УДК 517.988

А. С. Миненко (Ин-т пробл. искусств. интеллекта НАН Украины, Донецк)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА МЕТОДОМ РИТЦА

A plane stationary convective Stefan problem is analyzed in the case where the convection is caused by the presence of a prescribed rotation of intensity μ. A method of studying this problem is proposed which consists in a series expansion of the solution in terms of powers of a small parameter μ. The null expansion term is defined by the Rietz method. The formula describing the dependence of free boundary equation on μ is obtained.

Досліджується плоска стаціонарна конвективна задача Стефана, коли конвекція викликана наявністю заданого вихору інтенсивності μ. Запропоновано метод вивчення цієї задачі, що полягає у розвиненні розв'язку в ряд за степенями малого параметра μ. При цьому нульовий член розкладу знаходиться методом Рітца. Доведено формулу залежності рівняння вільної границі від μ.

Процессы кристаллизации, встречающиеся в природе, сопровождаются конвективными перемешиваниями в жидкой фазе. Ниже будет приведена постановка задачи, в которой конвекция вызвана наличием заданного вихря. Основная цель статьи состоит в приближенном анализе свободной границы в зависимости от интенсивности вихря.

Анализ имеющихся результатов и библиографию по данному классу задач конвективной теплопроводности можно найти в [1, 2].

1. Постановка задачи. Будем рассматривать стационарный случай в полосе $D = \{-1 < x < 1,\ H < y < 0\}$. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой D_γ^-, при этом концы γ лежат на вертикалях $x = \pm 1$. Будем считать, что температурное поле монотонно убывает вместе с вертикальной координатой y. Таким образом, в нижней части полосы будет расположена твердая фаза, а в верхней — жидкая. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y. Пусть $\psi(x, y)$ — функция тока, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \mu, \qquad (x, y) \in D_\gamma^+, \quad \mu = \text{const}. \tag{1}$$

Здесь μ — заданный достаточно малый численный параметр. Граничным условием для функции ψ является следующее:

$$\psi = 0, \qquad (x, y) \in \partial D_\gamma^+. \tag{2}$$

Если $\mu = 0$, то соответствующая функция тождественно равна нулю, и, таким образом, в жидкой фазе конвекции нет. Кроме того, в жидкой фазе, температуру которой обозначим через $u^+(x, y)$, должно выполняться уравнение конвективного теплопереноса

$$\lambda_+\left(\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial u^+}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u^+}{\partial y} = 0, \qquad (x, y) \in D_\gamma^+, \quad \lambda_+ = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Будем предполагать выполненными следующие граничные условия на температуру u^+:

$$u^+(x, 0) = v, \quad -1 \le x \le 1, \quad v = \text{const} > 1, \tag{4}$$

на вертикальной части границы жидкой фазы выполняется условие третьего рода

$$u_x^+ + \omega_0^+ u^+ = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^+, \tag{5}$$

на свободной границе γ — условие

$$u^+(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma. \tag{6}$$

Перейдем к описанию твердой фазы. Обозначим через u^- температуру твердой фазы. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D_\gamma^-. \tag{7}$$

На вертикальной части границы твердой фазы зададим условие третьего рода

$$u_x^- + \omega_0^- u^- = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^-. \tag{8}$$

При $y = H$ будем считать, что

$$u^-(x, H) = 0, \tag{9}$$

тогда как на свободной границе

$$u^-(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma. \tag{10}$$

Если бы кривая γ была заданной, то приведенные соотношения корректно определяли бы задачу. В силу же того, что γ подлежит определению, на ней задается еще одно условие, а именно, закон сохранения энергии

$$\left|\nabla u^-\right|^2 - \kappa^2 \left|\nabla u^+\right|^2 = 0, \quad (x, y) \in \gamma, \quad \kappa = \text{const}, \quad 0 < \kappa \le 1. \tag{11}$$

Задача (1) – (11) нелинейна и „основное” неизвестное — это граница γ. Отметим также, что разрешимость подобного класса задач изложена в [1].

В настоящей работе предложен метод изучения задачи (1) – (11), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ.

