УДК 517.51

О. О. Карлова, В. К. Маслюченко (Чернів. нац. ун-т)

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В НЕ ЛОКАЛЬНО ОПУКЛИХ ПРОСТОРАХ

We prove that the collection (X, Y, Z) is the Lebesgue triple if X is a metrizable space, Y is a perfectly normal space, and Z is a strongly σ-metrizable topological vector space with stratification $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$, where, for every $m \in \mathbb{N}$, Z_m is a closed metrizable separable subspace of Z arcwise connected and locally arcwise connected.

Доказано, что для метризуемого пространства X, совершенно нормального пространства Y и сильно σ-метризуемого топологического векторного пространства Z, имеющего исчерпывание, которое состоит из замкнутых метризуемых сепарабельных линейно связных и локально линейно связных подпространств Z_m пространства Z, набор (X, Y, Z) является тройкой Лебега.

1. Для топологічних просторів X і Y позначимо через $B_1(X,Y)$ сукупність всіх функцій $f\colon X \to Y$ першого класу Бера, тобто поточкових границь послідовностей неперервних функцій $f_n\colon X \to Y$. Якщо Z — ще один топологічний простір, то $CC(X \times Y, Z)$ — це сукупність всіх нарізно неперервних відображень $f\colon X \times Y \to Z$. Набір (X, Y, Z) топологічних просторів ми називаємо *трійкою Лебега*, якщо виконується включення $CC(X \times Y, Z) \subset B_1(X \times Y, Z)$.

А. Лебег у своїй першій друкованій праці [1] показав, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ є трійкою Лебега. У 1981 р. В. Рудін [2] довів, що набір (X, Y, Z) є трійкою Лебега, якщо X — метризовний простір, Y — топологічний простір і Z — локально опуклий простір. Природно постало питання: чи можна в теоремі Рудіна позбавитися від умови локальної опуклості топологічного векторного простору Z? Розвиваючи метод Лебега, в [3] показано, що $CC(\mathbb{R} \times Y, Z) \subseteq B_1(\mathbb{R} \times Y, Z)$, якщо Y — топологічний простір і Z — топологічний векторний простір. Далі в [4] з'ясовано, що при цих же умовах на простори Y та Z набір $(\mathbb{R}^m, Y, Z)$ є трійкою Лебега. Застосовуючи метод Рудіна, що спирається на теорему Стоуна про паракомпактність метризовного простору і як основний технічний засіб використовує розбиття одиниці, у [5] показано, що умову локальної опуклості простору Z можна зняти у тому випадку, коли X — метризовний простір зі скінченною вимірністю Лебега – Чеха. Т. Банах [6] довів, що (X, Y, Z) є трійкою Лебега, якщо X — метрично чверть-вичерпний паракомпактний сильно зліченновимірний простір, Y — топологічний простір і Z — рівномірно зв'язний простір. Нарешті, в [7] встановлено, що $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$ у випадку, коли X — метризовний простір, Y — топологічний простір і Z — метризовний сепарабельний топологічний векторний простір.

Незважаючи на пераховані вище значні просування в напрямку розв'язання поставленої проблеми, вона все ще залишається відкритою. У зв'язку з цим автори звернули увагу на один клас не локально опуклих просторів, який був уведений у [8]. А саме, там на просторі ℓ_p всіх сумовних з p-м степенем послідовностей скалярів було побудовано строго зростаючу сім'ю $(\kappa_s\colon 0 < s \le p)$ лінійних гаусдорфових топологій, причому для $0 < s < 1$ і $s \le p$ топології κ_s не є локально опуклими. Отже, виникло питання: чи (X, Y, Z) є трійкою Лебега, якщо X — метричний простір, Y — топологічний простір і $Z = (\ell_p, \kappa_s)$? В процесі дослідження цього питання було з'ясовано, що простір $Z = (\ell_p, \kappa_s)$ сильно σ-метризовний, причому його вичерпування будуть утворювати кулі $B_m = \{ x \in \ell_p\colon \|x\|_p \le m \}$, які є замкненими метризовними сепарабельними лінійно зв'язними і локально лінійно зв'язними підпросторами простору Z. Використовуючи узагальнення одного результату Фосґерау [9], що було анонсовано в [10] (доведення див. в [11]), ми в цій статті встановлюємо, що для метризовного простору X, досконало нормального простору Y і сильно σ-метризовного топологічного векторного простору Z, який має вичерпування, що складається з замкнених метризовних сепарабельних лінійно зв'язних і локально лінійно зв'язних підпросторів Z_m простору Z, набір (X, Y, Z) є трійкою Лебега.

