УДК 517.54

А. К. Бахтин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ СИСТЕМ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ И ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ*

Extremal problems of the geometric theory of functions of complex variable are studied. Sharp upper bounds are obtained for a product of inner radii of nonoverlapping domains and open sets with respect to equiradial systems of points.

Вивчаються екстремальні задачі геометричної теорії функцій комплексної змінної. Отримано точні оцінки зверху добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин відносно рівнопроменевих систем точок.

1. Введение. В геометрической теории функций комплексной переменной давно сформировалось направление, основная цель которого заключается в получении точных оценок для внутренних радиусов систем попарно непересекающихся областей и создании соответствующих методов исследования. Первоначальным толчком к возникновению такого направления послужила фундаментальная работа [1], в которой, в частности, была впервые поставлена и решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух непересекающихся односвязных областей. В дальнейшем эта задача активно изучалась и обобщалась в работах многих авторов (см. [2 – 16]). В данной работе предложен новый подход, позволяющий решать более общие задачи по сравнению с ранее известными. При этом используются результаты и методы теории квадратичных дифференциалов, с которой можно ознакомиться в фундаментальной монографии Дж. Дженкинса [4].

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Пусть $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$, $\operatorname{cap} E$ — логарифмическую емкость множества E (см. [3, 11, 14], $U_\rho = \{w \in C \colon |w| < \rho\}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $U_1 =: U$ и $\chi(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точек $A_{n,m} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C} \colon k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}\right\}$ назовем (n,m)-равнолучевой, если при всех $k = \overline{1,n}$ и $p = \overline{1,m}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} 0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty, \\ \arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} = \frac{2\pi(k-1)}{n} =: \theta_k, \quad \theta_{n+1} := 2\pi. \end{gathered} \tag{1}$$

В случае $m = 1$ назовем $(n,1)$-равнолучевую систему точек n-равнолучевой и рассмотрим более простые обозначения: $a_{k,1} =: a_k$, $k = \overline{1,n}$, $A_{n,1} =: A_n$.

Каждой равнолучевой системе точек сопоставим систему областей $P_k := P_k(A_{n,m}) := \left\{w \in \mathbb{C} : \dfrac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \dfrac{2\pi}{n}k\right\}$, $k = \overline{1,n}$. Умножение

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0107U002027.

(n,m)-лучевой системы $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ на число $t \in \mathbb{R}^+$ определим следующим образом: $t \cdot A_{n,m} := \{t \cdot a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Равнолучевые системы точек, по-видимому, впервые рассматривались в работе [13].

Для фиксированного $R \in \mathbb{R}^+$ и произвольной (n,m)-равнолучевой системы точек $A_{n,m}$ рассмотрим „управляющий" функционал

$$M_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,p}|. \tag{2}$$

Положим $M_1(A_{n,m}) = M(A_{n,m})$. Ясно, что $M_R(A_{n,m}) = R^{mn} \cdot M\left(\dfrac{1}{R} \cdot A_{n,m}\right)$.

При каждом $k = \overline{1,n}$ обозначим через $z_k(w)$ ту ветвь аналитической функции $z = -i\left(e^{-\theta_k i}w\right)^{\frac{n}{2}}$, которая реализует однолистное и конформное отображение области P_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, при этом луч $\arg w = \dfrac{2\pi}{n}\left(k - \dfrac{1}{2}\right)$ преобразуется в положительную действительную полуось. Тогда функция

$$\zeta_k^{(R)}(w) := \frac{R^{\frac{n}{2}} - z_k(w)}{R^{\frac{n}{2}} + z_k(w)} \tag{3}$$

однолистно и конформно отображает область P_k на единичный круг $U = U_1$, $k = \overline{1,n}$. Обозначим $\omega_{k,p}^{(1)}(R) := \zeta_k^{(R)}(a_{k,p})$, $\omega_{k,p}^{(2)}(R) := \zeta_k^{(R)}(a_{k+1,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)}(R) := \omega_{n,p}^{(2)}(R)$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. При всех $k = \overline{1,n}$ множество $\left\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right\}_{p=1}^{m} \cup \left\{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right\}_{p=1}^{m}$ состоит из $2m$ различных точек на ∂U_R.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — система взаимно непересекающихся областей. При каждом $k = \overline{1,n}$ только конечное число компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$ могут содержать внутри себя какую-то из областей B_j, $j = \overline{1,n}$, $j \neq k$; такие компоненты мы называем существенными. Область, полученную выбрасыванием из $\overline{\mathbb{C}}$ всех существенных компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$, будем обозначать через $\widetilde{B}_k$. Ясно, что $B_k \subset \widetilde{B}_k$ при всех $k = \overline{1,n}$ и $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^{n}$ — система конечносвязных взаимно непересекающихся областей без изолированных граничных точек. Переход от системы областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ к системе областей $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^{n}$ называется операцией заполнения несущественных граничных компонент.

