УДК 519. 21

**И. И. Ковтун,** канд. физ.-мат. наук (Укр. с.-х. акад., Киев)

# ФЛУКТУАЦИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Для дифференциального уравнения колебаний с коэффициентами, возмущенными гауссовскими дельта-коррелированными случайными процессами, со случайной внешней силой получены замкнутые моментные уравнения. В частном случае найдены математическое ожидание и ковариационная функция.

Для диференціального рівняння коливань з коефіцієнтами, збуреними гауссівськими дельта-корельованими випадковими процесами, із випадковою зовнішнєю силою одержані замкнені рівняння для моментів. Зокрема, знайдені математичне сподівання та коваріаційна функція.

В теории колебаний часто необходимо учитывать флуктуационные эффекты. Это приводит к необходимости рассмотрения дифференциального уравнения

$$d^2x / dt^2 + 2(b + \varepsilon_1(t, \omega))\, dx / dt + (k^2 + \varepsilon_2(t, \omega))x = f(t, \omega) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0, \omega) = 0, \; x'(0, \omega) = 0, \tag{2}$$

где $x(t, \omega)$ — случайная функция, которая почти для всех $\omega \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2). Здесь $\varepsilon_1(t, \omega), \varepsilon_2(t, \omega), f(t, \omega)$ — независимые гауссовские дельта-коррелированные случайные процессы со средними $\langle \varepsilon_i(t, \cdot\,) \rangle = 0$, $\langle f(t, \cdot\,) \rangle = 0$ и корреляционными функциями $K_{\varepsilon_1}(t, s) = R_1(t)\delta(t-s)$, $K_{\varepsilon_2}(t, s) = R_2(t)\delta(t-s)$, $K_f(t, s) = R_f(t)\delta(t-s)$ ($\delta(t-s)$ — дельта-функция), $\{\Omega, \mathfrak{A}, p\}$ — вероятностное пространство (пространство элементарных событий с выделенной $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{A}$ его подмножеств и с вероятностной мерой $p$ на $\Omega$). При этом предполагается, что уравнение $d^2x / dt^2 + 2b\, dx / dt + k^2x = 0$ есть уравнение колебаний, т. е. $b < k$, $b > 0$.

Следует отметить, что имеется обширная литература по дифференциальным уравнениям со случайными коэффициентами (библиография содержится, например, в монографиях [1, 2]).

К уравнениям вида (1) приводят задачи, возникающие при описании законов движения механических и других систем с учетом сил, характеризующихся первой производной — скоростью, а также с учетом внешних сил. Второе слагаемое уравнения (1) $(b + \varepsilon_1(t, \omega))\, dx / dt$ характеризует, например, случайное изменение силы трения. Так, если масса закреплена на конце растяжимого троса, то при подъеме возникают продольные колебания, обусловливающие появление дополнительного динамического натяжения троса, что учитывается при определении силы сухого трения, которая рассматривается с учетом случайного разброса. Третье слагаемое $(k^2 + \varepsilon_2(t, \omega))x$ описывает флуктуацию частоты $k$. Правая часть уравнения (1) $f(t, \omega)$ — случайная внешняя сила, действующая на систему.

Для практических задач достаточно знать математическое ожидание (среднее) решения и его ковариационную (корреляционную) функцию.

**1.** Найдем математическое ожидание $\langle x(t, \cdot\,) \rangle = m(t)$. Усредняя уравнение (1), получаем

$$d^2\langle x \rangle / dt^2 + 2b\, d\langle x \rangle / dt + 2\langle \varepsilon_1(t, \cdot\,)\, dx / dt \rangle + k^2\langle x \rangle + \langle \varepsilon_2(t, \cdot\,)x(t, \cdot\,) \rangle = 0. \tag{3}$$

Очевидно, что $x(t, \omega)$ — функционал от $\varepsilon_1(t, \omega), \varepsilon_2(t, \omega), f(t, \omega)$, т. е. $x(t, \omega) = X[t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, f\,]$. Обозначим $dx / dt = y$. Тогда $y(t, \omega)$ — также функционал от

$\varepsilon_1(t,\omega)$, $\varepsilon_2(t,\omega)$, $f(t,\omega)$: $y(t,\omega) = Y[t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, f]$. Найдем среднее $\langle \varepsilon_1(t,\cdot)\, dx/dt\rangle = \langle \varepsilon_1(t,\cdot)\, Y\rangle$. Используя формулу Донскера [3], имеем

$$\langle \varepsilon_1(t,\cdot)\, Y\rangle = \int_0^\infty K_{\varepsilon_1}(t,s)\,\langle \delta y(t,\cdot)/\delta\varepsilon_1(\xi,\cdot)\rangle\, d\xi =$$

$$= \int_0^\infty R_1(t)\,\delta(t-s)\,\langle \delta y(t,\cdot)/\delta\varepsilon_1(\xi,\cdot)\rangle\, d\xi =$$

$$= R_1(t)\,\langle \delta y(t,\cdot)/\delta\varepsilon_1(\xi,\cdot)\rangle. \tag{4}$$

