УДК 519.21

Т. Л. Коваль, асп. (Киев. ун-т)

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ОЦЕНОК НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Установлена слабая сходимость случайных полей, построенных по оценке наименьших квадратов коэффициента регрессии случайного поля, являющегося двухпараметрической мартингал-разностью.

Встановлена слабка збіжність випадкових полів, побудованих за оцінкою найменших квадратів коефіцієнта регресії випадкового поля, яке утворює двохпараметричну мартингал-різницю.

Принцип инвариантности для многопараметрических мартингал-разностей рассматривался во многих работах (см., например, [1–3]). В [2] был установлен также принцип инвариантности для оценки наименьших квадратов (о.н.к.) коэффициента регрессии случайного поля. При этом предельным являлось винеровское поле. В настоящей статье установлена слабая сходимость случайных полей, построенных по о.н.к., к некоторому гауссовскому случайному полю с независимыми приращениями.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, семейство σ-алгебр $(\mathcal{F}_{ij};$ $i, j = 0, 1, 2, \ldots)$, $\mathcal{F}_{ij} \subset \mathcal{F}$ образует поток σ-алгебр [4]. Введем σ-алгебры $\mathcal{F}_i^1 = \bigcup_{j=1}^{\infty}\mathcal{F}_{ij}$, $\mathcal{F}_j^2 = \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{ij}$, $G_{ij} = \mathcal{F}_i^1 \cup \mathcal{F}_j^2$. Случайную функцию ε_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots$, назовем сильной мартингал-разностью относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_{ij}$, если $M(\varepsilon_{ij} \mid G_{i-1, j-1}) = 0$ п.н..

Рассмотрим случайное поле $\xi_{ij} = \theta\varphi_{ij} + \varepsilon_{ij}$, где $\varphi_{ij} : N^2 \to R^1$ — известная функция (N — множество натуральных чисел),, $\varepsilon_{ij} : N^2 \to R^1$ — сильная мартингал-разность, θ — неизвестный параметр, который необходимо оценить по наблюдениям случайного поля ξ_{ij}, $i, j \in N$.

О.н.к. параметра θ имеет вид

$$\hat{\theta}_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}\xi_{ij} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}^2.$$

Очевидно, что $\hat{\theta}_{n,m}$ — несмещенная оценка для θ. Обозначим $d_{n,m}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}^2$, $d_n^2 = d_{n,n}^2$. Определим последовательность случайных полей $X_n = X_n(t, s)$, $t, s \in [0, 1]$, $n \geq 1$, следующим образом:

$$X_n(t, s) = d_{[nt],[ns]}^2 d_n^{-1} (\hat{\theta}_{[nt],[ns]} - \theta),$$

$$X_n(0, s) \equiv X_n(t, 0) \equiv X_n(0, 0) \equiv 0.$$

Очевидно $X_n \in D([0, 1]^2)$ — пространство функций двух переменных без разрывов второго рода с топологией Скорохода.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия:*

1) $M(\varepsilon_{ij} \mid G_{i-1, j-1}) = 0$ *п.н.* $i, j \geq 1$;

2) $M(\varepsilon_{ij}^2 \mid G_{i-1,j-1}) = 1$ *п.н.* $i, j \geq 1$;

3) $\sup\limits_{i,j\geq 1} M|\varepsilon_{ij}|^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$;

4) $\sup\limits_{1\leq i,j\leq n} \left|\varphi_{ij}\right| / d_n \leq c / n,\ c \geq 1$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} d^2_{[nt],[ns]} d_n^{-2} = \sigma^2(t, s) \in C([0, 1]^2)$.

Пусть $X = X(t, s)$, $(t, s) \in [0, 1]^2$ *— случайное поле с независимыми гауссовскими приращениями,* $MX(t, s) = 0$ и $MX^2(t, s) = \sigma^2(t, s)$. *Тогда последовательность распределений полей* X_n *слабо сходится к распределению поля* X *в* $D([0, 1])$.

Доказательство. Проверим сначала сходимость конечномерных распределений полей X_n к конечным распределениям поля X. Возьмем произвольные $a_{k,l} \in R^1$, $k, l = \overline{1,m}$, $m \geq 1$, и произвольные точки $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m$ из отрезка $[0, 1]$. В соответствии с приемом Крамера – Уолда – Сапогова для сходимости конечномерных распределений достаточно показать, что распределение случайных величин

$$Y_n = \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl} \left[(X_n(t_k, s_l) - X_n(t_k, s_{l-1})) - (X_n(t_{k-1}, s_l) - X_n(t_{k-1}, s_{l-1}))\right]$$

слабо сходится к распределению случайной величины

$$Y = \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl} \left[(X(t_k, s_l) - X(t_k, s_{l-1})) - (X(t_{k-1}, s_l) - X(t_{k-1}, s_{l-1}))\right]$$

Y_n перепишем в виде $Y_n = \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{l=1}^{l_n} Z_{kl}^n$, где $Z_{kl}^n = a_{ij}\, \varphi_{k,l}\, \varepsilon_{k,l} d_n^{-1}$, $k_n = [nt_m]$, $l_n = [ns_m]$, $i = \inf\,(p\colon [ns_p] \geq k)$, $j = \inf\,(r\colon [nt_r] \geq l)$, $Z_{kl}^n = 0$, если $[ns_p] < k$ или $[nt_r] < l$, Z_{kl}^n — двупараметрическая сильная мартингал-разность.

