УДК 519.21

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков, Т. В. Каданкова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДВУХГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Main two-boundary problems for a random walk are solved. The generating function of the joint distribution of the first exit time from the interval and the value of the overshoot by the random walk is determined. We also obtain the generating function of the joint distribution of the first exit time into the interval and the value of the random walk at this time. The joint distrubtion of supremum, infimum and the value of the random walk is established and the distribution of the number of upwards and downwards intersections of the interval is determined on a geometrically distributed time interval. We also determine the generating function of the joint distribution of the number of entrances into the interval and the number of overleaps of the random walk through the interval. Finally, we give examples of application of the obtained results to a random walk with one-sided exponentially distributed jumps.

Розв'язано основні двограничні задачі для випадкового блукання. Наведено генератриси сумісних розподілів: моменту першого виходу блукання з інтервалу і величини перестрибу границі в момент виходу, моменту першого входження блукання в інтервал та його значення в момент входження. На геометрично розподіленому часовому проміжку отримано розподіли: supremum'а, infimum'а та значення блукання, числа перетинів інтервалу зверху і знизу. Наведено приклади застосування отриманих результатів до випадкового блукання з показниково розподіленими в один бік стрибками.

Введение. Пусть $X_t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $X_0 = 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями [1]. Зафиксируем $B > 0$, пусть $x \in [0, B]$, $y = B - x$, и введем случайную величину $\tilde{\chi} = \inf\{t \colon X_t \notin [-y, x]\}$ — момент первого выхода процесса X_t из интервала $[-y, x]$. Введем события: $\mathfrak{A}^x = \{\omega \colon X_{\tilde{\chi}} > x\}$ — выход процесса из интервала произошел через верхнюю границу, $\mathfrak{A}_y = \{\omega \colon X_{\tilde{\chi}} < -y\}$ — выход процесса из интервала произошел через нижнюю границу. Определим случайную величину $\tilde{T} = (X_{\tilde{\chi}} - x)\,\mathbf{I}_{\mathfrak{A}^x} + (-X_{\tilde{\chi}} - y)\,\mathbf{I}_{\mathfrak{A}_y}$ — величину перескока процесса через границу в момент первого выхода из интервала, где $\mathbf{I}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{I}_{\mathfrak{A}}(\omega)$ — индикатор события $\mathfrak{A}$, $\mathbf{P}\left[\mathfrak{A}^x + \mathfrak{A}_y\right] = 1$.

K. Ito и H. McKean [2] получили преобразования Лапласа распределения $\tilde{\chi}$ для симметричного процесса Винера

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; \mathfrak{A}_y\right] = \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{2s})}{\operatorname{sh}(B\sqrt{2s})}, \qquad \mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; \mathfrak{A}^x\right] = \frac{\operatorname{sh}(y\sqrt{2s})}{\operatorname{sh}(B\sqrt{2s})}.$$

L. Takács [3] определил вероятности выхода через границы для полунепрерывного процесса без гауссовой компоненты

$$\mathbf{P}\left[\mathfrak{A}_y\right] = \frac{W(x)}{W(B)}, \qquad \mathbf{P}\left[\mathfrak{A}^x\right] = 1 - \frac{W(x)}{W(B)}. \tag{1*}$$

Он ввел функцию $W(x) \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, определенную преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-px}\, W(x)\, dx = k(p)^{-1}, \quad \Re(p) > c,$$

где $c(s) > 0$, $s > 0$, — единственный корень в правой полуплоскости $\Re(p) > 0$ уравнения $k(p) - s = 0$, $k(p)$ — кумулянта процесса, $c = \lim\limits_{s \to 0} c(s)$. Функция $W(x)$,

$x \in \mathbb{R}_+$, и ее модификация $W^s(x)$, s, $x \in \mathbb{R}_+$, играют важную роль при исследовании граничных функционалов полунепрерывных процессов. В отечественной литературе они обозначены через $R(x)$, $R_s(x)$, $s, x \in \mathbb{R}_+$, и получили название потенциала и резольвенты полунепрерывного процесса [4, 5]. D. J. Emery [6] получил формулы (1^*) для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями.