2. Розглянемо на просторі ℓ_p, $0 < p < \infty$, топологію, породжену набором переднорм

$$\| x \|_y = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k \eta_k |^s \right)^{1/s}$$

при $1 \le s < p$ і набором s-переднорм

$$| x |_y = \sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k \eta_k |^s$$

при $0 < s < 1$ і $s < p$, де $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$, $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^+$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$ і $\ell_q^+ = \{ y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q \colon \eta_k \ge 0 \text{ для кожного } k \}$. Базу околів нуля в цій топології утворюють множини

$$U_y = \left\{ x \in \ell_p \colon | x |_y \le 1 \right\}, \quad y \in \ell_q^+.$$

Будемо позначати таку топологію символом κ_s. Для елемента $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору ℓ_p покладемо $\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k |^p \right)^{1/p}$.

Нагадаємо, що топологічний простір Z називається σ-*метризовним*, якщо його можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_m, і *сильно* σ-*метризовним*, якщо до того ж кожна збіжна в Z послідовність точок z_k цілком міститься у деякому дограничному просторі Z_m. Таку послідовність підпросторів Z_m називають вичерпуванням простору Z.

Теорема 1. *Простір ℓ_p з топологією κ_s при $0 < s < p$ є сильно σ-метризовним з вичерпуванням $B_m = \{ x \in \ell_p \colon \| x \|_p \le m \}$ при $m = 1, 2, \ldots$.*

Доведення. Нехай $r > 0$ і $B = \{ x \in \ell_p \colon \| x \|_p \le r \}$. Доведемо, що підпростір B простору (ℓ_p, κ_s) є метризовним. Доведення будемо проводити для випадку $s \le 1$, який нас найбільше цікавить. У випадку $s > 1$ у міркування треба внести незначні технічні зміни. Крім того, для простоти вважатимемо, що поле скалярів — це числова пряма $\mathbb{R}$.

Візьмемо зліченну множину

$$E = \left\{ z = (\zeta_k)_{k=1}^{\infty} \colon (\exists n \in \mathbb{N}) \ (\zeta_k = 0 \text{ при } k > n \text{ і } \zeta_k \in \mathbb{Q}) \right\} = \{ z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots \}$$

і визначимо на (ℓ_p, κ_s) функцію

$$| x | = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{| x |_{z_m}}{2^m \left(1 + | x |_{z_m} \right)}.$$

Легко перевірити, що $d(x', x'') = | x' - x'' |$ — метрика на (ℓ_p, κ_s). Доведемо, що ця метрика і топологія κ_s індукують на B одну і ту ж топологію. Для цього досить перевірити, що кожний окіл нуля в $\left(B, \kappa_s|_B\right)$ є околом нуля в метричній топології на B і навпаки.

Нехай $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^+$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{s}$ і

$$U = \left\{x \in B\colon |x|_y \le 1\right\}.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^q$ є збіжним, то існує такий номер n, що

$$r^s \left(\sum_{k>n}^{\infty} \eta_k^q\right)^{s/q} \le \frac{1}{2}.$$

Далі, візьмемо раціональні числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ такі, що

$$r^s \sum_{k=1}^{n} |\eta_k - \zeta_k|^s \le \frac{1}{4}.$$

Точка $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, 0, 0, \ldots)$ належить до множини E, тому існує номер m такий, що $z = z_m$.

Розглянемо кулю

$$V = \left\{x \in B\colon d(x, 0) \le \frac{1}{5 \cdot 2^m}\right\}$$

і покажемо, що $V \subseteq U$. Припустимо, що $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in V$. Оцінимо $|x|_y$, використавши нерівність Гельдера з показниками p/s і q/s:

$$|x|_y = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k|^s = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k|^s + \sum_{k>n} |\xi_k \eta_k|^s \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k|^s + \left(\sum_{k>n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{s}{p}} \left(\sum_{k>n} \eta_k^q\right)^{\frac{s}{q}} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k|^s + \left(\sum_{k>n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{s}{p}} \frac{1}{2r^s}.$$

