УДК 517.938

М. М. Астаф'єва (Київ. славіст. ун-т),
Н. В. Степаненко (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

МНОЖИНИ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ ПРИ ФІКСОВАНІЙ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

We consider sets of linear expansions of dynamical systems on a torus with the common alternating Lyapunov function.

Рассмотрены множества линейных расширений динамических систем на торе с общей знакопеременной функцией Ляпунова.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(\varphi)x, \qquad \dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $A(\varphi)$ — квадратна n-вимірна матриця, елементами якої є неперервні 2π-періодичні по кожній змінній φ_j, $j = \overline{1, m}$, функції, $x \in R^n$, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\varphi \in R^m$, $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt}$, $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$. Припустимо, що існує квадратична форма

$$V = \langle S_0(\varphi)x, x \rangle \tag{2}$$

з симетричною неперервно диференційовною матрицею коефіцієнтів $S_0(\varphi) \in C^1(T_m)$, похідна якої в силу системи (1) є додатно визначеною, тобто

$$\dot{V} = \left\langle \left[\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) + S_0(\varphi)\, A(\varphi) + A^T(\varphi)\, S_0(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geq \gamma \| x \|^2, \tag{3}$$

$$\gamma = \text{const} > 0.$$

Тоді відомо [1, 2], що при виконанні умови

$$\det S_0(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in T_m \tag{4}$$

система (1) є регулярною, тобто має єдину функцію Гріна – Самойленка з експоненціальною оцінкою. Поряд із глибокими дослідженнями проблеми регулярності системи (1) [3, 4] виникають наступні питання. Якщо зафіксувати квадратичну форму (2), а змінювати праву частину системи (1), то який загальний вигляд буде мати права частина системи (1), щоб похідна квадратичної форми (2) в силу цих систем також була додатно визначеною? Чи існують регулярні системи вигляду (1), в яких би $\det A(\varphi) \equiv 0$ при всіх $\varphi \in T_m$?

Відповіді на поставлені питання наведемо в пропонованій статті.

Насамперед слід зазначити, що нерівність (3) суттєво не зміниться при достатньо малих (в звичайній евклідовій нормі) змінах вектор-функції $a(\varphi)$ і матриці $A(\varphi)$. Перевіримо, що при виконанні умови невиродженості (4) нерівність (3) виконується, якщо вектор-функцію $a(\varphi)$ замінити на будь-яку іншу $b(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$ і при цьому вибрати матрицю $A(\varphi)$ у вигляді

$$A(\varphi) = S_0^{-1}(\varphi) \left[B(\varphi) + M(\varphi) - 0{,}5 \frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial \varphi} b(\varphi) \right], \tag{5}$$

де $B(\varphi)$, $M(\varphi)$ — неперервні матриці, що задовольняють наступні умови:

$$B^T(\varphi) \equiv B(\varphi), \qquad \langle B(\varphi)x, x \rangle \geq \beta \| x \|^2, \quad \beta = \text{const} > 0, \tag{6}$$

$$M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi). \tag{7}$$

Розглядаючи ліву частину нерівності (3) при заміні $a(\varphi)$ на будь-яку іншу вектор-функцію $b(\varphi)$ і замінюючи матрицю $A(\varphi)$ правою частиною рівності (5), маємо

$$\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi)+S_0(\varphi)\,A(\varphi)+A^T(\varphi)\,S_0(\varphi) \;=\; \frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi)+\,B(\varphi)+\,M(\varphi)\,-$$

$$-\,0{,}5\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi)+\,B(\varphi)+\,M^T(\varphi)-0{,}5\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi) \;=\; 2B(\varphi).$$

Звідси бачимо, що при умові (6) нерівність (3) виконується зі сталою $\gamma=2\beta$.

Таким чином, приходимо до наступного висновку.

***Висновок* 1.** Кожній фіксованій невиродженій симетричній матриці $S_0(\varphi)\in C^1(T_m)$ відповідає множина регулярних систем вигляду

$$\dot x \;=\; S_0^{-1}(\varphi)\left[B(\varphi)+M(\varphi)-0{,}5\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi)\right]x, \quad \dot\varphi \;=\; b(\varphi), \tag{8}$$

де $b(\varphi)$ — будь-яка фіксована вектор-функція, $b(\varphi)\in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$, $B(\varphi)$, $M(\varphi)$ — довільні неперервні матриці, що задовольняють умови (6), (7).

