индекса α. Пусть для любого F_α задано линейное многообразие $\mathfrak{B}(F_\alpha)$ непрерывных операторов $B_\alpha\colon M\to F_\alpha$ и для всех $B_\alpha\in\mathfrak{B}(F_\alpha)$, $F_\alpha\in\mathfrak{A}$

$$\|A-B_\alpha\|_{C(M)}=\max_{x\in M}\|(A-B_\alpha)x\|_C.$$

Теорема 2. *Если для всех* $B_\alpha \in \mathfrak{B}(F_\alpha)$, $F_\alpha \in \mathfrak{A}$ *выполняется неравенство*

$$\max_{x \in \mathfrak{M}(\tilde{B}_{\alpha_0})} \max_{t \in \mathfrak{N}(x, \tilde{B}_{\alpha_0})} \left\{ (A - \tilde{B}_{\alpha_0})\, x(t) \cdot (\tilde{B}_{\alpha_0} - B_\alpha)\, x(t) \right\} \geq 0,$$

то $\| A - \tilde{B}_{\alpha_0} \|_{C(M)} \leq \| A - B_\alpha \|_{C(M)}$.

Пример **7.** Пусть выполняются условия примера 4 и заданы два подпространства функционалов вида

$$F_C x = C x(1/2), \; G_C x = C \int_0^1 x(t)\, dt.$$

С помощью теоремы 2 покажем, что подпространство функционалов $G_C x$ приближает множество M не хуже, чем подпространство $F_C x$. Для этого заметим, что при $C \geq 1$

$$C\omega(1/2) \geq \int_0^1 \omega(t)\, dt,$$

а при $C \leq 1$

$$C(\omega(1) - \omega(1/2)) \leq \int_0^1 (\omega(1) - \omega(1-t))\, dt.$$

Это значит, что

$$\max_{x \in \mathfrak{M}(G_1)} \max_{t \in \mathfrak{N}(x, G_1)} \{(x(t) - G_1 x) \cdot (G_1 x - F_C x)\} =$$

$$= \max \Big\{ \int_0^1 \omega(t)\, dt \cdot \Big(\int_0^1 \omega(t)\, dt - C(1/2)\Big),$$

$$\int_0^1 \omega(1-t)\, dt \cdot \Big(\int_0^1 (\omega(1) - \omega(1-t))\, dt - C(\omega(1) - \omega(1/2))\Big)\Big\} \geq 0.$$

Отсюда в силу теоремы 2 вытекает, что метод приближения константой, определяемый функционалом $G_1 x$, приближает элементы множества M не хуже, чем метод приближения константой, определяемый функционалом $F_C x$. Оптимальность функционала $G_1 x$ среди функционалов $G_C x$ отмечена в примере 5.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 представляют собой полезный инструмент для анализа оптимальности операторов приближения в различных ситуациях.При этом не требуется явно вычислять значения погрешности приближения на классе, а используются только внутренние экстремальные свойства аппарата приближения. Теоремы 1 и 2 допускают обобщения на случаи бесконечномерных подпространств и отображений в выпуклые множества.

1. *Зуховицкий С. И.* Некоторые теоремы теории чебышевских приближений в пространстве Гильберта // Мат. сб. – 1955. – **37**, № 1. – С. 3 – 20.
2. *Стечкин С. Б.* О приближении абстрактных функций // Rev. math. pures et appl. (RPR). – 1956.– **1**, № 3. – P. 79 – 83.
3. *Гаркави А. Л.* Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Математический анализ, 1967. – М.: ВИНИТИ, 1969. – С. 75 – 132. – (Итоги науки. Сер. математика).
4. *Колмогоров А. Н.* Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 1. – С. 216 – 221.
5. *Тырыгин И. Я.* О равномерном приближении непрерывных операторов на компакте. – Киев, 1987. – 28 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 45).
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
7. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

Получено 24.04.91