З того, що $x \in B$, випливає, що $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \le r^p$, тому

$$|x|_y \le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k|^s + r^s \cdot \frac{1}{2r^s} = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k|^s + \frac{1}{2}.$$

Крім того,

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k|^s \le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k (\eta_k - \zeta_k)|^s + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \zeta_k|^s \le$$

$$\le r^s \sum_{k=1}^{n} |\eta_k - \zeta_k|^s + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \zeta_k|^s \le \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \zeta_k|^s.$$

Оскільки $x \in V$, то

$$\frac{|x|_{z_m}}{2^m\left(1+|x|_{z_m}\right)} \leq d(x,0) \leq \frac{1}{5\cdot 2^m},$$

звідки $\dfrac{|x|_{z_m}}{1+|x|_{z_m}} \leq \dfrac{1}{5}$ і $|x|_{z_m} \leq \dfrac{1}{4}$.

Враховуючи, що $\sum_{k=1}^{n}|\xi_k\zeta_k|^s = |x|_{z_m}$, маємо

$$|x|_y \leq \frac{1}{4} + |x|_{z_m} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

Таким чином, $x \in U$.

Навпаки, нехай $V = \{x \in B\colon d(x,0) \leq \varepsilon\}$ — базисний окіл нуля в метричній топології на B з $0 < \varepsilon < 1$ і $\delta = \dfrac{\varepsilon/2}{1-\varepsilon/2}$. Візьмемо номер n настільки великим, щоб $\sum_{m>n}\dfrac{1}{2^m} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Нехай $z_m = (\zeta_{m,k})_{k=1}^{\infty}$ для $m = 1, \ldots, n$, де $\zeta_{m,k} = 0$ при $k > k_m$. Покладемо $N = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ і $\eta_k = \max\limits_{1\leq m\leq n}\left|\zeta_{m,k}\right|$ при $k \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що $\eta_k = 0$ при $k > N$. Розглянемо $y = \left(\dfrac{1}{\delta^{1/s}}\eta_k\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^+$ і покажемо, що $U_y = \{x \in B\colon |x|_y \leq 1\} \subseteq V$. Якщо $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in U_y$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k\frac{1}{\delta^{1/s}}\eta_k\right|^s = \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{N}|\xi_k\eta_k|^s \leq 1,$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{N}|\xi_k\eta_k|^s \leq \delta.$$

Тоді для кожного $m = 1, \ldots, n$ маємо

$$|x|_{z_m} = \sum_{k=1}^{N}\left|\xi_k\zeta_{m,k}\right|^s \leq \sum_{k=1}^{N}|\xi_k\eta_k|^s \leq \delta.$$

Таким чином,

$$|x| = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{|x|_{z_m}}{2^m\left(1+|x|_{z_m}\right)} \leq \sum_{m=1}^{n}\frac{|x|_{z_m}}{2^m\left(1+|x|_{z_m}\right)} + \sum_{m>n}\frac{1}{2^m} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n}\frac{\delta}{2^m(1+\delta)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

отже, $x \in V$.

Легко перевірити, що куля B є замкненою в просторі (ℓ_p, κ_s). Справді, топологія κ_s мажорує топологію покоординатної збіжності, а куля B є замкненою в топології покоординатної збіжності. Таким чином, кулі B_m при $m = 1, 2, \ldots$ метризовні в топології κ_s, замкнені у просторі (ℓ_p, κ_s), причому $B_m \subseteq B_{m+1}$ і $\ell_p = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$.

Залишилось довести, що кожна збіжна в (ℓ_p, κ_s) послідовність лежить в якійсь кулі B_m. Нехай $\{z_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell_p$ і $z_n \to 0$ в (ℓ_p, κ_s). Покажемо, що

$|z_n|^s \to 0$ в слабкій топології простору $\ell_{p/s}$, де для послідовності $z = (\zeta_k)_{k=1}^{\infty}$ через $|z|^s$ позначається послідовність $\left(|\zeta_k|^s\right)_{k=1}^{\infty}$. Справді, візьмемо довільне $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q/s}$, $\dfrac{1}{p/s} + \dfrac{1}{q/s} = 1$. Очевидно, що $\tilde{y} = \left(|\eta_k|^{1/s}\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^+$. Тоді, враховуючи, що $z_n \to 0$ в (ℓ_p, κ_s), маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| |\eta_k|^{1/s} \zeta_{n,k} \right|^s = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \left|\zeta_{n,k}\right|^s \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