2. Линеаризация задачи по интенсивности вихря. Предположим, что неизвестные рассматриваемой задачи можно представить в виде степенного ряда по μ:

$$\begin{aligned} \psi(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \psi_k(x, y), \\ u^+(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^+(x, y), \\ u^-(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^-(x, y). \end{aligned} \tag{12}$$

Будем считать, что свободная граница γ допускает явное представление

$$y = y(x, \mu), \quad -1 \le x \le 1, \tag{13}$$

причем

$$y(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x), \quad -1 \le x \le 1. \tag{14}$$

Подставляя эти разложения в соотношения (1) – (11) и приравнивая члены при одинаковых степенях μ, получаем бесконечное число задач. Запишем вначале нулевое приближение, соответствующее μ в нулевой степени. Прежде всего из уравнения (1) получаем, что функция $\psi_0(x, y)$ гармонична. Поскольку она удовлетворяет нулевым граничным условиям Дирихле, то $\psi_0(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_\gamma^+}$. Приведем теперь условия, определяющие u_0^+:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^\pm, \\
u_0^+(x, 0) = v, \quad -1 \le x \le 1, \\
u_{0x}^\pm(x, y) + \omega_0^\pm u_0^\pm(x, y) = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^\pm, \\
u_0^\pm(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma_0, \\
u_0^-(x, H) = 0, \quad -1 \le x \le 1, \\
\left|\nabla u_0^-\right|^2 - \kappa^2 \left|\nabla u_0^+\right|^2 = 0, \quad (x, y) \in \gamma_0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Задача (15) рассмотрена в статьях [3, 4]. Из результатов этих работ следует, что эта задача имеет, и притом единственное, классическое решение в классе функций $u_{0y}^+ > 0$, $u_{0y}^- > 0$ соответственно в $D_{\gamma_0}^+$ и $D_{\gamma_0}^-$. При этом граница γ_0 является аналитической кривой, монотонно возрастающей в правой половине, а функции $u_0^+(x, y)$, $u_0^-(x, y)$ непрерывны в $\overline{D_{\gamma_0}^+}$ и $\overline{D_{\gamma_0}^-}$ соответственно и непрерывно дифференцируемы всюду, за исключением угловых точек.

Рассмотрим частный случай данной задачи:

$$\kappa = 1, \qquad \omega_0^+ = \omega_0^- = \omega_0. \tag{16}$$

При этом первое условие всегда выполнимо, если ввести замену

$$\tilde{u}^\pm = \begin{cases} \kappa u^+(x, y), & (x, y) \in D_\gamma^+, \\ u^-(x, y) + \kappa - 1, & (x, y) \in D_\gamma^-, \end{cases}$$

которая приводит задачу (15) к случаю $\kappa = 1$. Тогда на γ_0 будут выполняться два условия: $u_0^+ = u_0^- = 1$ и $\left|\nabla u_0^+\right| = \left|\nabla u_0^-\right|$. Следовательно, теперь (15) — это обычная задача о распределении температуры в области D без фазовых превращений вещества. Поэтому можно построить функцию $u_0(x, y)$ по формуле

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_0^+(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^+}, \\ u_0^-(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^-}, \end{cases} \tag{17}$$

которая является решением задачи

$$\begin{gathered}
\Delta u_0 = 0, \quad (x, y) \in D, \quad u_0(x, y) = v, \quad 0 \le x \le 1, \quad u_{0x}(0, y) = 0, \quad H \le y \le 0, \\
u_0(x, H) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad u_{0x}(1, y) + \omega_0 u_0(1, y) = 0, \quad H \le y \le 0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Функция $u_0(x, y)$ может быть эффективно найдена, например, с помощью метода Фурье. Относительно функции $u_0(x, y)$ можно заключить, что $u_{0y}(x, y) >$ > 0 в D (см. теорему 4.3 в [1]). Следовательно, уравнение $u_0(x, y) - 1 = 0$, $(x, y) \in D$, всегда разрешимо в виде некоторой функции $y = y_0(x)$, задающей кривую γ_0, т. е. $\gamma_0 : y = y_0(x)$, $-1 \le x \le 1$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (16). *Тогда функция* $u_0(x, y)$, *определенная соотношениями* (17), (18), *является нулевым приближением* (*по интенсивности вихря* μ) *задачи* (1) – (11).

При этом $u_{0y}(x, y) > 0$ в D и $u_0(x, y)$ непрерывна вместе с производными при переходе через γ_0, где $\gamma_0 : y = y_0(x)$, $-1 \le x \le 1$, — решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$.

3. Первое приближение. Запишем краевую задачу, которая соответствует множителю μ в первой степени. Из условий (1) – (11) и из разложений (12) – (14) для функций $\psi_1(x, y)$ и $u_1^{\pm}(x, y)$ вытекает следующая задача:

$$\psi_{1xx} + \psi_{1yy} = 1, \quad (x, y) \in D^{+}_{\gamma_0}, \tag{19}$$

$$\psi_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D^{+}_{\gamma_0}, \tag{20}$$

$$\lambda_{+}\left(u^{+}_{1xx} + u^{+}_{1yy}\right) - \psi_{1y} u^{+}_{0x} + \psi_{1x} u^{+}_{0y} = 0, \quad (x, y) \in D^{+}_{\gamma_0}, \tag{21}$$