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, — произвольное открытое множество и $w = a \in D$. Тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. Для произвольной (n,m)-равнолучевой системы $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ и открытого множества D, $A_{n,m} \subset D$, обозначим через $D_k(a_{p,s})$ связную компоненту множества $D(a_{p,s}) \cap \overline{P_k\left(A_{n,m}\right)}$, содержащую точку $a_{p,s}$, $p = k, k+1$, $s = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$. $D_k(0)$ (соответственно $D_k(\infty)$) обозначает связную компоненту множества $D(0) \cap \overline{P}_k(A_{n,m})$ (соответственно $D(\infty) \cap \overline{P}_k(A_{n,m})$), содержащую точку $w = 0$ (соответственно $w = \infty$). На множестве пар целочисленных индексов (k,p) определим равенство следующим образом: $(k,p) = (q,s) \Leftrightarrow k = q$ и $p = s$. Будем говорить, что открытое множество D, $\{0\} \cup A_{n,m} \subset D$ удовлетворяет первому условию неналегания относительно заданной (n,m)-равнолучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, если

$$\Big[D_k(0) \cap D_k(a_{p,l})\Big] \cup \Big[D_k(a_{p,l}) \cap D_k(a_{q,s})\Big] = \varnothing \tag{4}$$

при каждом фиксированном $k = \overline{1,n}$ для всех различных точек $a_{p,l}$ и $a_{q,s}$, принадлежащих $\overline{P}_k(A_{n,m})$. Открытое множество D, $\{0,\infty\} \cup A_{n,m} \subset D$ удовлетворяет второму условию неналегания относительно (n,m)-равнолучевой системы $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, если выполняется условие (4) и, кроме того,

$$\Big[D_k(0) \cap D_k(\infty)\Big] \cup \Big[D_k(a_{q,s}) \cap D_k(\infty)\Big] = \varnothing$$

при каждом фиксированном $k = \overline{1,n}$ для всех различных точек $a_{p,l}$ и $a_{q,s}$, принадлежащих $\overline{P}_k(A_{n,m})$. Положим $r(D,a) := r(D(a),a)$,

$$g_D(w,a) := \begin{cases} 0, & w \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D}(a), \\ g_{D(a)}(w,a), & w \in D(a), \\ \overline{\lim\limits_{\zeta \to w}} g_{D(a)}(\zeta,a), & \zeta \in D(a), \quad w \in \partial D(a). \end{cases}$$

В данной работе изучается задача о нахождении точных оценок сверху функционалов вида

$$r^{\alpha}(D,0) r^{\beta}(D,\infty) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(D, a_{k,p}),$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta \in \mathbb{R}^{+}$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ — равнолучевая система точек, D — открытое множество, $A_{n,m} \cup \{0,\infty\} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

2. Основные результаты. В случае неналегающих областей получены такие утверждения, анонсированные в [16].

Теорема 1. *Пусть $R \in \mathbb{R}^{+}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда для любой (n,m)-равнолучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ и любого набора произвольных взаимно непересекающихся областей B_0, $\{B_{k,p}\}$, $0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, выполняется неравенство*

$$\big[r\left(B_0,0\right)\big]^{\frac{n^2}{4}} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm} \left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}} R^{\left(\frac{n}{2}\right)^2} M_R(A_{n,m}). \tag{5}$$

Знак равенства в (5) *достигается тогда и только тогда, когда* 0, $\{a_{k,p}\}$ *и* B_0, $\{\widetilde{B}_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-1}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1} - (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}\right]^2}\, dw^2. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть $R \in \mathbb{R}^{+}$, n, $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда, каковы бы ни были (n,m)-равнолучевая система точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ и набор взаимно непересекающихся областей B_0, $\{B_{k,p}\}$, B_{∞} такие, что $0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $\infty \in B_{\infty}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, выполняется неравенство*

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^{n}\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}M_R(A_{n,m}). \tag{7}$$

Знак равенства в (7) *достигается тогда и только тогда, когда* 0, $\{a_{k,p}\}$, ∞ *и* $\widetilde{B}_0$, $\{\widetilde{B}_{k,p}\}$, $\widetilde{B}_\infty$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-w^{n-2}\frac{(R^n+w^n)^{2m}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2. \tag{8}$$

В случае открытых множеств получены следующие результаты [16].

Теорема 3. *Пусть* $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. *Тогда для произвольной* (n,m)*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и любого открытого множества* D, $\{0\}\cup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы* $A_{n,m}$, *выполняется неравенство*

$$[r(D,0)]^{(\frac{n}{2})^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(0,a_{k,p})\times$$

$$\times\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n^2}{4}}M_R(A_{n,m}), \tag{9}$$

знак равенства в котором достигается, в частности, когда $\{0\}\cup A_{n,m}$ *и* D *есть соответственно совокупность всех полюсов и объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала* (6).

Теорема 4. *Пусть* $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. *Тогда для любой* (n,m)*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и любого открытого множества* D, $\{0,\infty\}\cup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего второму условию неналегания относительно системы* $A_{n,m}$ *выполняется неравенство*

$$\left[r(D,0)r(D,\infty)\right]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\times$$

$$\times\Bigg[\exp\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(0,a_{k,p})\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(\infty,a_{k,p})\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\Bigg]\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^{n}\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}M_R(A_{n,m}), \tag{10}$$

знак равенства в котором достигается, в частности, когда $\{0,\infty\}\cup A_{k,p}$ *и* D *есть соответственно совокупность всех полюсов и объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала* (8).