отже, $|z_n|^s$ слабко збігається до нуля у просторі $\ell_{p/s}$. Звідси згідно з [12, с. 118] випливає, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_p < \infty$. Таким чином, існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що $\{z_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_m$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що куля $B = \{x \in \ell_p\colon \|x\|_p \le r\}$ є лінійно зв'язною і локально лінійно зв'язною в (ℓ_p, κ_s), тому що топологія κ_s лінійна. Крім того, підпростір B простору (ℓ_p, κ_s) є сепарабельним, оскільки фінітні послідовності з B з раціональними координатами утворюють щільну в B зліченну підмножину.

3. Для відображення $f\colon X\times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ будемо використовувати стандартні позначення $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$.

Твердження 1. *Нехай X — метризовний простір, Y — топологічний простір, Z — сильно σ-метризовний простір із вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ і $f \in CC(X\times Y, Z)$. Тоді існує зростаюча послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених в $X\times Y$ множин така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X\times Y$ і $f(F_n) \subseteq Z_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо відкрите покриття $(U_{m,x}\colon x \in X)$ простору X відкритими кулями $U_{m,x}$ із центром у точці x і радіусом $\dfrac{1}{m}$. Згідно з [13, с. 446] для кожного m існує локально скінченне замкнене покриття $(V_{m,x}\colon x\in X)$ простору X таке, що $V_{m,x} \subseteq U_{m,x}$ для кожного $x \in X$. Покладемо $I_m = \{x \in X\colon V_{m,x} \ne \varnothing\}$. Зрозуміло, що $\operatorname{diam} V_{m,i} \le \dfrac{2}{m}$ для кожного $i \in I_m$, причому $X = \bigcup_{i\in I_m} V_{m,i}$.

Для кожної пари $(m, i) \in \mathrm{N}\times I_m$ виберемо точку $x_{m,i} \in V_{m,i}$ і покладемо $A_{m,n,i} = (f^{x_{m,i}})^{-1}(Z_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$B_{m,n} = \bigcup_{i\in I_m} (V_{m,i} \times A_{m,n,i}), \qquad B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m,n}.$$

Оскільки відображення f є неперервним відносно другої змінної, то для кожного n множина $A_{m,n,i}$ є замкненою в Y для всіх $m \in \mathbb{N}$ та $i \in I_m$. Згідно з [13, с. 40] множина $B_{m,n}$ є замкненою в $X\times Y$, оскільки система $\{V_{m,i} \times A_{m,n,i}\colon i \in I_m\}$ локально скінченна в $X\times Y$. Тоді і множина B_n буде замкненою в $X \times Y$ для кожного n.

Доведемо, що $f(B_n) \subseteq Z_n$ для кожного n. Зафіксуємо номер $n\in\mathbb{N}$ і точку $(x, y) \in B_n$. Тоді існує послідовність $(i_m)_{m=1}^{\infty}$ така, що $x \in V_{m,i_m}$ і $f(x_{m,i_m}, y) \in Z_n$. З того, що $\operatorname{diam} V_{m,i_m} \underset{m\to\infty}{\to} 0$, випливає, що $x_{m,i_m} \underset{m\to\infty}{\to} x$.

Оскільки f є неперервним відносно першої змінної, то $f(x_{m,i_m}, y) \underset{m\to\infty}{\to} f(x, y)$. Множина Z_n замкнена, тому $f(x, y) \in Z_n$.

Покажемо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \times Y$. Нехай $(x, y) \in X \times Y$. Тоді існує послідовність $(i_m)_{m=1}^{\infty}$ така, що $x \in V_{m,i_m}$. Оскільки $x_{m,i_m} \underset{m\to\infty}{\to} x$, то $f(x_{m,i_m}, y) \underset{m\to\infty}{\to}$ $\underset{m\to\infty}{\to} f(x, y)$. З того, що простір Z є сильно σ-метризовним, випливає, що існує номер n такий, що $\{ f(x_{m,i_m}, y) \colon m \in \mathbb{N} \} \subseteq Z_n$, тобто $y \in A_{m,n,i}$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Таким чином, $(x, y) \in B_n$.

Покладемо $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Тоді $X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ і $f(F_n) \subseteq Z_n$, адже послідовність $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ є зростаючою. Крім того, множини F_n замкнені в $X \times Y$.