$$u_1^{+}(x, 0) = 0, \quad -1 \le x \le 1, \tag{22}$$

$$u^{\pm}_{1x} + \omega_0^{\pm} u_1^{\pm} = 0, \qquad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D^{\pm}_{\gamma_0}, \tag{23}$$

$$u^{\pm}_{0y} y_1(x) + u_1^{\pm}\Big|_{\gamma_0} = 0, \tag{24}$$

$$u^{-}_{1xx} + u^{-}_{1yy} = 0, \quad (x, y) \in D^{-}_{\gamma_0}, \tag{25}$$

$$u_1^{-}(x, H) = 0, \quad -1 \le x \le 1. \tag{26}$$

Кроме того, на γ_0 должно выполняться условие

$$y_1(x)\Big[\left(u^{-}_{0x} u^{-}_{0xy} + u^{-}_{0y} u^{-}_{0yy}\right) - \kappa^2\left(u^{+}_{0x} u^{+}_{0xy} + u^{+}_{0y} u^{+}_{0yy}\right)\Big] + \Big[u^{-}_{0x} u^{-}_{1x} + u^{-}_{0y} u^{-}_{1y}\Big] -$$

$$- \kappa^2\Big[u^{+}_{0x} u^{+}_{1x} + u^{+}_{0y} u^{+}_{1y}\Big] = 0, \quad (x, y) \in \gamma_0. \tag{27}$$

Получившееся первое приближение имеет следующие характерные черты. Во-первых, эта задача линейна, во-вторых, ее нужно решать в известной области, соответствующей нулевому приближению. После того, когда функции $u_0^{\pm}(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ определены соответственно в областях $D^{\pm}_{\gamma_0}$ и $D^{+}_{\gamma_0}$, из соотношений (21) – (27) находим функции $u_1^{\pm}(x, y)$, заданные в тех же областях $D^{\pm}_{\gamma_0}$ и $y_1(x)$, $-1 \le x \le 1$.

4. Построение нулевого приближения вариационным методом. Задача (15) эквивалентна проблеме минимума следующего интегрального функционала:

$$I(u^{+}, u^{-}, \gamma_0) = \iint\limits_{D^{-}_{\gamma_0}} \left[u_x^{-2} + u_y^{-2}\right] dx dy + \kappa^2 \iint\limits_{D^{+}_{\gamma_0}} \left[u_x^{+2} + u_y^{+2}\right] dx dy +$$

$$+ \kappa^2 \omega_0^{+} \int\limits_{\Gamma^{+}_{\gamma}} \left[u^{+2} - 1\right] dy + \omega_0^{-} \int\limits_{\Gamma^{-}_{\gamma}} \left[u^{-2} - 1\right] dy \tag{28}$$

на соответствующем множестве допустимых функций [3]. Здесь $\Gamma^{+}_{\gamma} = \partial D^{+}_{\gamma} \cap \cap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma^{-}_{\gamma} = \partial D^{-}_{\gamma} \cap \{x = \pm 1\}$. Придерживаясь методики Фридрихса [5], представим функционал (28) в классе функций $u_y^{\pm} > 0$ в $D_{\gamma}^{\pm}$ следующим образом [6]:

$$I_1(y_1, y_2) = \int\limits_{\Delta_1}\int \frac{1+y_{1x}^2}{y_{1u}}\,dxdu + \kappa^2 \int\limits_{\Delta_2}\int \frac{1+y_{2x}^2}{y_{2u}}\,dxdu + \omega_0^{+}\kappa^2 \int\limits_1^{v} (u^2-1)\big[y_{2u}(1,u) +$$

$$+ y_{2u}(-1,u)\big]du + \omega_0^{-} \int\limits_0^1 (u^2-1)\big[y_{1u}(1,u) + y_{1u}(-1,u)\big]du, \qquad (29)$$

где

$$\Delta_1 = (-1 < x < 1,\ 0 < u < 1), \qquad \Delta_2 = (-1 < x < 1,\ 1 < u < v),$$

$y_1(x,u)$ и $y_2(x,u)$ — решения уравнений $u_1(x,y) - u_1 = 0$, $u_2(x,y) - u_2 = 0$. Функционал (28) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2, \qquad (30)$$

где

$$\Omega_1 = \left\{ y_1(x,u) \colon y_1(x,u) \in C^1(\overline{\Delta}_1),\ \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_1} y_{1u} > 0,\ y_1(x,0) = H,\ y_1(x,1) = y_2(x,1) \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ y_2(x,u) \colon y_2(x,u) \in C^1(\overline{\Delta}_2),\ \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_2} y_{2u} > 0,\ y_2(x,v) = 0,\ y_1(x,1) = y_2(x,1) \right\}.$$

Далее, пусть функции $y_1^*(x,u)$, $y_2^*(x,u)$ соответствуют классическому решению (u^+, u^-, γ) задачи (15). Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пара функций* y_1^*, y_2^* *доставляет наименьшее значение функционалу* (29) *на множестве* (30).