3. Доказательства. ***Доказательство теоремы*** **1.** Доказательство этой теоремы основано на применении метода кусочно-разделяющей симметризации [11–14]. Пусть $R\in\mathbb{R}^{+}$. Тогда семейство функций $\left\{\zeta_k^{(R)}(w)\right\}_{k=1}^{n}$, заданных равенством (3), является допустимым для кусочно-разделяющего преобразования областей $\left\{B_{k,p}\colon k=\overline{1,n},\, p=\overline{1,m}\right\}$ относительно системы углов $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Для любого множества $\Delta\in\overline{\mathbb{C}}$ обозначим $(\Delta)^{*}:=\left\{w\in\overline{\mathbb{C}}:\ \dfrac{1}{\overline{w}}\in\Delta\right\}$. Пусть $\Omega_{k,p}^{(1)}(R)$ обозначает связную компоненту множества $\zeta_k^{(R)}\left(B_{k,p}\cap\overline{P}_k\right)\cup\left(\zeta_k^{(R)}\left(B_{k,p}\cap\overline{P}_k\right)\right)^{*}$, содержащую точку $\omega_{k,p}^{(1)}(R)$, а $\Omega_{k,p}^{(2)}(R)$ — связную компоненту множества $\zeta_{k-1}^{(R)}\Big(B_{k,p}\cap\cap\overline{P}_{k-1}\Big)\cup\left(\zeta_{k-1}^{(R)}\left(B_{k,p}\cap\overline{P}_{k-1}\right)\right)^{*}$, содержащую точку $\omega_{k,p}^{(2)}(R)$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $\zeta_0^{(R)}:=\zeta_n^{(R)}$, $\Omega_{0,p}^{(2)}(R):=\Omega_{n,p}^{(2)}(R)$. Ясно, что $\Omega_{k,p}^{(s)}(R)$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $s=1,2$, являются, вообще говоря, многосвязными областями. Пары областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R)$ и $\Omega_{k,p}^{(1)}(R)$ являются результатом разделяющего преобразования области $B_{k,p}$ относительно точки $a_{k,p}$. Через $\Omega_0^{(k)}(R)$ обозначим связную компоненту множества $\zeta_k^{(R)}\left(B_0\cap\overline{P}_k\right)\cup\left(\zeta_k^{(R)}\left(B_0\cap\overline{P}_k\right)\right)^{*}$, содержащую точку $\zeta=1$, $k=\overline{1,n}$. Результатом разделяющего преобразования области B_0 в точке $w=0$ является семейство $\left\{\Omega_0^{(k)}(R)\right\}_{k=1}^{n}$, $0\in\Omega_0^{(k)}(R)$, $k=\overline{1,n}$. С помощью равенства (3) получаем асимптотические выражения

$$\left|\zeta_k^{(R)}(w)-\zeta_k^{(R)}(a_{k,p})\right|\sim\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w-a_{k,p}|,$$

$$w\to a_{k,p},\quad w\in\overline{P}_k,$$

$$\left|\zeta_{k-1}^{(R)}(w)-\zeta_{k-1}^{(R)}(a_{k,p})\right|\sim\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}|w-a_{k,p}|,$$

$$w\to a_{k,p},\quad w\in\overline{P}_{k-1}.$$

Аналогично находим соотношения

$$\left|\zeta_k^{(R)}(w)-1\right|\sim\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}|w|^{\frac{n}{2}},$$

$$w\to 0,\quad w\in\overline{P}_k,\quad k=\overline{1,n}.$$

Отсюда с учетом теоремы 1.9 [12] получаем неравенства

$$r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\Big\{r\big(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\big)r\big(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\big)\times$$

$$\times \left[\frac{2}{n} \chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \right] \left[\frac{2}{n} \chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \right] \Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{r\big(\Omega_0^{(k)}(R), 1\big)}{\dfrac{2}{R^{\frac{n}{2}}}} \right]^{\frac{2}{n^2}}. \tag{12}$$

Случаи равенств в (11), (12) полностью исследованы в работах [12, 14].

Отсюда непосредственно следует

$$r^{\frac{n^2}{4}}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{n}{2}} R^{\frac{n^2}{4}} \prod_{k=1}^{n} \left[r(\Omega_0^{(k)}(R), 1) \right]^{\frac{2}{n^2}} \left(\frac{2}{n} \right)^{nm} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{p=1}^{m} \prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R), \omega_{k,p}^{(s)}(R) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{2}{n} \right)^{nm} R^{\frac{n^2}{4}} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ r(\Omega_0^{(k)}(R), 1) \prod_{p=1}^{m} \prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R), \omega_{k,p}^{(s)}(R) \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Знак равенства в (13) достигается тогда и только тогда, когда в (11), (12) реализуется знак равенства при всех $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$.

Для дальнейших оценок нам понадобится один классический результат В. Н. Дубинина [11, 12].

Лемма. *Для любой системы различных точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $n \geqslant 3$, *и любых взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n} \right)^{n}. \tag{14}$$

Знак равенства в (14) *достигается тогда и только тогда, когда*

$$a_k = \exp i \left(\frac{2\pi}{n}(k-1) + \theta \right),$$

$$\widetilde{B}_k = \left\{ w \in C : \left| \arg w - \left(\theta + \frac{2\pi}{n}(k-1) \right) \right| < \frac{\pi}{n} \right\},$$

$$\operatorname{cap} \widetilde{B}_k \backslash B_k = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Из неравенства (14) получаем соотношения

$$r(\Omega_0^{(k)}(R),1)\prod_{p=1}^{m}\prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right)\leqslant\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{2m+1}2^{2m+1};\qquad(15)$$

знак равенства в (15) реализуется тогда и только тогда, когда точки 1, $\omega_{k,p}^{(s)}(R)$ и области $\widetilde{\Omega}_{k,p}^{(s)}(R)$, $\widetilde{\Omega}_0^{(k)}(R)$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2=\frac{\zeta^{2m-1}}{(1-\zeta^{2m+1})^2}\,d\zeta^2.\qquad(16)$$