Для процессов с независимыми приращениями и кумулянтой общего вида И. И. Гихман и А. В. Скороход в монографии [1, с. 450] определили совместное распределение $\{\, X_t^-, X_t, X_t^+ \,\}$, где $X_t^+ = \sup\limits_{u\le t} X_u$, $X_t^- = \inf\limits_{u\le t} X_u$.

Для полунепрерывного процесса совместное распределение $\{\tilde{\chi}, \tilde{T}\}$ различными методами изучалось в работах D. J. Emery [6], Е. А. Печерского [7], В. М. Шуренкова, В. Н. Супруна [5, 8 – 14]. В частности, В. М. Шуренков предложил для определения распределений $\tilde{\chi}$, $\{\tilde{\chi}, \tilde{T}\}$ ипользовать формулы Е. Б. Дынкина [15, с. 191], справедливые для любого однородного марковского процесса. Применяя эту идею, В. М. Шуренков и В. Н. Супрун получили резольвентные представления преобразований Лапласа распределения $\tilde{\chi}$ $(s \ge 0)$

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; \mathfrak{A}_y\right] = \frac{R_s(x)}{R_s(B)},$$

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; \mathfrak{A}^x\right] = 1 - \frac{R_s(x)}{R_s(B)} - \frac{R_s(x)}{R_s(B)} \int\limits_0^B R_s(u)\,du + s\int\limits_0^x R_s(u)\,du \tag{1}$$

полунепрерывного снизу процесса. В этих формулах $R_s(x)$, $x \ge 0$, — резольвента, определенная своим преобразованием Лапласа

$$\int\limits_0^\infty e^{-px}\, R_s(x)\,dx = (k(p)-s)^{-1}, \qquad \Re(p) > c(s), \qquad R_s(x) \overset{\mathrm{df}}{=} 0, \quad x<0,$$

где $c(s) > 0$, $s > 0$, — единственный корень в правой полуплоскости $\Re(p) > 0$ уравнения $k(p) - s = 0$, $k(p)$ — кумулянта полунепрерывного процесса. Для процесса Пуассона с положительными скачками и отрицательным течением резольвентные представления (1) ранее были получены В. С. Королюком в работе [4]. В. М. Шуренков и В. С. Королюк в работе [10] получили основные граничные функционалы для полунепрерывных процессов на цепи Маркова. В частности, они ввели матричную резольвенту и получили матричные аналоги формул (1). В. М. Шуренков [11] получил для полунепрерывного сверху процесса с независимыми приращениями преобразование Лапласа совместного распределения $\{\tilde{\chi}, X_{\tilde{\chi}}\}$ в терминах совместного распределения $\{X_t^-, X_t, X_t^+\}$ и меры Леви $\Pi(A)$:

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; X_{\tilde{\chi}} < l\right] = \int\limits_{-y}^{x} \left[\frac{R_s(y)}{R_s(B)} R_s(x-u) - R_s(-u)\right] \Pi([l-y-u,-\infty))\,du, \tag{2}$$

где $s>0$, $l<-y$, а

$$\frac{R_s(y)}{R_s(B)} R_s(x-u) - R_s(-u)\,du = \int\limits_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\Big[-y \le X_t^-, \;\; X_t \in du, \;\; X_t^+ \le x\Big]\,dt.$$

В этой работе приведена предельная теорема для распределения величины перескока процесса через границу интервала. Для доказательства (2) автор использовал формулы Е. Б. Дынкина [15, с. 191], справедливые для любого однородного марковского процесса. Тождество В. М. Шуренкова

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; X_{\tilde{\chi}} < l\right] =$$

$$= \int\limits_{-y}^{x} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-st} \mathbf{P}\big[-y \leq X_t^-, \quad X_t \in du, \quad X_t^+ \leq x \big] \Pi([l-y-u, \infty))\, dt \tag{3}$$

справедливо для любого однородного процесса с независимыми приращениями с кумулянтой общего вида. Известны также факторизационные тождества Кемпермана [16] для случайных блужданий. Эти тождества Е. А. Печерский [7] передоказал для процессов Леви.