Доказательство. Используя формулу Фридрихса [5], получаем

$$I_1(y_1, y_2) = I_1(y_1^*, y_2^*) + \frac{d}{d\varepsilon} I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})\Big|_{\varepsilon=0} + \int\limits_0^1 (1-\varepsilon)\frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2}\,d\varepsilon,$$

где

$$\frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} = 2\iint\limits_{\Delta_1} \left[\delta y_{1u}^2 + (y_{1\varepsilon u}\delta y_{1x} - y_{1\varepsilon x}\delta y_{1u})^2\right]\frac{dxdu}{y_{1\varepsilon u}^3} +$$

$$+ 2\iint\limits_{\Delta_2} \left[\delta y_{2u}^2 + (y_{2\varepsilon u}\delta y_{2x} - y_{2\varepsilon x}\delta y_{2u})^2\right]\frac{dxdu}{y_{2\varepsilon u}^3},$$

(y_1, y_2) — произвольный элемент из Ω, $y_{1\varepsilon} = y_1^* + \varepsilon(y_1 - y_1^*)$, $y_{2\varepsilon} = y_2^* + \varepsilon(y_2 - y_2^*)$, $0 \le \varepsilon \le 1$. Учитывая теперь, что первая вариация функционала $I_1(y_1, y_2)$, вычисленная на элементе (y_1^*, y_2^*), равна нулю, заключаем, что пара (y_1^*, y_2^*) доставляет наименьшее значение функционалу (29) на множестве (30), так как $d^2 I_1 / d\varepsilon^2$ — положительно определенный функционал на вариациях $\delta y_1 = y_1 - y_1^*$, $\delta y_2 = y_2 - y_2^*$.

Лемма доказана.

Будем минимизировать функционал (29) на множестве (30) с помощью сумм

$$y_{1n}(x,u;a_{kj}) = y_{1n}(x,u) = \sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{T_j} a_{kj}x^{2j}u^k + H, \quad (x,u)\in\overline{\Delta}_1,$$
$$y_{2n}(x,u;b_{kj}) = y_{2n}(x,u) = \frac{\upsilon-u}{\upsilon-1}\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj}x^{2j}u^k, \quad (x,u)\in\overline{\Delta}_2, \tag{31}$$
$$n = \sup_{0\le j\le L}\left\{2j+T_j;\ 2j+\Theta_j\right\}.$$

Включение $(y_{1n}, y_{2n})\in\Omega$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов (a_{kj}, b_{kj}) область допустимости Ω_r, где

$$r = \sum_{j=0}^{L}\left(T_j+\Theta_j+1\right), \qquad \Omega_r = \tilde{\Omega}_1 \oplus \tilde{\Omega}_2 \cap E^0,$$
$$\tilde{\Omega}_1 = \left\{a_{kj} : \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_1} y_{1nu} > 0\right\}, \qquad \tilde{\Omega}_2 = \left\{b_{kj} : \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_2} y_{2nu} > 0\right\},$$

при этом коэффициенты (a_{kj}, b_{st}) должны лежать в гиперплоскостях

$$E_0^0 : H + \sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} = \sum_{k=0}^{\Theta_0} b_{k0}, \qquad E_j^0 : \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} = \sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj},$$

т. е. $E^0 = E_0^0 \oplus E_1^0 \oplus \ldots \oplus E_L^0$.

Неизвестные коэффициенты (a_{kj}, b_{st}) и множитель Лагранжа λ_t определяются из нелинейной системы Ритца

$$\begin{gathered}
\frac{\partial I_2(a_{kj},b_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda_q = 0, \quad p = 1,2,\ldots,T_q; \quad q = 0,1,\ldots,L,\\
\frac{\partial I_2(a_{kj},b_{kj})}{\partial b_{st}} - \lambda_t = 0, \quad s = 0,1,\ldots,\Theta_t; \quad t = 0,1,\ldots,L,\\
\sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} - \sum_{k=0}^{\Theta_0} b_{k0} + H = 0, \qquad \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} - \sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,L,\\
I_2(a_{kj},b_{kj}) = I_1\left(\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{T_j} a_{kj}x^{2j}u^k + H;\ \frac{\upsilon-u}{\upsilon-1}\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj}x^{2j}u^k\right).
\end{gathered} \tag{32}$$

Можно установить, что функция $I_2(a_{kj}, b_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке (a_{kj}^*, b_{kj}^*) множества Ω_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [7]. Следовательно, в точке (a_{kj}^*, b_{kj}^*) частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа равны нулю. Таким образом, система уравнений (32) имеет решение.