Сопоставляя неравенства (13) и (15), получаем оценку

$$r^{\frac{n^2}{4}}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}R^{\frac{n^2}{4}}M_R(A_{n,m})2^{\frac{n(2m+1)}{2}}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n(2m+1)}{2}}=$$

$$=\left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n^2}{4}}M_R(A_{n,m}).\qquad(17)$$

Знак равенства в (17) достигается только при одновременной реализации равенств во всех неравенствах (11), (12), (15). Круговыми областями квадратичного дифференциала (16) являются области

$$\hat{\widehat{D}}_p=\left\{\zeta\in\mathbb{C}:\ \frac{\pi}{2m+1}(2k-3)<\arg\zeta<\frac{\pi}{2m+1}(2k-1)\right\},$$

$$p=\overline{1,2m+1}.$$

Положим $\hat{\widehat{\Delta}}_p=U\cap\hat{\widehat{D}}_p$, $p=\overline{1,2m+1}$. Секторы $\hat{\widehat{\Delta}}_p$ и $\hat{\widehat{\Delta}}_q$ симметричны друг другу относительно вещественной оси, если $p+q=2m+3$, $p,q\geqslant 2$, а сектор $\hat{\widehat{\Delta}}_1$ имеет симметрию относительно вещественной оси. С учетом (3) функции

$$\hat{\widehat{w}}_k(\zeta)=Re^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}\left(i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\frac{2}{n}},\quad k=\overline{1,n},$$

реализуют конформное отображение круга U на $P_k^{(0)}$. Кроме того, в случае реализации равенства в (17) легко видеть, что

$$\widetilde{B}_{k,p}\cap P_k^{(0)}=\hat{\widehat{w}}_k\left(\hat{\widehat{\Delta}}_{p+1}\right),\qquad \widetilde{B}_{k+1,p}\cap P_k^{(0)}=\hat{\widehat{w}}_k\left(\hat{\widehat{\Delta}}_{2m+2-p}\right),$$

$$\widetilde{B}_0\cap P_k^{(0)}=\hat{\widehat{w}}_k\left(\hat{\widehat{\Delta}}_1\right),\qquad p=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n},\quad B_{n+1,p}:=B_{1,p}.$$

Кроме того, в случае реализации равенства получаем

$$r(B_{k,p}, a_{k,p}) = r(\widetilde{B}_{k,p}, a_{k,p}),$$

$$r(B_0, 0) = r(\widetilde{B}_0, 0), \qquad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m}.$$

Отсюда следует

$$g_{B_{k,p}}(w, a_{k,p}) = \log \frac{1}{|w - a_{k,p}|} + \log r(B_{k,p}, a_{k,p}) + o(1),$$

$$w \to a_{k,p},$$

$$g_{\widetilde{B}_{k,p}}(w, a_{k,p}) = \log \frac{1}{|w - a_{k,p}|} + \log r(\widetilde{B}_{k,p}, a_{k,p}) + o(1),$$

$$w \to a_{k.p}, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m},$$

$$g_{B_0}(w, 0) = \log \frac{1}{|w|} + \log r(B_0, 0) + o(1), \quad w \to 0,$$

$$g_{\widetilde{B}_0}(w, 0) = \log \frac{1}{|w|} + \log r(\widetilde{B}_0, 0) + o(1), \quad w \to 0.$$

Легко видеть, что на множестве всех регулярных точек на $\partial B_{k,p}$ выполняется неравенство

$$h_{k,p}(w) = g_{\widetilde{B}_{k,p}}(w, a_{k,p}) - g_{B_{k,p}}(w, a_{k,p}) \geqslant 0,$$

а на множестве всех регулярных точек на ∂B_0 — неравенство

$$h_0(w) = g_{\widetilde{B}_0}(w, 0) - g_{B_0}(w, 0) \geqslant 0.$$

Тогда $h_{k,p}(w) \geqslant 0$ всюду в области $B_{k,p}$. С другой стороны, $h_{k,p}(a_{k,p}) = 0$. Следовательно [15], в силу принципа максимума для гармонических функций имеет место тождество $h(w) \equiv 0$. Тогда $g_{\widetilde{B}_{k,p}}(w, a_{k,p}) - g_{B_{k,p}}(w, a_{k,p}) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Отсюда получаем $\operatorname{cap} \widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p} = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Вследствие того, что $h_0(w)$ гармонична в B_0 и $h_0(0) = 0$, из обобщенного принципа максимума для гармонических функций получаем тождество $h_0(w) \equiv 0$. Следовательно, $g_{\widetilde{B}_0}(w, 0) \equiv g_{B_0}(w, 0)$. Отсюда следует $\operatorname{cap} \widetilde{B}_0 \backslash B_0 = 0$. Траектории квадратичного дифференциала (16) при отображении

$$\zeta = \frac{R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}}}$$

преобразуются в траектории квадратичного дифференциала (6). Таким образом, в случае реализации знака равенства в (17) получаем, что точки $a_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и $w = 0$ образуют систему полюсов, а соответственно области $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_{k,p}$ — систему круговых областей квадратичного дифференциала (6).