Важным (и наиболее трудным) направлением в двухграничных задачах является асимптотический анализ распределений двухграничных функционалов блужданий и процессов с независимыми приращениями. В работах В. И. Лотова [17, 18] получены полные асимптотические разложения для распределений основных двухграничных функционалов случайных блужданий, подчиненных условиям Крамера. Далее, исследование асимптотических свойств распределений двухграничных функционалов процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий проводилось в работах В. И. Лотова и В. Р. Ходжибаева [19 – 21], В. И. Лотова и Н. Г. Орловой [22]. В недавно опубликованных работах [23, 24] проведен асимптотический анализ распределений двухграничных функционалов для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова.

В последнее десятилетие наблюдается повышенный интерес к двухграничным задачам для случайных процессов. Это вызвано тем обстоятельством, что двухграничные задачи находят применение в прикладных областях теории вероятностей, таких как теория очередей, финансовая математика, управление запасами, теория надежности. В частности, появилось много работ, в которых рассматривались двухграничные задачи для полунепрерывных процессов с независимыми приращениями (см., например, [25 – 33]). По мнению авторов, можно выделить следующий круг вопросов, которые рассматривались в этих работах. Во-первых, приводились новые методы доказательства формул Шуренкова – Супруна, основанные на экскурсиях Ито и мартингальной технике. Во-вторых, продолжалось исследование аналитических свойств резольвенты, переходных и эргодических характеристик полунепрерывных процессов, остановленных в момент выхода из интервала. В-третьих, рассматривались полунепрерывные процессы с отражением на границе и для них решались граничные задачи. В работе [34] рассматривались некоторые двухграничные задачи для сложного пуассоновского процесса со сносом. Распределения скачков в рассматриваемом процессе являются смесью показательных распределений. Н. С. Братийчук, О. В. Лукович [35] изучали задачу о разорении для процесса Пуассона с отражением, распределение скачков которого в одну сторону является смесью показательных распределений.

В тождествах Кемпермана [16], Е. А. Печерского [7], В. М. Шуренкова основной двухграничный функционал — совместное распределение $\{\tilde{\chi}, \tilde{T}\}$ — выражается через другой двухграничный функционал — совместное распределение $\{X_t^-, X_t, X_t^+\}$ и меру Леви $\Pi(A)$ процесса или распределение процесса. Это обстоятельство затрудняет применение этих тождеств для решения других двухграничных задач.

В работе [36] для определения совместного распределения $\{\tilde{\chi}, \tilde{T}\}$ процесса с кумулянтой общего вида (1) авторы предложили принципиально другую идею. Их метод является простым и естественным и основан на использовании совместных распределений одуграничных функционалов $\{\tilde{\tau}^x, \tilde{T}^x\}$, $\{\tilde{\tau}_x, \tilde{T}_x\}$, $x \geq 0$, где

$$\tilde{\tau}^x = \inf\{t : X_t > x\}, \quad \tilde{T}^x = X_{\tilde{\tau}^x} - x, \quad \tilde{\tau}_x = \inf\{t : X_t < -x\}, \quad \tilde{T}_x = -X_{\tilde{\tau}_x} - x$$

— момент и величина первого выхода процесса за верхний уровень x, а также момент и величина первого выхода процесса за нижний уровень $-x$. Интегральные преобразования совместных распределений этих одуграничных функционалов процесса были получены в 60-х годах прошлого столетия в работах Б. А. Рогозина, Е. А. Печерского, А. А. Боровкова, В. М. Золотарева [45 – 48] и других. Используя прямой вероятностный метод (формулу полной вероятности, однородность процесса по пространству, свойство строгой марковости процесса), для определения преобразований Лапласа

$$\tilde{V}^x(du, s) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; \tilde{T} \in du, \mathfrak{A}^x\right], \qquad \tilde{V}_y(du, s) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\chi}}; \tilde{T} \in du, \mathfrak{A}_y\right]$$

совместных распределений $\{\tilde{\chi}, \tilde{T}\}$ авторы [36] составляют и решают систему уравнений

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\tau}^x}; \tilde{T}^x \in du\right] = \tilde{V}^x(du, s) + \int_0^\infty \tilde{V}_y(dv, s)\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\tau}^{v+B}}; \tilde{T}^{v+B} \in du\right],$$

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\tau}_y}; \tilde{T}_y \in du\right] = \tilde{V}_y(du, s) + \int_0^\infty \tilde{V}^x(dv, s)\mathbf{E}\left[e^{-s\tilde{\tau}_{v+B}}; \tilde{T}_{v+B} \in du\right],$$