Итак, решив систему уравнений (32) при каждом n, можно затем построить последовательность приближений (31) в виде $y_{1n}(x,u;a_{kj}^*) = y_{1n}^*$, $y_{2n}(x,u;b_{kj}^*) = y_{2n}^*$.

Лемма 3. *Приближения* y_{1n}^*, y_{2n}^*, *построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала* (29) *на множестве* (30).

Доказательство. Пусть пара y_1^*, y_2^* доставляет наименьшее значение функционалу (29) на множестве (30). При этом справедливы представления

$$y_1^*(x,u) = u\eta_1(x,u) + H, \qquad y_2^*(x,u) = (v-u)\eta_2(x,u) = \frac{v-u}{v-1}\tilde{\eta}_2(x,u),$$

где $\eta_1 \in C^1(\overline{\Delta}_1)$, $\tilde{\eta}_2 \in C^1(\overline{\Delta}_2)$, $\eta_1(x,0) \neq 0$, $\eta_2(x,v) \neq 0$. В силу теоремы Вейерштрасса функции $\eta_1(x,u)$ и $\tilde{\eta}_2(x,u)$ могут быть аппроксимированы многочленами в норме пространств $C^1(\overline{\Delta}_1)$ и $C^1(\overline{\Delta}_2)$ соответственно. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и пусть $P_n(x,u)$, $Q_n(x,u)$ — многочлены такие, что

$$\|\eta_1(x,u) - P_n(x,u)\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} < \varepsilon, \qquad \|\tilde{\eta}_2(x,u) - Q_n(x,u)\|_{C^1(\overline{\Delta}_2)} < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left\|y_1^*(x,u) - uP_n(x,u) - H\right\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} = \|u[\eta_1(x,u) - P_n(x,u)]\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} < C\varepsilon,$$

$$\left\|y_2^*(x,u) - \frac{v-u}{v-1}Q_n(x,u)\right\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} = \left\|\frac{v-u}{v-1}[\tilde{\eta}_2(x,u) - Q_n(x,u)]\right\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)} < C\varepsilon,$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Покажем теперь, что функции

$$f_1 = uP_n(x,u) + H, \qquad f_2 = \frac{v-u}{v-1}Q_n(x,u)$$

можно считать допустимыми, т. е. $f_1 \in \Omega_1$, $f_2 \in \Omega_2$. Действительно, если $f_1(x,1) \neq f_2(x,1)$, то, положив

$$H + \sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} - \sum_{k=0}^{\Theta_0} b_{k0} = \varepsilon_0, \qquad \sum_{k=0}^{T_j} a_{kj} - \sum_{k=1}^{\Theta_j} b_{kj} = \varepsilon_j, \quad \tilde{a}_{T_j j} = a_{T_j j} - \varepsilon_j,$$

$$\tilde{a}_{T_0 0} = a_{T_0 0} - \varepsilon_0, \quad a_{kj} = \tilde{a}_{kj}$$

(если $k \neq T_j$, $j = 1, 2, \ldots, L$), построим многочлен $\tilde{P}_n(x,u)$ такой, что $\tilde{f}_1(x,1) = f_2(x,1)$, где

$$\tilde{f}_1(x,u) = u\tilde{P}_n(x,u) + H = \sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{T_j} \tilde{a}_{kj} x^{2j} u^k + H,$$

при этом норма $\left\|f_1 - \tilde{f}_1\right\|_{C^1(\overline{\Delta}_1)}$ достаточно мала, так как изначально все величины ε_j можно выбрать малыми.

Далее, имеем $\min y_{1u}^* > 0$ при $(x,u) \in \overline{\Delta}_1$ и $\min y_{2u}^* > 0$ при $(x,u) \in \overline{\Delta}_2$. Следовательно, по крайней мере, начиная с некоторого большого номера N $\min f_{1u} > 0$ при $(x,u) \in \overline{\Delta}_1$ и $\min f_{2u} > 0$ при $(x,u) \in \overline{\Delta}_2$. Итак, получаем $f_1 \in \Omega_1$, $f_2 \in \Omega_2$.

