УДК 519.21

Б. В. Норкин (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

О РЕШЕНИИ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

The basic actuarial integral equation satisfied by the probability of survival of an insurance company treated as a function of its initial capital is investigated. Necessary and sufficient conditions for the existence and general sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of this equation are established as well as conditions of the uniform convergence of a successive approximation method for finding the solution.

Досліджено основне інтегральне рівняння страхової математики, яке задовольняє ймовірність (не)розорення страхової компанії як функція початкового капіталу. Встановлено необхідні та достатні умови існування і загальні достатні умови існування та єдиності розв'язку цього рівняння, а також умови рівномірної збіжності методу послідовних наближень для пошуку розв'язку.

Рассмотрим случайный процесс риска (со случайными требованиями и детерминированными и случайными премиями) ξ_t, описывающий эволюцию во времени t капитала страховой компании и удовлетворяющий стохастическому уравнению [1]

$$\xi_t = u + \int_0^t c(\xi_s)ds - S_t, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $u \geq 0$ — начальный капитал; $c(\cdot)$ — неотрицательная кусочно-непрерывная функция, выражающая интенсивность поступления детерминированных премий как функцию текущего капитала; $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} z_k$ — агрегированные случайные страховые требования и премии; z_k — независимые случайные величины (требования в случае $z_k \geq 0$ или случайные премии в случае $z_k \leq 0$) с общей функцией распределения $F(z)$; N_t — число поступивших к моменту t случайных требований и премий (обычный процесс восстановления с функцией распределения времени между последовательными событиями $K(t)$). Рассмотрим вероятность банкротства страховой компании $\psi(u) = \mathrm{P}\{\exists t \geq 0 : \xi_t < 0\}$ на бесконечном интервале времени $t \in [0, +\infty)$ и соответствующую вероятность небанкротства $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ как функции начального капитала $u \geq 0$.

Определим функцию роста капитала при отсутствии страховых требований $U(u, t)$ как решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dU}{dt} = c(U), \quad U(u, 0) = u.$$

Например, если $c(\cdot) \equiv a$, то $U(u, t) = u + at$. Если капитал страховой компании хранится на депозите с непрерывной процентной ставкой δ и $c(\xi_t) \equiv \equiv a + \delta\xi_t$, $\delta > 0$, то

$$\frac{dU}{dt} = a + \delta U, \quad U(u, 0) = u,$$

и, таким образом,

$$U(u, t) = ue^{\delta t} + \frac{a}{\delta}\left(e^{\delta t} - 1\right) \geq u + (a + \delta u)t. \tag{2}$$

Предположение 1. Функция $c(\cdot) \ge 0$ и, таким образом, $U(u, t)$ не убывает по своим аргументам.

В работах [2, 3] показано, что функция вероятности неразорения $\varphi(u)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению (основному уравнению актуарной математики (см. также [4], уравнение (3.74) с $U(u, t) = u + at$ и $F(0) = 0$)):

$$\varphi(u) = A\varphi(u), \tag{3}$$

где интегральный оператор A задается выражением

$$A\varphi(u) := \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} \varphi(U(u,t) - z)\,dF(z)\,dK(t), \qquad u \ge 0. \tag{4}$$

Здесь функции $\varphi(\cdot)$, $U(\cdot,\cdot)$ предполагаются монотонными по своим аргументам, а интегралы понимаются в смысле Лебега – Стильтьеса. Это линейное однородное интегральное уравнение с оператором A с неограниченной областью интегрирования и неотрицательным ядром, оператор A определен на ограниченных неубывающих функциях $\varphi(u)$, $u \ge 0$. Уравнение (3), (4) всегда имеет тривиальное (нулевое) решение. Нас же интересует неубывающее по u решение $\varphi(u)$, $0 \le \varphi(u) \le 1$, удовлетворяющее следующему граничному условию на бесконечности:

$$\varphi(+\infty) = \lim_{u \to +\infty} \varphi(u) = 1. \tag{5}$$

Это условие означает, что при неограниченном начальном капитале страховая компания не разоряется.

В классическом случае так называемого сложного пуассоновского процесса (модель Крамера – Лундберга), когда $U(u, t) = u + at$, $K(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ и $F(z) = 0$ при $z \le 0$, задача (3) – (5) для вероятности (не)разорения сводится к решению интегрального уравнения восстановления (типа Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, см. [1, 4]). Исследованию этого случая в теории случайных блужданий и актуарной математике посвящена обширная литература (см. работу [5] и имеющуюся в ней библиографию). Однако в общем случае задача (3) – (5) не сводится к уравнению Вольтерра и требует специального изучения.