***Зауваження* 1.** Похідна в силу системи рівнянь (8) квадратичної форми (2) з симетричною невиродженою матрицею коефіцієнтів $S_0(\varphi)\in C^1(T_m)$ має вигляд $\dot V \,=\, 2\langle Bx,x\rangle$.

Слід звернути увагу на те, що існують регулярні системи (1), в яких вектор-функція $a(\varphi)$ набуває нульових значень при деяких $\varphi\in T_m$. Якщо ж у таких системах замінити цю вектор-функцію $a(\varphi)$ деяким сталим вектором ω і не змінювати матриці $A(\varphi)$, то отримана система може й не бути регулярною. Розглянемо, наприклад, систему

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \qquad \dot\varphi=\sin\varphi. \tag{9}$$

Похідна квадратичної форми

$$V \;=\; x_1^2\cos\varphi+2x_1x_2\sin\varphi-x_2^2\cos\varphi \tag{10}$$

в силу системи (9) є додатно визначеною. Це підтверджує регулярність системи (9). Якщо тепер у наведеній системі рівняння $\dot\varphi\,=\,\sin\varphi$ замінити рівнянням $\dot\varphi=\omega$, $\omega=\mathrm{const}\in R$, і залишити ту ж саму матрицю $A(\varphi)\,=\,\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$, то система вже не буде регулярною, оскільки рівняння $\dot x\,=\,x_1\cos(\omega t+\varphi)\,+\,f(t)$ не при кожній функції $f(t)$, неперервній і обмеженій на R, має обмежений на R розв'язок. Тепер знайдемо (2×2)-вимірні матриці $A(\varphi)\in C^0(T_1)$ такі, щоб похідна квадратичної форми (10) в силу системи $\dot x=A(\varphi)$, $\dot\varphi=\omega$, $x=(x_1,x_2)$ була додатно визначеною. Матриця $S_0(\varphi)$, яка відповідає квадратичній формі (10), має вигляд

$$S_0(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}. \tag{11}$$

При цьому легко бачити, що $S_0(\varphi)\equiv S_0^{-1}(\varphi)$. Запишемо рівність (5) з деякими сталими матрицями $B=\begin{pmatrix}b_1 & b\\ b & b_2\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}0 & -m\\ m & 0\end{pmatrix}$. Маємо

$$A(\varphi) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{pmatrix} - 0{,}5\omega \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \begin{pmatrix} b_1\cos\varphi + (b+m)\sin\varphi & (b-m)\cos\varphi + b_2\sin\varphi - 0{,}5\omega \\ b_1\sin\varphi - (b+m)\cos\varphi + 0{,}5\omega & (b-m)\sin\varphi - b_2\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Оскільки матрицю B вибираємо додатно або від'ємно визначеною, то для її елементів виконується одна із систем нерівностей

$$\begin{cases} b_1 > 0, \\ b_1 b_2 - b^2 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 < 0, \\ b_1 b_2 - b^2 > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Таким чином, похідна квадратичної форми (10) в силу системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} b_1\cos\varphi + (b+m)\sin\varphi & (b-m)\cos\varphi + b_2\sin\varphi - 0{,}5\omega \\ b_1\sin\varphi - (b+m)\cos\varphi + 0{,}5\omega & (b-m)\sin\varphi - b_2\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$
$$\dot{\varphi} = \omega,$$

є знаковизначеною, а це означає, що система (14) регулярна при будь-яких фіксованих значеннях ω, b_j, b, $m \in R$, для яких виконується одна із нерівностей (13). Тепер з'ясуємо, при яких можливих значеннях ω, b_j, b, $m \in R$ визначник матриці (12) тотожно дорівнює нулю. Безпосередньо обчислюючи цей визначник, отримуємо $\det A(\varphi) = b^2 - b_1 b_2 - m^2 + 0{,}25\omega^2 - \omega b\cos\varphi + 0{,}5\omega(b_1 - b_2)\sin\varphi$. Звідси видно, що визначник матриці (12) тотожно дорівнює нулю при умовах $b = 0$, $b_1 = b_2$, $\omega^2 = 4(b_1 b_2 + m^2)$. Перепозначаючи $b_j \to b$, $\omega \to 2\omega$, приходимо до наступного висновку.