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Все рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, остаются в силе. К области B_∞ в точке $w = \infty$ применимо разделяющее преобразование относительно семейства функций (3) и системы областей $\{P_k^0\}$. Через $\Omega_\infty^{(k)}(R)$ обозначим связную компоненту множества $\zeta_k^{(R)}\left(B_\infty\cap\overline{P}_k\right)\cup\left(\zeta_k^{(R)}\left(B_\infty\cap\overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащую точку $\zeta=-1$, $k=\overline{1,n}$. Семейство $\left\{\Omega_\infty^{(k)}(R)\right\}_{k=1}^n$ является результатом разделяющего преобразования области B_∞ относительно семейств $\{P_k\}_{k=1}^n$ и $\left\{\zeta_k^{(R)}\right\}_{k=1}^n$ в точке $w=\infty$. Результатом разделяющего преобразования области B_0 в точке $w=0$ является семейство $\left\{\Omega_0^{(k)}(R)\right\}_{k=1}^n$, $0\in\Omega_0^{(k)}(R)$, $k=\overline{1,n}$. Пары областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R)$ и $\Omega_{k,p}^{(1)}(R)$ являются результатом разделяющего преобразования области $B_{k,p}$ относительно точки $a_{k,p}$. Процедура получения областей $\Omega_{k,p}^{(s)}(R)$ и $\Omega_0^{(k)}(R)$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, такая же, как и при доказательстве теоремы 1.

С помощью равенства (3) получаем асимптотическое выражение

$$\left|\zeta_k^{(R)}(w)+1\right|\sim 2R^{\frac{1}{\alpha_k}}|w|^{-\frac{1}{\alpha_k}},$$

$$w\to\infty,\quad w\in\overline{P}_k,\quad k=\overline{1,n}.$$

Отсюда с учетом теоремы 1.9 [12] получаем неравенство

$$r\left(B_\infty,\infty\right)\leqslant\prod_{k=1}^n\left[\frac{r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)}{2R^{\frac{n}{2}}}\right]^{\frac{2}{n^2}}. \tag{18}$$

Учитывая (11), (12), (18), имеем

$$\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^n\prod_{p=1}^m r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n}\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\prod_{k=1}^n\prod_{p=1}^m\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^n\left\{r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\prod_{p=1}^m\prod_{s=1}^2 r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Знак равенства в (19) достигается тогда и только тогда, когда в неравенствах (11), (12) и (18) при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ реализуется знак равенства. Из неравенства (14) получаем соотношение

$$r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\times$$

$$\times\prod_{p=1}^m\prod_{s=1}^2 r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right)\leqslant\left(\frac{2}{m+1}\right)^{2(m+1)}. \tag{20}$$

Знак равенства в (20) реализуется тогда и только тогда, когда точки 1, -1, $\omega_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и области $\widetilde{\Omega}_0^{(k)}(R)$, $\widetilde{\Omega}_\infty^{(k)}(R)$, $\widetilde{\Omega}_{k,p}^{(s)}(R)$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $s=1,2$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{\zeta^{2m}d\zeta^2}{(\zeta^{2m+2}-1)^2}. \tag{21}$$

Из неравенств (19) и (20) следует оценка

$$\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^n\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}M_R\left(A_{n,m}\right). \tag{22}$$

Знак равенства в (22) достигается только тогда, когда знак равенства реализуется во всех неравенствах (11), (12), (18) и (20) одновременно.

Круговыми областями квадратичного дифференциала (21) являются углы

$$\widehat{D}_q = \left\{\zeta\in\mathbb{C}\backslash\{0\}:\ \frac{\pi}{2(m+1)}(2q-3)<\arg\zeta<\frac{\pi}{2(m+1)}(2q-1)\right\},$$

$$q=\overline{1,2(m+1)}.$$

Пусть $\widehat{\Delta}_q = U\cap\widehat{D}_q$, $q=\overline{1,2(m+1)}$. Ясно, что секторы $\widehat{\Delta}_1$ и $\widehat{\Delta}_{m+2}$ имеют симметрию относительно вещественной оси. Остальные секторы разбиваются на пары взаимно симметричных секторов относительно вещественной оси:

$$\zeta\in\widehat{\Delta}_q\Leftrightarrow\overline{\zeta}\in\widehat{\Delta}_{2(m+2)-q},\quad q=\overline{2,(m+1)}.$$

Как следует из (3), функции

$$w_k^{(0)} = R\,e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}\left(i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\frac{2}{n}},\quad k=\overline{1,n}, \tag{23}$$

реализуют конформное отображение круга U на P_k^0. Из формул (23) получаем

$$\widetilde{B}_{k,p}\cap P_k^{(0)} = w_k^{(0)}\left(\widehat{\Delta}_{p+1}\right),\qquad \widetilde{B}_{k+1,p}\cap P_k^{(0)} = w_k^{(0)}\left(\widehat{\Delta}_{2m+3-p}\right),$$

$$\widetilde{B}_0\cap P_k^{(0)} = \widehat{w}_k\left(\widehat{\Delta}_1\right),\quad \widetilde{B}_\infty\cap P_k^{(0)} = \widehat{w}_k\left(\widehat{\Delta}_{m+2}\right), \tag{24}$$

$$p=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n},\quad B_{n+1,p}:=B_{1,p}.$$