В работах [2, 3] получены достаточные условия существования и единственности решения задачи (3) – (5) и обоснован метод последовательных приближений для решения этой задачи:

$$\varphi^{k+1}(u) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} \varphi^k(U(u,t) - z)\,dF(z)\,dK(t), \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где k — номер итерации, $0 \le \varphi^0(u) \le 1$. Там же приведены результаты численных экспериментов. В [2] рассмотрен случай $K(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ (пуассоновский поток страховых требований интенсивности $\alpha > 0$), а в [3] — случай общего распределения $K(t)$. Модель (1) допускает как положительные (требования), так и отрицательные платежи (премии), приходящие в случайные моменты времени. Поэтому при $K(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ она охватывает модели со случайными премиями из [6, 7], где предполагалось $c(\cdot) \equiv 0$.

В настоящей статье обобщаются результаты работ [2, 3], а именно:

рассматривается более общая модель (1) процесса риска, допускающая как случайные требования, так и стохастические премии;

проблема существования и нахождения решения задачи (3) – (5) рассматривается с общей операторной точки зрения, для оператора A из (4) установлены свойства монотонности (лемма 1) и сжатия (следствие 3);

установлены общие необходимые и достаточные условия существования решения задачи (3) – (5) (теорема 2);

устанавливаются новые общие достаточные условия существования и единственности решения задачи (3) – (5) (следствие 5);

доказана не только поточечная, но и равномерная сходимость метода последовательных приближений (6) (теорема 4).

Обозначим через Φ (метрическое) пространство неубывающих по $u \in [0, +\infty)$ функций $\varphi(u)$ таких, что $0 \le \varphi(u) \le 1$, с расстоянием между функциями $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$:

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{u \ge 0} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)|.$$

Определим частичный порядок на Φ: $\varphi_1 \le \varphi_2$, если $\varphi_1(u) \le \varphi_2(u)$ для любого $u \ge 0$.

Лемма 1. *Линейный интегральный оператор A действует из Φ в Φ и является монотонным, т. е. для любых $\varphi_1 \le \varphi_2$ выполнено $A\varphi_1 \le A\varphi_2$, и нерастягивающим (и, следовательно, непрерывным относительно метрики $\rho(\cdot,\cdot)$):*

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \le \rho(\varphi_1, \varphi_2) \qquad \forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi.$$

Доказательство. Функция $\phi_{u,t}(z) = \varphi(U(u,t) - z)$ монотонна и ограничена, поэтому определен интеграл $\int_{-\infty}^{U(u,t)} \varphi(U(u,t) - z)\, dF(z) = \psi_u(t)$. В свою очередь, функция $\psi_u(t)$ также монотонна по t и $0 \le \psi_u(t) \le 1$, поэтому интеграл (4) существует. Для любого $\varphi(u)$, $0 \le \varphi(u) \le 1$, очевидно, $A\varphi(u) \ge 0$ и

$$A\varphi(u) \le \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} dF(z)\, dK(t) \le \int_0^{\infty} F(U(u,t))\, dK(t) \le 1.$$

Неубывание по u функции $A\varphi(u)$ следует из монотонности $U(\cdot, t)$ и $\varphi(\cdot)$. Таким образом, $A : \Phi \to \Phi$. Монотонность интегрального оператора A следует из его линейности и неотрицательности ядра. И, наконец, для любых φ_1, φ_2

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \le \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} \sup_{u \ge 0} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)|\, dF(z)\, dK(t) \le$$

$$\le \int_0^{\infty} F(U(u,t))\, dK(t)\, \rho(\varphi_1, \varphi_2) \le \rho(\varphi_1, \varphi_2)$$

и, таким образом, оператор A является нерастягивающим.

Лемма доказана.

Предположение 2. Существует неубывающая функция $\varphi_*(u)$ такая, что $0 \le \varphi_*(u) \le 1$, $\lim_{u \to +\infty} \varphi_*(u) = 1$ и $A\varphi_*(u) \ge \varphi_*(u)$.

В следующей теореме устанавливаются достаточные условия существования функции $\varphi_*(u)$, удовлетворяющей предположению 2.