Далее, действуя аналогично [7], [8] (см. лемму 6), построим цепочку неравенств

$$I_1(y_{1n}^*, y_{2n}^*) - d \leq I_1(y_{1n}, y_{2n}) - d \leq I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) < \tilde{\varepsilon},$$

где d — наименьшее значение функционала (29) на множестве (30),

$$y_{1n} = u\tilde{P}_n(x,u) + H, \qquad y_{2n} = \frac{v-u}{v-1}Q_n(x,u), \quad \text{а} \quad d = I_1(y_1^*, y_2^*)$$

в силу леммы 1. Отсюда вследствие произвольности числа $\tilde{\varepsilon}$ следует утверждение леммы.

Используя тождество $y \equiv y(x, u(x,y))$, получаем формулы

$$u_x = -\frac{y_x}{y_u}, \qquad u_y = \frac{1}{y_u}, \qquad u_{xx} = -\left(\frac{y_x}{y_u}\right)'_x + \left(\frac{y_x}{y_u}\right)'_u \frac{y_x}{y_u}, \qquad u_{yy} = \left(\frac{1}{y_u}\right)'_u \frac{1}{y_u}.$$

В терминах функций $y_1(x,u)$, $y_2(x,u)$ задача (1) – (11) примет вид

$$-\left(\frac{y_{1x}}{y_{1u}}\right)_x + \left(\frac{y_{1x}}{y_{1u}}\right)_u \frac{y_{1x}}{y_{1u}} + \left(\frac{1}{y_{1u}}\right)_u \frac{1}{y_{1u}} = 0,$$

$$(x,u) \in \Delta_1, \quad y_1(x,0) = H, \quad -1 \le x \le 1,$$

$$-\frac{y_{1x}}{y_{1u}} \pm \omega_0^+ u = 0, \qquad x = \pm 1, \qquad 0 \le u \le 1,$$

$$-\left(\frac{y_{2x}}{y_{2u}}\right)_x + \left(\frac{y_{2x}}{y_{2u}}\right)_u \frac{y_{2x}}{y_{2u}} + \left(\frac{1}{y_{2u}}\right)_u \frac{1}{y_{2u}} = 0,$$

$$(x,u) \in \Delta_2, \quad y_2(x,v) = 0, \quad -1 \le x \le 1,$$

$$-\frac{y_{2x}}{y_{2u}} \pm \omega_0^- u = 0, \quad x = \pm 1, \quad 1 \le u \le v, \quad y_1(x,1) = y_2(x,1),$$

$$\frac{y_{1x}^2}{y_{1u}^2} + \frac{1}{y_{1u}^2} = \kappa^2\left(\frac{y_{2x}^2}{y_{2u}^2} + \frac{1}{y_{2u}^2}\right), \quad u = 1.$$

Очевидно, что решение этой задачи будет зависеть от параметров ω^+, ω^- и κ: $y_1 = y_1(x,u;\omega_0^+,\omega_0^-,\kappa)$, $y_2 = y_2(x,u;\omega_0^+,\omega_0^-,\kappa)$.

Исследуем теперь зависимость коэффициентов Ритца a_{kj} и b_{kj} от чисел ω_0^+, ω_0^- и κ.

Лемма 4. *Пусть система Ритца* (32) *имеет решение при некоторых значениях параметров* $\omega_0^+ = \tilde{\omega}_0^+$, $\omega_0^- = \tilde{\omega}_0^-$, $\kappa = \tilde{\kappa}$. *Тогда решения этой системы* $a_{kj}(\omega_0^+,\omega_0^-,\kappa)$, $b_{kj}(\omega_0^+,\omega_0^-,\kappa)$ *непрерывно зависят от параметров* ω_0^+, ω_0^-, κ *в некоторой окрестности точки* $(\tilde{\omega}_0^+,\tilde{\omega}_0^-,\tilde{\kappa})$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 в работе [9].

Последовательность функций $y_{1n}(x,u)$, $y_{2n}(x,u)$, построенная с помощью метода Ритца, позволяет для задачи (15) приближенно найти свободную границу γ_n и линии уровня $y_{1n}(x,c)$, $y_{2n}(x,c)$ функций $u_{1n}(x,y)$, $u_{2n}(x,y)$. При этом имеем

$$y_{1n}(x,c) = \sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{T_j} a_{kj}x^{2j}c^k + H, \quad 0 \le c \le 1,$$

$$y_{2n}(x,c) = \frac{v-c}{v-1}\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=0}^{\Theta_j} b_{kj}x^{2j}c^k, \quad 1 \le c \le v,$$

$$\frac{\partial u_{1n}}{\partial x} = -\frac{\partial y_{1n}}{\partial x}\Big/\frac{\partial y_{1u}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial u_{1n}}{\partial y} = 1\Big/\frac{\partial y_{1n}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial u_{2n}}{\partial x} = -\frac{\partial y_{2n}}{\partial x}\Big/\frac{\partial y_{2u}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial u_{2n}}{\partial y} = 1\Big/\frac{\partial y_{2n}}{\partial u},$$

где $(u_{1n}, u_{2n}, \gamma_n)$ — приближенное решение задачи (15).