Висновок 2. Система рівнянь

$$\dot{\varphi} = 2\omega,$$
$$\dot{x}_1 = [b\cos\varphi + m\sin\varphi]x_1 + [-m\cos\varphi + b\sin\varphi - \omega]x_2, \tag{15}$$
$$\dot{x}_2 = [-m\cos\varphi + b\sin\varphi + \omega]x_1 + [-b\cos\varphi - m\sin\varphi]x_2$$

регулярна при будь-яких дійсних фіксованих значеннях ω, m, $b \in R$ $(b \neq 0)$. При цьому визначник відповідної матриці

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} [b\cos\varphi + m\sin\varphi] & [-m\cos\varphi + b\sin\varphi - \omega] \\ [-m\cos\varphi + b\sin\varphi + \omega] & [-b\cos\varphi - m\sin\varphi] \end{pmatrix} \tag{16}$$

за умови виконання рівності

$$\omega = \sqrt{m^2 + b^2} \tag{17}$$

тотожно дорівнює нулеві.

Зауважимо, що квадратична форма (10) при заміні змінних

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

зводиться до канонічного вигляду $\overline{V} = y_1^2 - y_2^2$. Якщо ж тепер виконати заміну змінних (18) в системі рівнянь (15), то одержимо систему зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{\varphi} = 2\omega, \qquad \dot{y}_1 = by_1 + my_2, \qquad \dot{y}_2 = my_1 - by_2,$$

яка ще раз підтверджує регулярність системи (15) при будь-яких фіксованих значеннях ω, m, $b \in R$ $(b \neq 0)$.

Зауваження 2. В системі рівнянь (8) до змінних φ можна додати ще будь-яку кількість змінних $\psi \in T_k$, тобто розглянути систему

$$\dot{x} = S_0^{-1}(\varphi)\left[B(\varphi,\psi) + M(\varphi,\psi) - 0{,}5\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi,\psi)\right]x,$$
$$\dot{\varphi} = b(\varphi,\psi), \qquad \dot{\psi} = \bar{b}(\varphi,\psi), \tag{19}$$

де $b(\varphi,\psi)$, $\bar{b}(\varphi,\psi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_{m+k})$ *— довільні фіксовані вектор-функції, матриці* $B(\varphi,\psi)$ *і* $M(\varphi,\psi)$ *задовольняють тотожності* $B^T \equiv B$, $M^T \equiv -M$. *При цьому похідна квадратичної форми* (2) *в силу системи* (19) *дорівнює* $\dot{V} = 2\langle B(\varphi,\psi)x, x\rangle$.

Теорема 1. *Якщо похідна невиродженої квадратичної форми* (2) *в силу деякої системи рівнянь вигляду*

$$\dot{x} = P(\varphi,\psi)x, \qquad \dot{\varphi} = b(\varphi,\psi), \qquad \dot{\psi} = \bar{b}(\varphi,\psi) \tag{20}$$

є додатно визначеною, то матрицю $P(\varphi,\psi)$ *можна записати у вигляді*

$$P(\varphi,\psi) = S_0^{-1}(\varphi)\left[B(\varphi,\psi) + M(\varphi,\psi) - 0{,}5\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi,\psi)\right], \tag{21}$$

де $B(\varphi,\psi)$ *— деяка симетрична додатно визначена матриця,* $M(\varphi,\psi)$ *— кососиметрична матриця.*

Доведення. Справді, нехай похідна квадратичної форми (2) в силу системи (20) є додатно визначеною, тобто

$$\dot{V} = \left\langle\left[\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi,\psi) + S_0(\varphi)P(\varphi,\psi) + P^T(\varphi,\psi)S_0(\varphi)\right]x, x\right\rangle \geq \gamma\|x\|^2,$$
$$\gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Позначимо

$$B(\varphi,\psi) = 0{,}5\left[\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}b(\varphi,\psi) + S_0(\varphi)P(\varphi,\psi) + P^T(\varphi,\psi)S_0(\varphi)\right], \tag{22}$$

$$M(\varphi,\psi) = 0{,}5\left[S_0(\varphi)P(\varphi,\psi) - P^T(\varphi,\psi)S_0(\varphi)\right]. \tag{23}$$

Для матриць (22), (23) виконуються умови (6), (7) $(\beta = \gamma/2)$ і при цьому має місце рівність (21).