Предположение 3. Существуют константы $u_* \ge 0$, $c_* \ge 0$ и $L > 0$ такие, что:

а) $U(u,t) \ge u + c_* t$ для всех $u \ge u_*$,

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{Lz}\, dF(z) \int_{0}^{+\infty} e^{-c_* Lt}\, dK(t) \le 1,$

c) $\lim_{z\to+\infty} e^{Lz}(1 - F(z)) = 0.$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 3, *тогда выполнено предположение* 2 *с функцией* $\varphi_*(u) = \max\{0,\, 1 - e^{-L(u-u_*)}\}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $A\varphi_*(u) \ge \varphi_*(u)$. Рассмотрим

$$A\varphi_*(u) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} \varphi_*(U(u,t) - z)\, dF(z)\, dK(t) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} \max\{0,\, 1 - e^{-L(U(u,t)-u_*-z)}\}\, dF(z)\, dK(t) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} \left(1 - e^{-L(U(u,t)-u_*-z)}\right) dF(z)\, dK(t).$$

Интегрируя внутренний интеграл по частям и используя $F(-\infty) = 0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} \left(1 - e^{-L(U(u,t)-u_*-z)}\right) dF(z) =$$

$$= \left(1 - e^{-L(U(u,t)-u_*-z)}\right) F(z) \Big|_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} + e^{-L(U(u,t)-u_*)} L \int_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} e^{Lz} F(z)\, dz =$$

$$= e^{-L(U(u,t)-u_*)} L \int_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} e^{Lz} F(z)\, dz.$$

Преобразуем

$$L \int_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} e^{Lz} F(z)\, dz = L \int_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} e^{Lz} (1 - (1 - F(z)))\, dz =$$

$$= e^{L(U(u,t)-u_*)} - L \int_{-\infty}^{U(u,t)-u_*} e^{Lz} (1 - F(z))\, dz \ge$$

$$\ge e^{L(U(u,t)-u_*)} - L \int_{-\infty}^{+\infty} e^{Lz} (1 - F(z))\, dz =$$

$$= e^{L(U(u,t)-u_*)} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{Lz}\, dF(z).$$

Таким образом, при $u \ge u_*$ с учетом предположения 3a

$$A\varphi_*(u) \geq \int\limits_0^{+\infty} dK(t) e^{-L(U(u,t)-u_*)} \left(e^{L(U(u,t)-u_*)} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{Lz}\, dF(z) \right) =$$

$$= 1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{Lz}\, dF(z) \int\limits_0^{+\infty} e^{-L(U(u,t)-u_*)} dK(t) \geq$$

$$\geq 1 - e^{-L(u-u_*)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{Lz}\, dF(z) \int\limits_0^{+\infty} e^{-c_* Lt} dK(t) \geq 1 - e^{-L(u-u_*)},$$

и так как $A\varphi_* \geq 0$, то для всех $u \geq 0$ будет $A\varphi_*(u) \geq \max\{0, 1 - e^{-L(u-u_*)}\} = \varphi_*(u)$.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** В работах [2, 3] роль $\varphi_*(u)$ играла граница Крамера – Лундберга $\varphi_*(u) = 1 - e^{-Lu}$, где L — некоторая положительная константа (Лундберга).

***Замечание* 2.** Если страховые требования ограничены с вероятностью 1, т. е. $F(z) = 1$ при всех достаточно больших z, то условие 3c заведомо выполнено, а условие 3b выполнено с любым $c_* > \max\{0, \bar{z}/\tau\}$ при $\bar{z} \geq 0$ и с любым $c_* \geq 0$ при $\bar{z} < 0$, где $\bar{z} = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, dF(z)$ — среднее значение платежей, $\tau = \int_0^{+\infty} t\, dK(t)$ — среднее время между платежами. Для $U(u, t)$ вида (2) заведомо существуют $u_* \geq 0$ и $c_* > 0$ такие, что $c_* > \max\{0, \bar{z}/\tau\}$ и $U(u, t) \geq u + c_* t$ для всех $u \geq u_*$, и, таким образом, выполнено условие 3a.

Определим подмножество $\Phi^* \subset \Phi$ неубывающих функций $\varphi(u): [0, +\infty) \to [0, 1]$ таких, что $\varphi_*(u) \leq \varphi(u) \leq 1$, где $\varphi_*(u)$ удовлетворяет предположению 2.

Лемма 2. $A: \Phi^* \to \Phi^*$.