Обозначим $M(\zeta \mid \mathcal{F}_k^1) = M_k\zeta$. В силу условия 2 теоремы

$$\sum_{k=1}^{k_n} \sum_{l=1}^{l_n} M_{k-1}(Z_{kl}^n)^2 = d_n^{-2} \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}^2 \left[\left(d^2_{[nt_k][ns_l]} - d^2_{[nt_k][ns_{l-1}]}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(d^2_{[nt_{k-1}][ns_l]} - d^2_{[nt_{k-1}][ns_{l-1}]}\right)\right] \to \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}^2 \left[(\sigma^2(t_k, s_l) - \sigma^2(t_k, s_{l-1})) - \right.$$

$$\left. - (\sigma^2(t_{k-1}, s_l) - \sigma^2(t_{k-1}, s_{l-1}))\right] = A,\ n \to \infty. \tag{1}$$

Покажем, что

$$\sum_{k,l} Z_{kl}^n \xrightarrow{D} N(0, A). \tag{2}$$

Применяя неравенство Гельдера с $p = 2 + \delta$ и $q = (2 + \delta) / (1 + \delta)$ и используя условия 2, 4 теоремы, легко получить, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k,l=1}^{k_n, l_n} M\left[(Z_{kl}^n)^2 I\left\{\left|Z_{kl}^n\right| > \varepsilon\right\}\right] \to 0,\ n \to \infty. \tag{3}$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum\nolimits_{k,l=1}^{k_n, l_n} M_{k-1}\left((Z_{kl}^n)^2 I\left\{\left|Z_{kl}^n\right| > \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty. \tag{4}$$

В силу (2) и неравенства

$$\max_{\substack{1\le k\le k_n\\1\le l\le l_n}} (Z_{kl}^n)^2 \le \sum_{k,l=1}^{k_n,l_n} (Z_{kl}^n)^2 I\left(\left|Z_{kl}^n\right|>\varepsilon\right)+\varepsilon^2,$$

справедливого для любого $\varepsilon>0$, выполняются соотношения

$$\max_{k,l}\left|Z_{kl}^n\right| \xrightarrow{P} 0,\ n\to\infty,$$

$$\sup_{n\ge1} M\left(\max_{\substack{1\le k\le k_n\\1\le l\le l_n}} (Z_{kl}^n)^2\right)<\infty. \tag{5}$$

Следуя [5], покажем, что

$$\sum\nolimits_{k,l=1}^{k_n,l_n} (Z_{kl}^n)^2 \xrightarrow{P} A,\ n\to\infty. \tag{6}$$

Введем величины

$$W_{ij}^n = Z_{ij}^n I\left(\left|Z_{ij}^n\right|\le\varepsilon\right).$$

Из (5) следует

$$P\,(Z_{ij}^n\ne W_{ij}^n \ \text{для некоторого}\ (i,j)\le(k_n,l_n))\to 0. \tag{7}$$

Из условия (4) вытекает

$$\sum_{i,j=1}^{k_n,l_n}\left\{M_{i-1}(Z_{ij}^n)^2-M_{i-1}(W_{ij}^n)^2\right\}\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty, \tag{8}$$

$$M\left(\sum_{k,l=1}^{k_n,l_n}\left[(W_{kl}^n)^2-M_{k-1,l-1}(W_{kl}^n)^2\right]\right)^2\to 0,\ n\to\infty. \tag{9}$$

Из оценок (7) – (9) следует, что для любого $\eta>0$

$$P\left(\sum_{k,l=1}^{k_n,l_n}\left((Z_{kl}^n)^2-M_{k-1,l-1}(Z_{kl}^n)^2\right)>\eta\right)\to 0,\ n\to\infty,$$

откуда и следует (6). В силу (5), (6), как показано в [3] (теорема 1), выполняется соотношение (2).