Найдем вариационную производную $\delta y(t,\omega)/\delta\varepsilon_1(s,\omega)$ при $s=t$. Заменим уравнение (1) системой

$$dx/dt = y,$$
$$dy/dt = -k^2x - \varepsilon_2 x - 2by - 2\varepsilon_1 y + f. \tag{5}$$

Начальные условия (2) примут вид

$$x(0,\omega) = 0,\ y(0,\omega) = 0. \tag{6}$$

Задача (5), (6) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$x(t,\omega) = \int_0^t y(z,\omega)\, dz,$$

$$y(t,\omega) = -k^2\int_0^t x(z,\omega)\,dz - \int_0^t \varepsilon_2(z,\omega)\,x(z,\omega)\,dz - \tag{7}$$

$$-2b\int_0^t y(z,\omega)\,dz - 2\int_0^t \varepsilon_1(z,\omega)\,y(z,\omega)\,dz + \int_0^t f(z,\omega)\,dz.$$

Найдем вариационные производные $\delta x(t,\omega)/\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)$, $\delta y(t,\omega)/\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)$. Имеем

$$\frac{\delta y(t,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)} = -k^2\int_0^t \frac{\delta x(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz - \int_0^t \frac{\delta\varepsilon_2(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,x(z,\omega)\,dz -$$

$$-\int_0^t \varepsilon_2(z,\omega)\,\frac{\delta x(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz - 2b\int_0^t \frac{\delta y(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz -$$

$$-2\int_0^t \frac{\delta\varepsilon_1(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,y(z,\omega)\,dz - 2\int_0^t \varepsilon_1(t,\omega)\,\frac{\delta y(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz + \int_0^t \frac{\delta f(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(z,\omega)}\,dz. \tag{8}$$

Используем условие причинности: $\delta x(z,\omega)/\delta\varepsilon_1(\xi,\omega) = 0$, $\delta y(z,\omega)/\delta\varepsilon_1(\xi,\omega) = 0$ при $\xi > z$. Так как $\delta\varepsilon_1(z,\omega)/\delta\varepsilon_1(\xi,\omega) = \delta(z-\xi)$, а $\delta\varepsilon_2(z,\omega)/\delta\varepsilon_1(\xi,\omega) = 0$, $\delta f(z,\omega)/\delta\varepsilon_1(\xi,\omega) = 0$, то из (8) получаем

$$\frac{\delta x(t,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)} = \int_\xi^t \frac{\delta y(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz,$$

$$\frac{\delta y(t,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)} = -k^2\int_\xi^t \frac{\delta x(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz - \int_\xi^t \varepsilon_2(z,\omega)\,\frac{\delta x(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz -$$

$$-2b\int_\xi^t \frac{\delta y(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz - 2\int_\xi^t \delta(t-\xi)\,y(z,\omega)\,dz - 2\int_\xi^t \varepsilon_1(z,\omega)\,\frac{\delta y(z,\omega)}{\delta\varepsilon_1(\xi,\omega)}\,dz.$$

Полагая $\xi = t$, находим

$$\frac{\delta x(t,\omega)}{\delta\varepsilon_1(t,\omega)} = 0, \quad \frac{\delta y(t,\omega)}{\delta\varepsilon_1(t,\omega)} = -2y(t,\omega).$$

Следовательно, из (4) получаем

$$\langle\varepsilon_1(t,\cdot)\, dx/dt\rangle = -2R_1(t)\langle y(t,\cdot)\rangle. \tag{9}$$

Аналогично из системы (7) можно получить

$$\frac{\delta x(t,\omega)}{\delta\varepsilon_2(t,\omega)} = 0, \quad \frac{\delta y(t,\omega)}{\delta\varepsilon_2(t,\omega)} = -x(t,\omega)$$

и

$$\langle\varepsilon_2(t,\cdot)\, x(t,\cdot)\rangle = 0. \tag{10}$$

Подставляя (9), (10) в уравнение (3), получаем уравнение для нахождения математического ожидания решения:

$$d^2m/dt^2 + 2(b - 2R_1(t))\, dm/dt + k^2m = 0.$$

Очевидно, что решением этого уравнения с учетом начальных условий будет $m(t) = 0$.