Утверждение леммы очевидным образом следует из леммы 1 и предположения 2.

В силу леммы 1 оператор $A: \Phi \to \Phi$ является нерастягивающим, но, вообще говоря, не является сжимающим на множестве функций Φ, поэтому мы не можем использовать принцип сжимающих отображений. Хотя $A: \Phi^* \to \Phi^*$, причем множество Φ^* является компактом относительно топологии поточечной сходимости (в силу второй теоремы Хелли), этого также не достаточно для доказательства существования неподвижной точки A в Φ^*, т. е. решения задачи (3) – (5). Следующая теорема устанавливает существование решения задачи (3) – (5), основываясь на свойстве монотонности оператора $A: \Phi^* \to \Phi^*$.

Теорема 2 (о необходимых и достаточных условиях существования решения). *Пусть выполнено предположение* 1. *Для существования решения задачи* (3) – (5) *необходимо и достаточно существования функции* $\varphi_*(u)$, *удовлетворяющей предположению* 2.

Доказательство. *Необходимость* очевидна, в качестве $\varphi_*(u)$ можно взять любое решение задачи (3) – (5). Докажем *достаточность* путем построения последовательности функций, поточечно сходящейся к решению задачи. А именно, рассмотрим последовательность приближений

$$\left\{\varphi^{k+1}(u) = A\varphi^k(u),\ \varphi^0(u) \equiv 1,\ k = 0, 1, \ldots\right\}.$$

В силу монотонности $U(\cdot, t)$ все функции $\varphi^k(u)$ не убывают по u. Докажем по индукции, что последовательность $\left\{\varphi^k(u),\ k = 0, 1, \ldots\right\}$ монотонно убывает. Действительно,

$$\varphi^1(u) = A\varphi^0(u) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{U(u,t)} dF(z)dK(t) = \int_0^\infty F(U(u,t))dK(t) \le 1 = \varphi^0(u).$$

В силу монотонности оператора A из предположения $\varphi^k(u) \le \varphi^{k-1}(u)$ следует

$$\varphi^{k+1}(u) = A\varphi^k(u) \le A\varphi^{k-1}(u) = \varphi^k(u).$$

Аналогично, по индукции доказывается, что $\varphi^k(u) \ge \varphi_*(u)$ для всех k. Действительно, $\varphi^0(u) \equiv 1 \ge \varphi_*(u)$. Из предположения $\varphi^k(u) \ge \varphi_*(u)$ в силу монотонности оператора A следует

$$\varphi^{k+1}(u) = A\varphi^k(u) \ge A\varphi_*(u) \ge \varphi_*(u).$$

Таким образом, последовательность функций $\{\varphi^k(u)\}$ монотонно убывает и ограничена снизу функцией $\varphi_*(u)$. Поэтому существует предельная функция $\varphi(u) = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi^k(u)$, которая, как и все $\varphi^k(u)$, не убывает по u, $1 \ge \varphi(u) \ge \ge \varphi_*(u)$, и, таким образом, $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi(u) = 1$. Перейдем к пределу по k в (6). В силу теоремы Лебега можно внести предел под знак интегрального оператора. Таким образом, предельная функция $\varphi(u)$ удовлетворяет уравнению (3).

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *При выполнении предположений* 1, 2 *последовательность приближений* $\{\varphi^k(u)\}$, *построенная согласно* (6) *и начинающаяся с* $\varphi^0(u) \equiv \equiv 1$, *монотонно убывает и поточечно сходится сверху к некоторому решению задачи* (3) – (5).

***Следствие* 2.** *В предположениях* 1, 2 *последовательность приближений* $\{\varphi^k(u)\}$, *начинающаяся с* $\varphi^0(u) = \varphi_*(u)$, *монотонно возрастает и поточечно сходится снизу к некоторому решению задачи* (3) – (5).

Для того чтобы гарантировать единственность решения задачи (3) – (5), сделаем дополнительные предположения относительно оператора A.

Предположение 4. *Функции* $U(u, t)$, $F(z)$, $K(t)$ *в операторе* A *удовлетворяют одному из условий*:

a) $F(z) < 1\ \forall z$;

b) $F(z) > 0\ \forall z$;

c) $K(t) < 1\ \forall t \ge 0$, $F(z) = 1\ \forall z \ge \bar{z} \ge 0$ *и* $\lim_{t\to+\infty} U(0,t) = +\infty$.