Зауваження 3. Зафіксувавши невироджену квадратичну форму (2), розглянемо множину систем вигляду (1) таких, що похідна цієї квадратичної форми в силу систем є знаковизначеною. Вище ми з'ясували (зауваження 2), що кількість змінних в системі (1) можна збільшувати. Виявляється, що зменшення кількості змінних φ не завжди є можливим.

Розглянемо приклад, який підтверджує наведене зауваження. Нехай маємо (2×2)-вимірну матрицю

$$S_0(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m. \tag{24}$$

Позначимо $\tilde{\varphi} = (\varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $\phi = (\varphi_1, \tilde{\varphi})$ і припустимо, що існують функції

$a_j(\tilde{\varphi}) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_{m-1})$, $j = \overline{2, m}$, і неперервна матриця $A(\tilde{\varphi})$, для яких виконується нерівність

$$\left\langle \left[\sum_{j=2}^{m} \frac{\partial S_0(\theta)}{\partial \varphi_j} a_j(\tilde{\varphi}) + S_0(\theta) A(\tilde{\varphi}) + A^T(\tilde{\varphi}) S_0(\theta) \right] x, x \right\rangle \geq \gamma \| x \|^2, \tag{25}$$

$$\gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Враховуючи тотожності

$$S_0(\theta)\Big|_{\varphi_1 = 0} \equiv -S_0(\theta)\Big|_{\varphi_1 = \pi}, \qquad \frac{\partial S_0(\theta)}{\partial \varphi_j}\bigg|_{\varphi_1 = 0} \equiv -\frac{\partial S_0(\theta)}{\partial \varphi_j}\bigg|_{\varphi_1 = \pi}, \qquad j = \overline{2, m},$$

із нерівності (25) отримуємо

$$\left\langle \left[\sum_{j=2}^{m} \frac{\partial S_0(\theta)}{\partial \varphi_j} a_j(\tilde{\varphi}) + S_0(\theta) A(\tilde{\varphi}) + A^T(\tilde{\varphi}) S_0(\theta) \right] x, x \right\rangle \equiv$$

$$\equiv -\left\langle \left[\sum_{j=2}^{m} \frac{\partial S_0(\theta)}{\partial \varphi_j} a_j(\tilde{\varphi}) + S_0(\theta) A(\tilde{\varphi}) + A^T(\tilde{\varphi}) S_0(\theta) \right] x, x \right\rangle \geq \gamma \| x \|^2.$$

Прийшли до суперечності.

Справді, наведений приклад матриці (24) показує, що не існує матриці $A(\tilde{\varphi})$, неперервно залежної від меншого числа змінних $\tilde{\varphi}$, ніж число змінних φ, для якої б виконувалася нерівність $\left\langle \left[S_0(\theta) A(\tilde{\varphi}) + A^T(\tilde{\varphi}) S_0(\theta) \right] x, x \right\rangle \geq \gamma \| x \|^2$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$.

Відомо, що, наприклад, система рівнянь

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos^2\theta \\ 1 & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \theta = \varphi_1 + \ldots + \varphi_m, \tag{26}$$

є регулярною при будь-яких фіксованих вектор-функціях $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$. У цьому можна переконатися, вибираючи квадратичну форму у вигляді

$$V = 2 p x_1 x_2 - x_2^2 \sin\theta \tag{27}$$

і обчислюючи похідну в силу системи (26). Виявляється, що якою б не була вектор-функція $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$, завжди можна вибрати в квадратичній формі (27) достатньо велике фіксоване значення параметра $p > 0$ таке, що похідна квадратичної форми (27) в силу системи (26) буде додатно визначеною. При цьому не існує квадратичної форми зі сталими коефіцієнтами $V = s_1 x_1^2 + 2 s_{12} x_1 x_2 + s_2 x_2^2$, яка б мала додатно визначену похідну в силу системи (26). У зв'язку з цим видається цікавою така задача:

зафіксувати квадратичну форму вигляду

$$V = 2p\langle x_1, x_2 \rangle + \langle S x_2, x_2 \rangle \sin\theta, \quad x_1, x_2 \in R^n, \quad \theta = \varphi_1 + \ldots + \varphi_m, \tag{28}$$

при деякому фіксованому значенні параметра $p > 0$ *і деякій* ($n \times n$)*-вимірній сталій симетричній матриці* S *і записати системи лінійних розширень* (8), *похідна квадратичної форми* (28) *в силу яких була б додатно визначеною.*

Квадратичній формі (28) відповідає матриця

$$S_0(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & pI_n \\ pI & S\sin\theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j,$$

яка є невиродженою, і обернена до неї має вигляд

$$S_0^{-1}(\varphi) = p^{-2}\begin{bmatrix} -S\sin\theta & pI_n \\ pI_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Обчислюючи добуток матриць у правій частині (5) з записаними вище матрицями S_0, S_0^{-1} і покладаючи при цьому

$$B(\varphi) = \begin{bmatrix} B_1(\varphi) & B_{12}(\varphi) \\ B_{12}^T(\varphi) & B_2(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad M(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & M(\varphi) \\ -M^T(\varphi) & 0 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

отримуємо

$$S_0^{-1}(\varphi)\left[B(\varphi) + M(\varphi) - 0{,}5\frac{\partial S_0(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi)\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} -p^{-2}SB_1\sin\theta + p^{-1}\left(B_{12}^T - M^T\right) & -p^{-2}S\left(B_{12}+M\right)\sin\theta + p^{-1}\left(B_2 - 0{,}5S\left(\sum_{j=1}^m a_j\right)\cos\theta\right) \\ p^{-1}B_1 & p^{-1}\left(B_{12}+M\right) \end{bmatrix}.$$

Як підсумок викладеного вище, можна стверджувати наступне.

Теорема 2. *Нехай* $(2n\times 2n)$*-вимірна симетрична матриця* $B(\varphi) \in C^0(T_m)$, *яка записана в позначеннях* (29), *є додатно визначеною. Тоді система рівнянь*

$$\dot{x}_1 = \left[-p^{-2}SB_1(\varphi)\sin\theta + p^{-1}\left[B_{12}^T(\varphi) - M^T(\varphi)\right]\right]x_1 +$$

$$+ \left[-p^{-2}S[B_{12}(\varphi) + M(\varphi)]\sin\theta + p^{-1}\left(B_2(\varphi) - 0{,}5S\left(\sum_{j=1}^m a_j(\varphi)\right)\cos\theta\right)\right]x_2,$$

$$\dot{x}_2 = p^{-1}B_1(\varphi)x_1 + p^{-1}[B_{12}(\varphi) + M(\varphi)]x_2, \quad \theta = \sum_{j=1}^m \varphi_j, \quad \dot{\varphi} = a(\varphi) \tag{30}$$

регулярна при будь-якій фіксованій вектор-функції $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T)$ *і довільних матрицях* $M(\varphi) \in C^0(T_m)$, $S = S^T$ $(p = \mathrm{const} > 0)$. *При цьому похідна квадратичної форми* (28) *в силу системи* (30) *є додатно визначеною.*

Оскільки в системі (30) можна довільно вибирати матрицю $M(\varphi) \in C^0(T_m)$, то, вибираючи $M(\varphi) = -B_{12}(\varphi)$, $B_1(\varphi) \equiv I_n$, $p = 1$, отримуємо систему вигляду

$$\dot{x}_1 = \left[-S\sin\theta + 2B_{12}^T(\varphi)\right]x_1 + \left(B_2(\varphi) - 0{,}5S\left(\sum_{j=1}^m a_j(\varphi)\right)\cos\theta\right)x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{31}$$

яка також є регулярною при додатно визначеній матриці $\begin{bmatrix} I_n & B_{12}(\varphi) \\ B_{12}^T(\varphi) & B_2(\varphi) \end{bmatrix}$.