В случае реализации знака равенства в (22) приходим к равенствам

$$r(B_{k,p},a_{k,p}) = r(\widetilde{B}_{k,p},a_{k,p}),$$

$$r(B_0,0)=r(\widetilde{B}_0,0),\qquad r(B_\infty,\infty)=r(\widetilde{B}_\infty,\infty),$$

$$k=\overline{1,n},\quad p=\overline{1,m}.$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1 имеем $\operatorname{cap}\widetilde{B}_0\backslash B_0=0$, $\operatorname{cap}\widetilde{B}_\infty\backslash B_\infty = 0$, $\operatorname{cap}\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}=0$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Таким образом, из условий реализации знака равенства в (11), (12), (18) и (20) с учетом (22) – (24) и аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что точки $a_{k,p}$, система областей $\widetilde{B}_0$, $\{\widetilde{B}_{k,p}\}$, $\widetilde{B}_\infty$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (8).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы **3.** Ясно, что область D содержит функцию Грина (вообще говоря, обобщенную). Рассмотрим множества

$$E_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash D; \qquad \overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C} : \, |w| \leqslant t\} \, ,$$

$$E_{k,p}(t) = \{w \in \mathbb{C} : \, |w - a_{k,p}| \leqslant t\} \, , \qquad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m}.$$

При достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ определим конденсатор как упорядоченную совокупность непересекающихся непустых замкнутых множеств

$$\widehat{C}\,(t,\, D,\, A_{n,m}) = \left\{E_0,\, \overline{U}_t,\, E_{1,1}(t), E_{1,2}(t), \ldots, E_{n,m}(t)\right\} \tag{25}$$

с предписанными значениями $0, \left(\dfrac{n}{2}\right), 1, 1, \ldots, 1.$

Емкостью конденсатора $\widehat{C}\,(t,\, D,\, A_{n,m})$ называется величина (см. [12, 14])

$$\operatorname{cap} \widehat{C}\,(t,\, D,\, A_{n,m}) = \inf \int\!\!\int \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right] \, dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества E_0, $G\Big|_{\overline{U}_t} = \dfrac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}(t)} = 1$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$. Величина, обратная емкости конденсатора C, называется модулем этого конденсатора

$$\mid C \mid = [\operatorname{cap} C]^{-1}. \tag{26}$$

Рассмотрим конденсаторы $(t < R)$

$$\widehat{C_l^{(R)}}\Big(t,\, D,\, A_{n,m}\Big) = \Big(E_0^{(l)}(R),\, E_1^{(l)}(t, R),\, E_{l,1}(t, R), \ldots, E_{l,m}(t, R),$$

$$E_{l+1,1}(t, R),\, E_{l+1,2}(t, R), \ldots, E_{l+1,m}(t, R)\Big), \tag{27}$$

где

$$E_0^{(l)}(R) = \zeta_l^{(R)} \left(E_0 \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)} \left(E_0 \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$E_1^{(l)}(t, R) = \zeta_l^{(R)} \left(\overline{U}_t \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)} \left(\overline{U}_t \cap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*, \tag{28}$$

$$E_{k,p}(t, R) = \zeta_l^{(R)} \left(E_{k,p}(t) \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)} \left(E_{k,p}(t) \cap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$k = l, l+1, \quad l = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m},$$

$[A]^* = \left\{w \in \overline{\mathbb{C}} : \, \dfrac{1}{\overline{w}} \in A\right\} \, \forall A \subset \overline{\mathbb{C}}.$

Таким образом, при разделяющем преобразовании конденсатора $\widehat{C}(t,\, D,\, A_{n,m})$ ему сопоставляется набор конденсаторов $\left\{\widehat{C_l^{(R)}}\,(t,\, D,\, A_{n,m})\,\right\}_{l=1}^{n}$, симметричных относительно $\partial U = \{w : |w| = 1\}$. Каждому конденсатору $\widehat{C_l^{(R)}}\,(t,\, D,\, A_{n,m})$, $l = \overline{1,n}$, при достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$, $t < R$, сопоставляем класс V_l всех вещественных непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(l)}(t,R)$, $G\Big|_{E_1^{(l)}(t,R)} = \dfrac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}^{(l)}(t,R)} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. При разделяющем преобразовании в соответствии с работами [12, 14] получаем неравенство

$$\operatorname{cap}\widehat{C}\,(t,D,A_{n,m}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap}\widehat{C_k^{(R)}}\,(t,D,A_{n,m})\,. \tag{29}$$

Отсюда следует, что

$$\left|\widehat{C}\,(t,D,A_{n,m})\,\right| \leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\widehat{C_l^{(R)}}\,(t,D,A_{n,m})\,\right|^{-1}\right)^{-1}. \tag{30}$$

Из теоремы 1 [13] получаем асимптотику модуля $\widehat{C}(t,D,A_{n,m})$:

$$\left|\widehat{C}(t,D,A_{n,m})\right| == \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{n^2+4nm}\right)\log\frac{1}{t} + \widehat{M}(D,A_{n,m}) + o(1), \quad t \to 0, \tag{31}$$

где

$$\widehat{M}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{n^2+4nm}\right)^2\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,p}) + \frac{n^2}{4}\log r(D,0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} n g_D(0,a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right]. \tag{32}$$

Используя асимптотические выражения из доказательства теоремы 1 и тот факт, что D удовлетворяет первому условию неналегания относительно системы $A_{n,m}$, находим асимптотические соотношения для модулей конденсаторов $\widehat{C}_l^{(R)}(t,D,$ $A_{n,m})$, $l = \overline{1,n}$:

$$\left|\widehat{C_l^{(R)}}\,(t,D,A_{n,m})\,\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n+4m}\right)\log\frac{1}{t} + \widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m}) + o(1), \quad t \to 0, \tag{33}$$