Следующая лемма показывает, что при предположениях 1, 2, 4 оператор A имеет определенное сжимающее свойство на $\Phi^* \subset \Phi$, откуда следует (следствие 3), что он является неравномерно сжимающим на Φ^*. Неравномерного сжатия не достаточно для существования решения задачи (3) – (5), поэтому существование независимо доказано в теореме 2. Для доказательства единственности решения достаточно свойства неравномерного сжатия (следствие 4).

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения* 1, 2, 4. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

существует $q^*(\varepsilon)$, $0 \le q^*(\varepsilon) < 1$, *такое, что для любых* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^*$ *с расстоянием* $\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \ge \varepsilon$ *будет*

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \le q^*(\varepsilon) \cdot \rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Доказательство. Сначала докажем лемму в предположении 4a. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдем число $u^*(\varepsilon) \ge 0$ такое, что $1 - \varphi_*(u) \le \varepsilon/2$ для всех $u \ge u^*(\varepsilon)$. Положим

$$q^*(\varepsilon) = \int\limits_0^\infty F(U(u^*(\varepsilon), t))\,dK(t). \tag{7}$$

Поскольку $F(\cdot) < 1$ и $\int_0^\infty dK(t) = 1$, то $q^*(\varepsilon) < 1$. Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^*$ таковы, что $\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \ge \varepsilon$. По определению, существует последовательность $\{u^s\}$ такая, что

$$\lim_{s \to +\infty} \left| A\varphi_1(u^s) - A\varphi_2(u^s) \right| = \rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \ge \varepsilon > 0.$$

Так как $\varphi_*(u^s) \le A\varphi_1(u^s) \le 1$ и $\varphi_*(u^s) \le A\varphi_2(u^s) \le 1$, для достаточно больших s

$$\varepsilon/2 < \left| A\varphi_1(u^s) - A\varphi_2(u^s) \right| \le 1 - \varphi_*(u^s).$$

Отсюда следует, что $u^s \le u^*(\varepsilon)$ при всех достаточно больших s. Для больших индексов s справедлива оценка

$$\left| A\varphi_1(u^s) - A\varphi_2(u^s) \right| \le \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^{U(u^s,t)} \left| \varphi_1(U(u^s,t) - z) - \varphi_2(U(u^s,t) - z) \right| dF(z)\,dK(t) \le$$

$$\le \rho(\varphi_1, \varphi_2) \int\limits_0^\infty F(U(u^s, t))\,dK(t) \le \rho(\varphi_1, \varphi_2) \int\limits_0^\infty F(U(u^*(\varepsilon), t))\,dK(t).$$

Переходя здесь к пределу по s, получаем утверждение леммы.

Докажем лемму в предположении 4b. В силу леммы 1 $\rho(\varphi_1, \varphi_2) \ge \rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \ge \varepsilon$. Используя $|\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \le 1 - \varphi_*(u)$, получаем оценки

$$|A\varphi_1(u) - A\varphi_2(u)| \le \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{U(u,t)} |\varphi_1(U(u,t) - z) - \varphi_2(U(u,t) - z)|\,dF(z)\,dK(t) \le$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{U(u,t)} \min\{\rho(\varphi_1, \varphi_2),\, 1 - \varphi_*(U(u,t) - z)\}\,dF(z)\,dK(t) \le$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \min\{\rho(\varphi_1, \varphi_2),\, 1 - \varphi_*(\max\{0, -z\})\}\,dF(z)\,dK(t) \le$$

$$\le \rho(\varphi_1, \varphi_2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \min\{1,\, (1 - \varphi_*(\max\{0, -z\}))/\varepsilon\}\,dF(z).$$

В сделанных предположениях $q(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{1, (1-\varphi_*(\max\{0, -z\}))/\varepsilon\} dF(z) <$ < 1. Отсюда следует утверждение леммы.