4. Будемо позначати через $H_1(X, Y)$ сукупність усіх відображень $f\colon X \to Y$ *першого класу Лебега*, для яких прообраз $f^{-1}(F)$ є G_δ-множиною в X для довільної замкненої в Y множини F.

Множину $A \subseteq X$ називатимемо *функціональною F_σ-множиною* (*функціональною G_δ-множиною*), якщо вона подається у вигляді зліченного об'єднання (перетину) функціонально замкнених (відкритих) в X множин. Множину A будемо називати *функціонально двосторонньою*, якщо вона водночас є функціональною типу F_σ і функціональною типу G_δ в X. Через $H_1^*(X, Y)$ будемо позначати сукупність усіх відображень $f\colon X \to Y$ *першого функціонального класу Лебега*, для яких прообраз $f^{-1}(F)$ є функціональною G_δ-множиною в X для довільної замкненої в Y множини F. Зрозуміло, що $H_1^*(X, Y) \subseteq$ $\subseteq H_1(X, Y)$, причому для досконало нормального простору X ці класи збігаються.

Лема. *Нехай X — топологічний простір, Z — топологічний векторний простір, $F_1, \ldots, F_n$ — диз'юнктні функціонально замкнені в X множини і відображення $g_i\colon X \to Z$ неперервні для кожного $i = 1, \ldots, n$. Тоді існує неперервне відображення $g\colon X \to Z$ таке, що $g(x) = g_i(x)$ на F_i для кожного $i = 1, \ldots, n$.*

Доведення. Згідно з лемою 3.4 [7] існують диз'юнктні функціонально відкриті в X множини G_i такі, що $F_i \subseteq G_i$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Покладемо $A_i = X \setminus G_i$. Тоді для кожного $i = 1, \ldots, n$ існує неперервна функція $\varphi_i\colon X \to$ $\to [0, 1]$ така, що $F_i = \varphi_i^{-1}(1)$ і $A_i = \varphi_i^{-1}(0)$. Для кожного $x \in X$ покладемо $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) g_i(x)$. Очевидно, що відображення $g\colon X \to Z$ є неперервним. Якщо $x \in F_i$ для деякого $1 \le i \le n$, то $\varphi_i(x) = 1$ і $\varphi_j(x) = 0$ при $j \ne i$. Таким чином, $g(x) = g_i(x)$ на F_i.

Лему доведено.

Твердження 2. *Нехай X — топологічний простір, Z — топологічний векторний простір, $f \in H_1^*(X, Z)$, $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$, де Z_n — такі непорожні підпростори простору Z, що $H_1^*(X, Z_n) \subseteq B_1(X, Z_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність функціональних F_σ-множин в X така, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ і $f(F_n) \subseteq Z_n$ для кожного n. Тоді $f \in B_1(X, Z)$.*

Доведення. З леми 3.2 [7] випливає, що існує послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин в X така, що $B_n \subseteq F_n$ і

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Нехай $f_n^* = f|_{B_n}: B_n \to Z_n$. Тоді $f_n^* \in H_1^*(B_n, Z_n)$. Зафіксуємо точку $z_n \in Z_n$ для кожного n і покладемо $f_n(x) = f_n^*(x)$, якщо $x \in B_n$, і $f_n(x) = z_n$, якщо $x \notin B_n$. Легко перевірити, що для довільної відкритої в Z множини G множина $f_n^{-1}(G) \bigcap B_n$ є функціональною типу F_σ в X для кожного n. Тоді згідно з лемою 1 [14] $f_n \in H_1^*(X, Z_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $H_1^*(X, Z_n) \subseteq B_1(X, Z_n)$, то існує послідовність $(g_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_{n,m}: X \to Z_n$ така, що $g_{n,m}(x) \underset{m\to\infty}{\to} f_n(x)$ на X. Зокрема, $\lim\limits_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = f(x)$ на B_n. Оскільки множини B_n є функціональними типу F_σ, то $B_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m}$, де $(B_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність функціонально замкнених в X множин. Покладемо $F_{n,m} = \varnothing$, якщо $n > m$, і $F_{n,m} = B_{n,m}$, якщо $n \le m$. Тоді з доведеної леми випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує неперервне відображення $g_m: X \to Y$ таке, що $g_m|_{F_{n,m}} = g_{n,m}$, адже система $\{F_{n,m}: n \in \mathbb{N}\}$ є скінченною для кожного $m \in \mathbb{N}$. Залишилось показати, що $g_m(x) \to f(x)$ на X. Зафіксуємо $x \in X$. Тоді існує номер n такий, що $x \in B_n$. Послідовність $(F_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ зростає і $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m} = B_n$. Тому існує такий номер $m_0 \ge n$, що $x \in F_{n,m}$ для всіх $m \ge m_0$. Тоді $g_m(x) = g_{n,m}(x)$ для всіх $m \ge m_0$. Таким чином, $\lim\limits_{m\to\infty} g_m(x) = \lim\limits_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = f_n(x) = f(x)$.