где

$$\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n+4m}\right)^2\left[\log\frac{r\big(\Omega_0^{(l)}(R),1\big)}{\left(\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}\right)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\big(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\big)r\big(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\big)}{\left\{\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{l,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l,p}|\right]\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{l+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l+1,p}|\right]\right\}^{-1}}\right], \quad l=\overline{1,n}. \tag{34}$$

Из равенства (33) получаем

$$\left[\sum_{l=1}^{n}\left|\widehat{C_l^{(R)}}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}\right]^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\pi n(n+4m)}\log\frac{1}{t}+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o(1), \quad t\to 0. \tag{35}$$

Неравенства (29) и (30) с учетом (31) и (35) приводят к соотношению

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{4}{n^2+4nm}\log\frac{1}{t}+\widehat{M}(D,A_{n,m})+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi n(n+4m)}\log\frac{1}{t}+\frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o(1), \quad t\to 0. \tag{36}$$

Сокращая особенности и переходя в (36) к пределу при $t\to 0$, непосредственно имеем

$$\widehat{M}(D,A_{n,m})\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m}). \tag{37}$$

Подставляя в (37) выражения (32) и (34), получаем неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{4}{n(n+4m)}\right]^2\left\{\log[r(D,0)]^{\frac{n^2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}ng_D(a_{k,p},0)+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{2}{n^2}\left(\frac{2}{n+4m}\right)^2\left[\sum_{l=1}^{n}\log\frac{r\big(\Omega_0^{(l)}(R),1\big)}{\left(\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=1}^{m}\frac{r\big(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\big)r\big(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\big)}{\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2\chi\left(\left|\frac{a_{l,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{l+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l,p}||a_{l+1,p}|\right]^{-1}}\right].$$

Окончательно имеем

$$\left[r(D,0)\right]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(a_{k,p},0)\prod_{(k,p)\neq(s,q)}\exp g_D(a_{k,p},a_{s,q})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\prod_{l=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{l,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l,p}|\left(\frac{1}{2}R^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\left[r\left(\Omega_0^{(l)},1\right)\prod_{p=1}^{m}r\left(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\right)r\left(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}2^{-\frac{n}{2}}R^{\frac{n^2}{4}}\left(\frac{4}{2m+1}\right)^{\frac{2m+1}{2}}M_R\left(A_{n,m}\right)=$$

$$=\left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n^2}{4}}M_R\left(A_{n,m}\right). \tag{38}$$

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** В силу того, что D удовлетворяет второму условию неналегания, область D имеет обобщенную функцию Грина $g_D(z,a)$ $\forall a\in D$. Образуем множества

$$E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash D,\quad \overline{U}_t=\left\{w\in\mathbb{C}\colon |w|\leqslant t\right\},$$

$$\overline{U}_t^{(1)}=\left\{w\in\mathbb{C}\colon |w|\geqslant\frac{1}{t}\right\},$$

$$E_{k,p}(t)=\left\{w\in\mathbb{C}\colon |w-a_{k,p}|\leqslant t\right\},\qquad k=\overline{1,n},\quad p=\overline{1,m}.$$

При достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$ рассмотрим конденсатор, образованный упорядоченной совокупностью замкнутых множеств,

$$\widehat{\widehat{C}}\left(t,\,D,\,A_{n,m}\right)=\left\{E_0,\,\overline{U}_t,\,\overline{U}_t^{(1)},\,E_{1,1}(t),\ldots,E_{n,m}(t)\right\}, \tag{39}$$

с предписанными значениями $0,\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{2},\ 1,\ 1,\ldots,1$. Емкостью конденсатора (39) называется величина

$$\operatorname{cap}\widehat{\widehat{C}}\left(t,\,D,\,A_{n,m}\right)=\inf\int\int\left[(G_x')^2+(G_y')^2\right]dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G=G(z)$ таких, что $G=0$ в окрестности множества E_0, $G\Big|_{\overline{U}_t}=\frac{n}{2}$, $G\Big|_{\overline{U}_t^{(1)}}=\frac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}}=1$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Модуль конденсатора (39) $|\widehat{\widehat{C}}|$ определим выражением

$$\mid \widehat{\widehat{C}} \mid = \left[\mathrm{cap} \widehat{\widehat{C}} \right]^{-1}. \tag{40}$$

Рассмотрим конденсаторы при достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}\,(t,\, D,\, A_{n,m}) =$$

$$= \Big(E_0^{(l)}(R), E_1^{(l)}(t,R), E_2^{(l)}(t,R), E_{1,1}^{(l)}(t,R), \ldots, E_{n,m}^{(l)}(t,R), \Big), \tag{41}$$

где

$$\begin{gathered} E_0^{(l)}(R) = \zeta_l^{(R)}\left(E_0 \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(E_0 \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*, \\ E_1^{(l)}(t,R) = \zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t \cap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*, \\ E_2^{(l)}(t,R) = \zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t^{(1)} \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t^{(1)} \cap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*, \\ E_{k,p}^{(l)}(t,R) = \zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t) \cap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \cup \left[\zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t) \cap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*. \end{gathered} \tag{42}$$