Теперь докажем лемму в предположении 4с. Итак, пусть $K(\cdot) < 1$ и $F(z) =$ $= 1$ для $z \geq \bar{z} \geq 0$. Очевидно, $|\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \leq 1 - \varphi_*(u)$. Тогда для любого $u \geq 0$ справедливы оценки

$$|A\varphi_1(u) - A\varphi_2(u)| \leq \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} |\varphi_1(U(u,t) - z) - \varphi_2(U(u,t) - z)| dF(z) dK(t) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{U(u,t)} \min\{\rho(\varphi_1, \varphi_2), 1 - \varphi_*(U(u,t) - z)\} dF(z) dK(t) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\min\{U(u,t), \bar{z}\}} \min\{\rho(\varphi_1, \varphi_2), 1 - \varphi_*(U(u,t) - z)\} dF(z) dK(t) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\min\{U(u,t), \bar{z}\}} \min\{\rho(\varphi_1, \varphi_2), 1 - \varphi_*(\max\{0, U(u,t) - \bar{z}\})\} dF(z) dK(t) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \min\{\rho(\varphi_1, \varphi_2), 1 - \varphi_*(\max\{0, U(u,t) - \bar{z}\})\} F(\min\{U(u,t), \bar{z}\}) dK(t) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \min\{\rho(\varphi_1, \varphi_2), 1 - \varphi_*(\max\{0, U(u,t) - \bar{z}\})\} dK(t).$$

В силу леммы 1 $\rho(\varphi_1, \varphi_2) \geq \rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \geq \varepsilon$, тогда

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq \rho(\varphi_1, \varphi_2) \int_0^{+\infty} \min\{1, (1 - \varphi_*(\max\{0, U(0,t) - \bar{z}\}))/\varepsilon\} dK(t).$$

Но так как по предположению $U(0,t) \to +\infty$, то $(1 - \varphi_*(\max\{0, U(0,t) - \bar{z}\})) \to$ $\to 0$ при $t \to +\infty$ и, таким образом, $\min\{1, (1 - \varphi_*(\max\{0, U(0,t) - \bar{z}\}))/\varepsilon\} <$ < 1 для всех достаточно больших t. Отсюда с учетом $\int_0^{+\infty} dK(t) = 1$ следует

$$q(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \min\{1, (1 - \varphi_*(\max\{0, U(0,t) - \bar{z}\}))/\varepsilon\} dK(t) < 1.$$

Лемма доказана.

***Следствие* 3** (о неравномерном сжатии). *В предположениях* 1, 2, 4 *для любых* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^*$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, *имеет место*

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) < \rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

***Следствие* 4.** *В предположениях* 1, 2, 4 *существует единственное решение* $\varphi(u)$ *задачи* (3) – (5) *на множестве* Φ^*.

Следствие 4 еще не исключает существование других решений задачи (3) – (5) на более широком множестве $\Phi \supset \Phi^*$.

Теорема 3. *В предположениях* 1, 4 *может существовать только одно решение задачи* (3) – (5).

Доказательство. Предположим противное, пусть существуют два решения $\varphi_1 \neq \varphi_2$ (т. е. $\varphi_1(u) \neq \varphi_2(u)$ для некоторого $u \geq 0$) задачи (3) – (5). Положим $\varphi^0(u) = \max\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\}$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi^k(u) := A\varphi^k(u),\ k = 0, 1, \ldots\}$. Очевидно, $1 \geq \varphi^0(u) \geq \varphi_1(u)$ и $1 \geq \varphi^0(u) \geq \varphi_2(u)$. В силу леммы 1 и монотонности оператора A выполнено $1 \geq \varphi^1(u) = A\varphi^0(u) \geq A\varphi_1(u) = \varphi_1(u)$, $1 \geq \varphi^1(u) = A\varphi^0(u) \geq A\varphi_2(u) = \varphi_2(u)$ и, таким образом, $\varphi^1(u) \geq \max\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\} = \varphi^0(u)$. Отсюда в силу монотонности A по индукции следует, что $\varphi^{k+1}(u) \geq \varphi^k(u) \geq \varphi^0(u)$ для всех $k \geq 0$. Последовательность $\{\varphi^k(\cdot)\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху единицей, поэтому она имеет поточечный предел $\varphi(u)$, $1 \geq \varphi(u) \geq \varphi^0(u)$, который является решением уравнения (3), (4) в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Очевидно, полученная функция $\varphi(u)$ является решением задачи (3) – (5), отличным хотя бы от одного из решений φ_1 или φ_2, например от φ_1. Возьмем функцию $\varphi_*(u) = \varphi_1(u)$, она удовлетворяет предположению 2. Тогда на соответствующем множестве Φ^* имеем два различных решения задачи (3) – (5), $\varphi(u)$ и $\varphi_1(u)$, что противоречит следствию 4.

Теорема доказана.