Твердження доведено.

Теорема 2. *Нехай X — метризовний простір, Y — досконало нормальний простір і Z — сильно σ-метризовний топологічний векторний простір із вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$, де Z_n — метризовні сепарабельні лінійно зв'язні і локально лінійно зв'язні простори. Тоді $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Нехай $f \in CC(X \times Y, Z)$. Згідно з наслідком 4.1.6 [15] простір Z є досконало нормальним, тому з теореми 8.5.5 [15] (див. також [16]) випливає, що $f \in H_1(X \times Y, Z)$. Застосувавши твердження 1, отримаємо, що існує зростаюча послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених в $X \times Y$ множин така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X \times Y$ і $f(F_n) \subseteq Z_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки з [10] випливає, що $H_1(X \times Y, Z_n) \subseteq B_1(X \times Y, Z_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то згідно з твердженням 2 маємо, що $f \in B_1(X \times Y, Z)$.

З теорем 1 і 2 безпосередньо випливає така теорема.

Теорема 3. *Нехай X — метризовний простір, Y — досконало нормальний простір. Тоді набір $\left(X, Y, (\ell_p, \kappa_s)\right)$ є трійкою Лебега.*

1. *Lebesque H.* Sur l'approximation des fonctions // Bull. Sci. Math. – 1898. – **22**. – P. 278 – 287.
2. *Rudin W.* Lebesque first theorem // Math. Anal. and Appl., Pt B. – Acad. Press, 1981. – P. 741 – 747.
3. *Маслюченко В. К., Михайлюк О. В., Собчук О. В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Мат. міжнар. мат. конф., присв. пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192 – 246.
4. *Каланча А. К., Маслюченко В. К.* Берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних функцій на добутках із скінченновимірним співмножником // Зб. наук. пр. Кам'янець-Поділ. пед. ун-ту. Сер. фіз.-мат. (математика). – 1998. – **4**. – С. 43 – 46.
5. *Каланча А. К., Маслюченко В. К.* Розмірність Лебега – Чеха та берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 11. – С. 1596 – 1599.
6. *Banakh T. O.* (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications // Мат. студії. – 2002. – **18**, № 1. – С. 10 – 28.

7. *Карлова О. О.* Перший функціональний лебегівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 52 – 60.
8. *Маслюченко В. К., Плічко А. М.* Про одну сім'ю топологій на просторі ℓ_p // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – **35**. – С. 194 – 198.
9. *Fosgerau M.* When are Borel functions Baire functions? // Fund. math. – 1993. – **143**. – P. 137 – 152.
10. *Карлова О. О., Михайлюк В. В.* Рівномірна границя відображень першого класу Бера і берівська класифікація відображень першого класу Лебега // Конф. мол. учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (24 – 27 травня, 2005 р.): Тези доп. – Львів, 2005. – С. 202 – 203.
11. *Карлова О. О., Михайлюк В. В.* Функції першого класу Бера зі значеннями в метризовних просторах // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 4. – С. 568 – 572.
12. *Банах С.* Курс функціонального аналізу. – Київ: Рад. шк., 1948. – 216 с.
13. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
14. *Карлова О. О.* Берівська класифікація відображень зі значеннями у підмножинах скінченновимірних просторів // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2005. – Вип. 239. – С. 59 – 65.
15. *Маслюченко В. К.* Нарізно неперервні функції і простори Кете: Дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 445 с.
16. *Маслюченко В. К., Маслюченко О. В., Михайлюк В. В.* Паракомпактність і лебегівська класифікація // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 2. – С. 65 – 72.

Одержано 22.02.06