Таким образом, при разделяющем преобразовании относительно систем углов $\{P_l^{(0)}(A_{n,m})\}_{l=1}^n$ и системы функций $\{\zeta_l^{(R)}\}_{l=1}^n$, $R \in \mathbb{R}^+$, конденсатору $\widehat{\widehat{C}}(t,\, D,$ $A_{n,m})$ сопоставляется набор конденсаторов $\left\{\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t,\, D,\, A_{n,m})\right\}_{l=1}^n$, симметричных относительно $\partial U_1 = \{w\colon |w| = 1\}$. Каждому конденсатору $\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t,\, D,\, A_{n,m})$, $l = \overline{1,n}$, при достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$, $t < R$, сопоставляем класс V_l всех вещественных непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(l)}(t,R)$, $G\Big|_{E_1^{(l)}(t,R)} = \dfrac{n}{2}$, $G\Big|_{E_2^{(l)}(t,R)} = \dfrac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}^{(l)}(t,R)} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. В соответствии с работами [12, 14] получаем неравенство

$$\mathrm{cap}\,\widehat{\widehat{C}}\,(t, D, A_{n,m}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cap}\widehat{\widehat{C_k^{(R)}}}\,(t, D, A_{n,m})\,. \tag{43}$$

Отсюда в соответствии с (40) имеем соотношение

$$\left|\widehat{\widehat{C}}\,(t, D, A_{n,m})\right| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\widehat{\widehat{C_k^{(R)}}}\,(t, D, A_{n,m})\right|^{-1}\right)^{-1}. \tag{44}$$

Из теоремы 1 [13] находим асимптотику модуля $\widehat{\widehat{C}}\,(t, D, A_{n,m})$:

$$\left|\widehat{\widehat{C}}\,(t, D, A_{n,m})\right| = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2 + 2nm}\right)\log\frac{1}{t} + \widehat{\widehat{M}}(D, A_{n,m}) + o(1), \quad t \to 0, \tag{45}$$

где

$$\widehat{\widehat{M}}(D, A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)^2\left[\frac{n^2}{4}\log r(D,0)r(D,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,p})+\right.$$

$$+\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}n\left(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p})\right)+$$

$$\left.+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right]. \tag{46}$$

Учитывая асимптотические выражения из доказательства теоремы 2, второе условие неналегания и теорему 1 работы [13], получаем асимптотические равенства для модулей конденсаторов $\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t,D,A_{n,m})$, $l=\overline{1,n}$:

$$\left|\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t,D,A_{n,m})\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+2m}\right)\log\frac{1}{t}+\widehat{\widehat{M_l^{(R)}}}(D,A_{n,m})+o(1), \quad t\to 0, \tag{47}$$

где

$$\widehat{\widehat{M_l^{(R)}}}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+2m}\right)^2\left[\log\frac{r\big(\Omega_0^{(l)}(R),1\big)}{\left(\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}\right)}\,\frac{r\big(\Omega_\infty^{(l)}(R),-1\big)}{(2R^{\frac{n}{2}})}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\big(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\big)r\big(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\big)}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{l,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l,p}|\right]^{-1}\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{l+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l+1,p}|\right]^{-1}}\right], \quad l=\overline{1,n}. \tag{48}$$

Учитывая равенство (47), непосредственно имеем

$$\left[\sum_{l=1}^{n}\left|\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi nm}\log\frac{1}{t}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\widehat{\widehat{M_k^{(R)}}}(D,A_{n,m})+o(1), \quad t\to 0. \tag{49}$$

Соотношения (43) – (49) приводят к неравенству

$$\widehat{\widehat{M}}(D,A_{n,m}) \leqslant \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\widehat{\widehat{M_k^{(R)}}}(D,A_{n,m}).$$

С учетом (46) и (48) приходим к неравенству вида

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)^2\left\{\log\left(r(D,0)r(D,\infty)\right)^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\times\right.$$

$$\times\exp\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp n\left(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p})\right)\times$$

$$\left.\times\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(n+2m)^2}\times$$

$$\times\log\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{n}\right)^{2m}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}a_{k+1,p}|\times\right.$$

$$\times r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\times$$

$$\left.\times\prod_{p=1}^{m}r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2(n+2m)^2}\log 2^{-2n}\left(\frac{2}{n}\right)^{2nm}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi^2\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|^2\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=1}^{m}r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right\}.$$

Отсюда нетрудно получить

$$\left[r(D,0)r(D,\infty)\right]^{\left(\frac{n}{2}\right)}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\times$$

$$\times\exp\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp n\left(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p})\right)\times$$

$$\times\prod_{(k,p)\neq(s,q)}\exp g_D(a_{k,p},a_{s,q})\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\left(\frac{n}{4}\right)^{2n}\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{(2m+2)n}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi^2\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$= \left(\frac{n}{4}\right)^n \left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|.$$

Теорема 4 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тогда для произвольной (n,m)-равнолучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и любого открытого множества D, $\{0,\infty\} \cup A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего второму условию неналегания относительно $A_{n,m}$, выполняется неравенство*

$$\left[r(D,0)r(D,\infty)\right]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p}) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{4}\right)^n \left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)} M_R(A_{n,m}),$$

знак равенства в котором достигается, в частности, когда 0, ∞, $\{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и D являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (8).

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5.** – С. 159 – 245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
4. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
5. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
6. *Тамразов П. М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**. – № 5. – С. 1033 – 1043.
7. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21 – 27.
8. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
9. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.
10. *Кузьмина Г. В.* Методы геометрической теории функций. I, II // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, № 3. – С. 41 – 103; № 5. – С. 1 – 50.
11. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168.** – С. 48 – 66.
12. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – С. 3 – 76.
13. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1997. – **237**. – С. 56 – 73.
14. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Уч. пос. – Владивосток: Изд. Дальневост. ун-та, 2003. – 116 с.
15. *Tsuji M.* Potential theory in modern function theory. – Tokyo, 1959. – 590 p.
16. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7 – 13.

Получено 09.08.07