***Следствие* 5** (достаточные условия существования и единственности решения). *В предположениях* 1, 2 (*или* 3), 4 *существует единственное решение задачи* (3) – (5).

***Следствие* 6** (сходимость метода последовательных приближений). *В предположениях* 1, 2, 4 *при любом начальном приближении* $\varphi^0 \in \Phi^*$ *последовательность* $\{\varphi^k(u),\ k = 0, 1, \ldots\}$, *порожденная алгоритмом* (6), *поточечно сходится к решению задачи* (3) – (5).

***Замечание* 3.** Следствия 1, 2, 4, 6 доказаны в [2, 3] с использованием конкретной функции $\varphi_*(u) = 1 - e^{-Lu}$ с некоторой константой $L > 0$, т. е. доказано существование и единственность решения задачи (3) – (5) на конкретном подмножестве $\Phi^* \subset \Phi$.

Оказывается, что при сделанных предположениях имеет место не только поточечная, но и равномерная сходимость последовательности приближений (6) к решению задачи (3) – (5). Заметим при этом, что решение $\varphi(u)$ задачи (3) – (5) может быть и разрывной функцией при разрывной функции $K(t)$ (см. [6]).

Теорема 4 (о равномерной сходимости и скорости сходимости метода последовательных приближений). *В предположениях* 1, 2 (*или* 3), 4 *метод последовательных приближений* (6), *стартующий с начального приближения* $\varphi^0(u)$ *такого, что* $\varphi_*(u) \leq \varphi^0(u) \leq 1$, *равномерно монотонно сходится к решению* $\varphi(u)$ *задачи* (3) – (5), *т. е.* $\rho(\varphi^k, \varphi) = \sup_{u \geq 0} \left|\varphi^k(u) - \varphi(u)\right|$ *монотонно стремится к нулю, и более того, метод* (6) *равномерно сходится в любую* ε*-окрестность решения задачи* (3) – (5) *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* $q(\varepsilon)$, *зависящим от* ε, *т. е.*

$$\rho(\varphi^k, \varphi) \leq (q(\varepsilon))^k \rho(\varphi^0, \varphi), \qquad 0 \leq q(\varepsilon) < 1,$$

для всех k *таких, что* $\rho(\varphi^k, \varphi) \geq \varepsilon$.

Доказательство. В силу теоремы 2 и следствия 5 решение $\varphi(u)$ задачи

(3) – (5) существует и единственно. Из леммы 1 следует, что последовательность $\rho(\varphi^k, \varphi)$ монотонно убывает, а согласно лемме 3 для любого $\varepsilon > 0$ существует $q(\varepsilon)$, $0 \le q(\varepsilon) < 1$, такое, что для всех k таких, что $\rho(\varphi^k, \varphi) \ge \varepsilon$, выполнено $\rho(\varphi^k, \varphi) \le q(\varepsilon)\rho(\varphi^{k-1}, \varphi) \le (q(\varepsilon))^k \rho(\varphi^0, \varphi)$. Остается показать, что $\lim_{k\to\infty}\rho(\varphi^k, \varphi) = 0$. Предположим противное, что $\lim_{k\to\infty}\rho(\varphi^k, \varphi) = \varepsilon > > 0$. Тогда в силу предыдущего для всех k имеет место $\varepsilon \le \rho(\varphi^k, \varphi) \le \le (q(\varepsilon))^k \rho(\varphi^0, \varphi)$, что невозможно для достаточно больших k.

Теорема доказана.

1. *Beard R. E., Pentikäinen T., Pesonen E.* Risk theory. The stochastic basis of insurance. – 3-rd ed. – London; New York: Chapman and Hall, 1984. – 408 p.
2. *Норкин Б. В.* Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений теории процессов риска // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 4. – С. 10 – 18.
3. *Норкин Б. В.* О вычислении вероятности банкротства непуассоновского процесса риска методом последовательных приближений // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 2. – С. 133 – 144.
4. *Леоненко М. М., Мішура Ю. С., Пархоменко Я. М., Ядренко М. Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – Київ: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
5. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: World Sci., 2000. – 385 p.
6. *Бойков А. В.* Модель Крамера – Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. – 2002. – **47**, вып. 3. – С. 549 – 553.
7. *Жилина Л. С.* Оценка вероятности разорения страховой компании для некоторой модели страхования // Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика (Донецк). – 2000. – № 1. – С. 67 – 78.

Получено 30.03.06