Построим теперь в области D функции $u_n(x, y)$ следующим образом:

$$u_n(x,y) = \begin{cases} u_{1n}(x, y), & (x, y) \in \overline{D^-_{\gamma_n}}, \\ u_{2n}(x, y), & (x, y) \in \overline{D^+_{\gamma_n}}. \end{cases} \tag{33}$$

Перейдем к исследованию сходимости приближений (31).

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (16). *Тогда последовательность приближений* (33) *сходится к решению* $u_0(x, y)$ *задачи* (15) *по норме в* $W_2^1(D)$, $W_2^1(D^+_{\gamma_0})$ *и* $W_2^1(D^-_{\gamma_0})$.

Доказательство. Последовательность многочленов (31), коэффициенты которых удовлетворяют системе (32), образует минимизирующую последовательность y_{1n}, y_{2n} для функционала (29) на множестве (30). Следовательно, имеем $\varepsilon_n = I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) \to 0$ при $n \to \infty$, так как согласно лемме 1 пара (y_1^*, y_2^*) доставляет наименьшее значение функционалу $I_1(y_1, y_2)$ на множестве Ω.

Далее, последовательности (y_{1n}, y_{2n}) в плоскости (x, u) соответствует последовательность (u_{1n}, u_{2n}) в плоскости (x, y). Тогда имеем

$$\tilde I(u_0 + \eta) = \tilde I(u_0) + \tilde I(\eta) + 2\tilde I(u_0, \eta), \qquad \eta = u_n - u_0,$$

где

$$\tilde I(u_0) = \iint\limits_D |\nabla u_0|^2\, dx\,dy + \omega_0 \int\limits_H^0 \left[\left(u_0^2(1, y) - 1\right) + \left(u_0^2(-1, y) - 1\right)\right] dy,$$

$$\tilde I(\eta) = \iint\limits_D |\nabla \eta|^2\, dx\,dy + \omega_0 \int\limits_H^0 \left[\left(\eta^2(1, y) - 1\right) + \left(\eta^2(-1, y) - 1\right)\right] dy,$$

$$\tilde I(u_0, \eta) = 2\iint\limits_D (u_{0x}\eta_x + u_{0y}\eta_y)\, dx\,dy + 2\omega_0 \int\limits_H^0 [u_0(1, y)\eta + u_0(-1, y)\eta]\, dy.$$

Учитывая, что

$$\tilde I(u_0 + \eta) - \tilde I(u_0) = I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и } I(u_0, \eta) = 0,$$

получаем утверждение теоремы.

***Замечание* 1.** Поскольку функции y_{1n} и y_{2n}, в силу леммы 4, непрерывно зависят от ω_0^+, ω_0^- и κ в некоторой окрестности точки $\omega_0^+ = \omega_0$, $\omega_0^- = \omega_0$ и $\kappa = 1$, то и теорема сохранит смысл в некоторой малой окрестности $U(\omega_0, \omega_0, 1)$ в пространстве параметров $(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$. Следовательно, получим сходимость u_n по норме в $W_2^1(D)$, $W_2^1(D^+_{\gamma_0})$ и $W_2^1(D^-_{\gamma_0})$ для всех $(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa) \in U(\omega_0, \omega_0, 1)$.

5. Исследование первого приближения. Далее рассмотрим первое приближение $(\psi_1, u_1^+, u_1^-, \gamma_1)$ задачи (1) – (11). В силу свойств непрерывности функции $u_0(x,y)$ и ее производных на γ условие (27) можно записать в таком виде:

$$u_{0x}u_{1x}^- + u_{0y}u_{1y}^- = u_{0x}u_{1x}^+ + u_{0y}u_{1y}^+, \qquad (x,y)\in\gamma_0, \tag{34}$$

кроме того, на γ_0, как и раньше, должно выполняться условие

$$u_1^+ = u_1^-, \quad (x,y)\in\gamma_0. \tag{35}$$

Покажем, что на γ_0 справедливы равенства

$$u_{1x}^+ = u_{1x}^-, \qquad u_{1y}^+ = u_{1y}^-, \quad (x,y)\in\gamma_0. \tag{36}$$