**2.** Найдем ковариационную функцию решения $\langle x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle$ при $s \le t$. Умножая обе части уравнений системы (5) на $x(s,\omega)$ и усредняя, получаем

$$\begin{gathered} d\langle x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle/dt = \langle y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle, \\ d\langle y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle/dt = -k^2\langle x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle - \langle\varepsilon_2(t,\cdot)\, x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle - \\ -2b\langle y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle - 2\langle\varepsilon_1(t,\cdot)\, y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle + \langle f(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle. \end{gathered} \tag{11}$$

Можно показать, что

$$\begin{gathered} \langle\varepsilon_2(t,\cdot)\, x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle = 0, \ \langle f(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle = 0, \\ \langle\varepsilon_1(t,\cdot)\, y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle = -2R_1(t)\langle y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle. \end{gathered}$$

Тогда из системы (11) получаем

$$\begin{gathered} d\langle x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle/dt = \langle y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle, \\ d\langle y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle/dt = -k^2\langle x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle - 2(b - 2R_1(t))\langle y(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle. \end{gathered} \tag{12}$$

Обозначая $\langle x(t,\cdot)\, x(s,\cdot)\rangle = q_s(t)$, из системы (12) имеем уравнение для нахождения ковариационной функции $q_s(t)$ при $s < t$ ($s$ — параметр):

$$d^2q_s(t)/dt^2 + 2(b - 2R_1(t))\, dq_s(t)/dt + k^2q_s(t) = 0. \tag{13}$$

Начальные условия для этого уравнения

$$q_s(t)\,|_{t=s} = \sigma(s), \ dq_s(t)/dt\,|_{t=s} = (1/2)\sigma'(s) \tag{14}$$

($\sigma$ — дисперсия решения $x(t,\omega)$) находим из системы

$$\begin{gathered} d\langle x^2\rangle/ds = 2\langle xy\rangle, \\ d\langle xy\rangle/ds = -k^2\langle x^2\rangle - 2(b - 2R_1(s))\langle xy\rangle + \langle y^2\rangle, \\ d\langle y^2\rangle/ds = 2R_2(s)\langle x^2\rangle - k^2\langle xy\rangle - 4(b - 4R_1(s))\langle y^2\rangle + 2R_f(s). \end{gathered} \tag{15}$$

Учитывая, что $\langle x^2 \rangle = \sigma$, из (15) получаем уравнение для нахождения $\sigma$:

$$d^3\sigma / ds^3 + 2(3b - 10R_1(s))\, d^2\sigma / ds^2 + 4(k^2 - 2(b - 4R_1(s))\,(b - 2R_1(s)) -$$
$$- dR_1 / ds)\, d\sigma / ds - 4(R_2(s) - 2(b - 4R_1(s))k^2)\,\sigma = 4R_f(s) \tag{16}$$

с начальными условиями

$$\sigma\,|_{s=0} = 0,\ d\sigma / ds\,|_{s=0} = 0,\ d^2\sigma / ds^2\,|_{s=0} = 0. \tag{17}$$

Уравнения (13), (16) и условия (17) определяют ковариационную функцию решения задачи (1), (2) при $s \le t$. Аналогично определяется ковариационная функция решения при $s \ge t$.

**3.** В качестве примера рассмотрим уравнение

$$d^2x / dt^2 + 2(b + \varepsilon_1(t, \omega))\, dx / dt + k^2 x = f(t, \omega),$$

где $R_1 = b / 4$.

Уравнение (13) для нахождения ковариационной функции $q_s(t)$ $(s < t)$ запишется в виде

$$d^2 q_s(t) / dt^2 + b\, dq_s(t) / dt + k^2\, q_s(t) = 0 \tag{18}$$

а уравнение (16) для нахождения $\sigma$ —

$$d^3\sigma / ds^3 + b\, d^2\sigma / ds^2 + 4k^2\, d\sigma / ds = 4R_f(s). \tag{19}$$

Решение уравнения (19) при начальных условиях (17) имеет вид

$$\sigma = 1 / k^2 \int_0^s R_f(s)[1 + e^{(b/2)(z-s)}((b / 2a)\sin a\,(z - s) - \cos a\,(z - s))]\, dz, \tag{20}$$

где $a = (1/2)\sqrt{16k^2 - b^2}$.

Следовательно, $q_s(t)$ при $s \le t$ получаем как решение уравнения (18) с начальным условием (14), в которых $\sigma$ и $\sigma'$ определяются соотношением (20), т.е.

$$q_s(t) = (e^{-\frac{b}{2}(t-s)} / \beta)\,((\sigma' - b\sigma / 2)\sin\beta\,(t - s) + \sigma\beta\cos\beta\,(t - s)),$$

где $\beta = (1 / 2)\sqrt{4k^2 - b^2}$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
3. *Донскер М. Д.* Об интегралах в функциональных пространствах // Математика. – 1967. – **11**, № 3. - С. 128 – 154.

Получено 19.02.91