Проверим теперь слабую компактность последовательности мер, соответствующих случайным полям X_n. Воспользуемся при этом критерием Ченцова [6]. Возьмем произвольные точки $t_1<t_2<t_3,\ s'<s''$ из отрезка $[0,1]$:

$$I\,(t_1,t_2,t_3,s',s'') = M\,\{|\,[X_n(t_2,s'')-X_n(t_2,s')]-[X_n(t_1,s'')-X_n(t_1,s')]\,|^p\times$$

$$\times\,|\,[X_n(t_3,s'')-X_n(t_3,s')]-[X_n(t_2,s'')-X_n(t_2,s')]\,|^q\}=$$

$$=d_n^{-4}\,M\left\{\left|\sum_{[nt_1]+1}^{[nt_2]}\ \sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right|^2\left|\sum_{[nt_2]+1}^{[nt_3]}\ \sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right|^2\right\}=$$

$$=d_n^{-4}\,M\left\{\left(\sum_{[nt_1]+1}^{[nt_2]}\ \sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)^2 M\left[\left(\sum_{[nt_2]+1}^{[nt_3]}\ \sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)^2\middle|\,\mathcal{F}_{[nt_2],[ns'']}\right]\right\}.$$

Используя свойства условных математических ожиданий, легко проверить, что

$$M\left(\left(\sum_{[nt_2]+1}^{[nt_3]}\sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}\varepsilon_{ij}\right)^2\middle|\mathcal{F}_{[nt_2],[ns'']}\right)=$$

$$=\sum_{[nt_2]+1}^{[nt_3]}\sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}^2\,M\left(\varepsilon_{ij}^2\middle|\mathcal{F}_{[nt_2],[ns'']}\right)+$$

$$+\sum_{i_1=[nt_2]+1}^{[nt_3]}\sum_{j_1=[ns']+1}^{[ns'']}\sum_{i_2=[nt_2]+1}^{[nt_3]}\sum_{j_2=[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{i_1j_1}\varphi_{i_2j_2}\,M\left(\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\middle|\mathcal{F}_{[nt_2],[ns'']}\right)=$$

$$=\sum_{[nt_2]+1}^{[nt_3]}\sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}^2.$$

Таким образом,

$$I(t_1,t_2,t_3,s',s'')=\sum_{[nt_2]+1}^{[nt_3]}\sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}^2 d_n^{-2}\sum_{[nt_1]+1}^{[nt_2]}\sum_{[ns']+1}^{[ns'']}\varphi_{ij}^2 d_n^{-2}.$$

Следуя [7], получаем

$$I(t_1,t_2,t_3,s',s'')\le 16\,c^4\,(t_3-t_1)^2\,(s'-s')^2=16\,c^4\,|\,(t_3-t_1)^2\,(s'-s')\,|^{1+1}.$$

Случай $s_1<s_2<s_3,\ t'<t''$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Рассмотрим примеры, показывающие, какой вид будет иметь дисперсия предельного поля X, если функция регрессии φ_{ij} имеет степенной вид. Если $\varphi_{ij}=i^{\alpha}j^{\beta}$, $\alpha,\beta>-1/2$, то $\sigma^2(t,s)=t^{2\alpha+1}s^{2\beta+1}$; если $\varphi_{ij}=i^{\alpha}+j^{\beta}$ и $\alpha<\beta$, то $\sigma^2(t,s)=t\,s^{2\beta+1}$, при $\alpha>\beta$ $\sigma^2(t,s)=t^{2\alpha+1}s$, при $\alpha=\beta$ $\sigma^2(t,s)=$ $=t\,s\,[a(t^{2\alpha}+s^{2\alpha})+2b(t\,s)^{\alpha}]\,/\,(2(a+b))$, где $a=(2\alpha+1)^{-1}$, $b=(\alpha+1)^{-2}$; если $\varphi_{ij}=(i^2+j^2)^{\alpha/2}$, $\alpha=0,1,2,\ldots$, то $\sigma^2(t,s)=\sum_{k=0}^{\alpha}a_k t^{2(\alpha-k)+1}s^{2k+1}\Big/\sum_{k=0}^{\alpha}a_k$, где $a_k=c_{\alpha}^k/(2k+1)[2(\alpha-k)+1]$.

1. *Basu A. K., Dorea C. C. Y.* On func-tional central limit theorems for a stationary martingal random fields // Acta Math. Acad. Sci. Hungar.— 1979.— **33**, № 3–4.— P. 307–316.
2. *Леоненко Н. Н., Мишура Ю. С.* О принципе инвариантности для многопараметрических мартингалов // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1981.— Вып. 24.— С. 51–60.
3. *Морквенас Р.* Принцип инвариантности для мартингалов на плоскости // Лит. мат. сб.— 1984.— **24**, №4.— С. 127–132.
4. *Гихман И. И.* Двухпараметрические мартингалы // Успехи мат. наук.— 1982.— 37, вып. 6.— С. 3–28.
5. *Meleish D. C.* Dependent central limit theorems and invariance principles // Ann. Probab.— 1974.— **2**, №4.— P. 620–628.
6. *Ченцов Н. Н.* Предельные теоремы для некоторых классов случайных функций // Тр. Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и мат. статистике.— Ереван, 1960.— С. 280–284.
7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 351 с.

Получено 15.01.92