Действительно, дифференцируя соотношение (35) по x, получаем

$$u_{1x}^- + u_{1y}^- y_0'(x) = u_{1x}^+ + u_{1y}^+ y_0'(x).$$

Учитывая теперь, что $u_{0x} + u_{0y}y_0'(x) = 0$, на γ_0 имеем

$$u_{0y}u_{1x}^- - u_{0x}u_{1y}^- = u_{0y}u_{1x}^+ - u_{0x}u_{1y}^+. \tag{37}$$

Здесь воспользуемся также непрерывностью функции $u_0(x, y)$ и ее производных на γ_0. Тогда из соотношений (34) и (37) следует

$$u_{0x}(u_{1x}^- - u_{1x}^+) + u_{0y}(u_{1y}^- - u_{1y}^+) = 0,$$

$$u_{0y}(u_{1x}^- - u_{1x}^+) - u_{0x}(u_{1y}^- - u_{1y}^+) = 0.$$

Рассматривая эти равенства как уравнения относительно $(u_{1x}^- - u_{1x}^+)$ и $(u_{1y}^- - u_{1y}^+)$, получаем $u_{1x}^- - u_{1x}^+ = 0$, $u_{1y}^- - u_{1y}^+ = 0$, $(x,y)\in\gamma_0$, так как определитель этой системы $\Delta = -(u_{0x}^2 + u_{0y}^2)$ отличен от нуля в D. Следовательно, равенства (36) справедливы.

Таким образом, в силу соотношений (35) и (36) для первого приближения можно ввести функцию $u_1(x,y)$ по формуле

$$u_1(x,y) = \begin{cases} u_1^+(x, y), & (x, y)\in \overline{D_{\gamma_0}^+}, \\ u_1^-(x, y), & (x, y)\in \overline{D_{\gamma_0}^-}. \end{cases} \tag{38}$$

Очевидно, что эта функция является решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in D; \qquad u(x,0) = 0, \quad u(x,H) = 0, \quad 0 \le x \le 1; \\ u_x(0,y) = 0, \quad H \le y \le 0; \qquad u_x + \omega_0 u = 0, \quad x = 1, \quad H \le y \le 0, \end{gathered} \tag{39}$$

где $f(x,y) = \psi_{1y}u_{0x} - \psi_{1x}u_{0y}$ при $(x,y)\in D_{\gamma_0}^+$ и $f(x,y) = 0$ при $(x,y)\in D_{\gamma_0}^-$.

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (16). *Тогда функция* $u_1(x,y)$ *является решением задачи* (19) – (27). *При этом функции* $u_1(x,y)$, $u_1^+(x,y)$ *и* $u_1^-(x,y)$ *связаны между собой равенством* (38).

Зная функции $u_0(x,y)$ и $u_1(x,y)$, из соотношения (24) находим

$$y_1(x) = -\frac{u_1(x,y)}{u_{0y}(x,y)}, \qquad (x,y)\in\gamma_0.$$

Следовательно, при малых μ получаем представление

$$y(x,\mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + 0(\mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1(x,y)}{u_{0y}(x,y)} + 0(\mu), \quad (x,y) \in \gamma_0. \tag{40}$$

Соотношение (40) позволяет в первом приближении исследовать зависимость свободной границы γ от μ и выявить насколько существенно конвекция влияет на геометрию фронта кристаллизации.

Теорема 2. *Пусть величина* μ *достаточно мала и имеет место соотношение* (16). *Тогда справедливо представление* (40), *где функции* $u_0(x,y)$ *и* $u_1(x,y)$ *являются решениями задач соответственно* (19) *и* (39), *а* $y_0(x)$ — *решение уравнения* $u_0(x,y) - 1 = 0$ *в классе функций* $u_{0y} > 0$ *в* D.

***Замечание* 2.** В общем случае, когда условие (16) не выполняется, вместо формулы (40) при малых μ используется представление

$$y(x,\mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + 0(\mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1^{\pm}(x,y)}{u_{0y}^{\pm}(x,y)} + 0(\mu), \quad (x,y) \in \gamma_0.$$

1. *Данилюк И. В.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 133 – 185.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
3. *Базалий Б. В., Шелепов В. Ю.* Об одной стационарной задаче Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 5 – 8.
4. *Базалий Б. В., Шелепов В. Ю.* Об одном обобщении стационарной задачи Стефана // Мат. физика. – 1975. – Вып. 27. – С. 65 – 80.
5. *Friedrichs K. O.* Uber ein Minimumproblem fur Potentialstromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**. – S. 60 – 82.
6. *Миненко А. С.* Об одной оптимизационной задаче // Мат. физика. – 1978. – Вып. 23. – С. 74 – 77.
7. *Миненко А. С.* Осесимметрическое течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477 – 488.
8. *Данилюк И. В., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291 – 294.
9. *Данилюк И. В., Миненко А. С.* Об одной оптимизационной задаче со свободной границей // Там же. – 1976. – № 5. – С. 389 – 392.

Получено 22.02.06