При цьому легко переконатися, що похідна квадратичної форми $V = 2\langle x_1, x_2\rangle + \langle Sx_2, x_2\rangle\sin\theta$ в силу системи (31) дорівнює $\dot{V} = 2\left(\|x_1\|^2 + 2\left\langle B_{12}^T x_1, x_2\right\rangle + \langle B_2x_2, x_2\rangle\right)$, тобто є додатно визначеною.

Узагальнюючи вигляд системи (31), розглядаємо систему

$$\dot{x}_1 = M(\varphi)x_1 + \left(N(\varphi) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{L}(\varphi)}{\partial\varphi_j}a_j(\varphi)\right)x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{\varphi} = a(\varphi). \tag{32}$$

Припустимо, що матриці $M(\varphi)$, $N(\varphi)$ є неперервними, $M(\varphi)$, $N(\varphi) \in$

$\in C^0(T_m)$, матриця $L(\varphi)$ є неперервно диференційовною, $L(\varphi) \in C^1(T_m)$, причому всі матриці не обов'язково є симетричними. Має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай в системі рівнянь* (32) $(n\times n)$*-вимірні матриці* $M(\varphi)$, $N(\varphi)$, $L(\varphi)$ *такі, що складена з них наступна* $(2n\times 2n)$*-вимірна симетрична матриця*

$$\Phi = \begin{bmatrix} I_n & 0,5\left(M^T(\varphi) - L(\varphi) - L^T(\varphi)\right) \\ 0,5\left(M(\varphi) - L(\varphi) - L^T(\varphi)\right) & 0,5\left(N(\varphi) + N^T(\varphi)\right) \end{bmatrix} \tag{33}$$

є додатно визначеною. Тоді система (32) *при будь-якій вектор-функції* $a(\varphi) \in \in C_{\text{Lip}}(T_m)$ *є регулярною, тобто має єдину* $(2n\times 2n)$*-вимірну функцію Гріна – Самойленка* $G_0(\tau,\varphi)$ *з експоненціальною оцінкою.*

Доведення. Запишемо похідну квадратичної форми

$$V = \langle x_1, x_2\rangle - \langle L(\varphi)x_2, x_2\rangle \tag{34}$$

в силу системи (32). Отримуємо

$$\dot V = \left\langle \left[M(\varphi)x_1 + \left(N(\varphi) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)\right) x_2, x_2 \right]\right\rangle +$$

$$+ \langle x_1, x_1\rangle - \left\langle \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)\right) x_2, x_2 \right\rangle - \langle L(\varphi)x_1, x_2\rangle - \langle L(\varphi)x_2, x_1\rangle =$$

$$= \langle x_1, x_1\rangle + \left\langle \left(M - L - L^T\right)x_1, x_2\right\rangle + \langle Nx_2, x_2\rangle = \langle \Phi x, x\rangle.$$

Оскільки матриця (33) є додатно визначеною, то й похідна невиродженої квадратичної форми (34) в силу системи (32) є додатно визначеною. Цього досить, щоб система (32) була регулярною.

***Зауваження* 4.** Для того щоб матриця (33) була додатно визначеною, досить припустити виконання двох нерівностей

$$\langle N(\varphi)x, x\rangle \ge \gamma\|x\|^2, \quad \gamma = \text{const} > 0, \qquad \left\| M(\varphi) - L(\varphi) - L^T(\varphi)\right\| < 2\gamma^{0,5}. \tag{35}$$

Покладаючи в системі рівнянь (32) $M \equiv 0$ і $L \equiv 0$, приходимо до наступного наслідку.

Наслідок. *Нехай деяка* $(n\times n)$*-вимірна матриця* $N(\varphi) \in C^0(T_m)$ *задовольняє першу з нерівностей* (35). *Тоді система рівнянь*

$$\dot x = y,$$
$$\dot y = N(\varphi)x + f(\varphi),$$
$$\dot\varphi = a(\varphi)$$

має єдиний інваріантний тор $x = u(\varphi)$ *при кожній фіксованій вектор-функції* $f(\varphi) \in C^0(T_m)$.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
2. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665 – 1699.
3. *Бойчук А. А.* Условие существования единой функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Там же. – 2001. – **53**, № 4. – С. 556 – 559.
4. *Kenneth J. Palmer.* On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems // J. Different. Equat. – 1980. – **36**, № 3. – P. 374 – 390.

Одержано 17.05.06