где $x = B - y$, $u > 0$. В полученных после решения этой системы формулах преобразования Лапласа совместного распределения $\{\tilde{\chi}, \tilde{T}\}$ выражаются через совместные распределения $\{\tilde{\tau}^x, \tilde{T}^x\}$, $\{\tilde{\tau}_x, \tilde{T}_x\}$ одуграничных функционалов, что позволяет эффективно решать другие двухграничные задачи для процессов с независимыми приращениями. В частности, для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями ряд таких задач решен в [41, 42]. Изложенный в [36] метод решения двухграничных задач применим и для других типов случайных процессов, например для разности неординарных процессов восстановления [43].

1. Основные определения. Пусть $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}[\xi = 0] < 1$ и $\{\xi, \xi_n\}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Введем случайное блуждание $\xi(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \ldots\}$, порожденное случайной величиной $\xi : \xi(0) = 0$, $\xi(n) = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. При решении граничных задач для случайных блужданий важное значение имеет факторизационное тождество Спицера

$$\mathbf{E}\, e^{-p\xi(\nu_t)} = \frac{1-t}{1 - t\mathbf{E}\, e^{-p\xi}} = \mathbf{E}\, e^{-p\xi^+_{\nu_t}}\, \mathbf{E}\, e^{-p\xi^-_{\nu_t}}, \quad \Re(p) = 0,$$

где ν_t — не зависимая от блуждания, геометрически распределенная с параметром $t \in (0,1)$ случайная величина $\mathbf{P}[\nu_t = n] = (1-t)\,t^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, а $\xi_n^+ = \max_{m \le n} \xi(m)$, $\xi_n^- = \min_{m \le n} \xi(m)$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, — maximum и minimum случайного блуждания $\xi(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Для интегральных преобразований безгранично делимых случайных величин $\xi_{\nu_t}^{\pm}$ справедливы следующие формулы [45]:

$$\mathbf{E}e^{-p\xi_{\nu_t}^{\pm}} =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n} \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(n)} - 1;\ \pm\xi(n) > 0 \right] \right\}, \qquad t \in (0,1), \quad \pm\Re(p) \ge 0.$$

Для всех $x \ge 0$ определим случайные величины

$$\tau^x = \inf\{n\colon \xi(n) > x\}, \quad T^x = \xi(\tau^x) - x,$$

$$\tau_x = \inf\{n : \xi(n) < -x\}, \quad T_x = -\xi(\tau_x) - x$$

— соответственно момент и величина первого перескока блужданием верхнего x и нижнего $-x$ уровней, $\inf\{\varnothing\} = \infty$. На событиях $\{\tau^x = \infty\}$, $\{\tau_x = \infty\}$ положим по определению $T^x = \infty$, $T_x = \infty$ соответственно. Отметим также, что моменты первого достижения множеств случайным блужданием являются марковскими и блуждание однородно по пространству [45]. Эти свойства блуждания будут неоднократно использоваться в дальнейшем изложении при составлении уравнений.

Предлагаемый метод решения двухграничных задач опирается на использование распределений од135граничных функционалов $\{\tau^x, T^x\}$, $\{\tau_x, T_x\}$, $x \ge 0$. Эти, а также другие однограничные функционалы случайного блуждания были изучены в 50-х годах прошлого столетия в работах Спарре-Андерсена, Феллера, Такача, Спицера [45 – 48] и других. При решении этих задач применялись комбинаторные и факторизационные методы. В следующей лемме мы приведем аналитические выражения для одноrраничных функционалов, которые будут использованы при решении двухграничных задач для случайных блужданий.

Лемма 1. *Пусть $\xi(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание. Тогда*:

i) *для производящих функций совместных распределений $\{\tau^x, T^x\}$, $\{\tau_x, T_x\}$ при $\Re(p) \ge 0$ выполняются следующие равенства*:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[t^{\tau^x} \exp\{-pT^x\}\right] &= \left(\mathbf{E}\, e^{-p\xi_{\nu_t}^+}\right)^{-1} \mathbf{E}\left[e^{-p(\xi_{\nu_t}^+ - x)};\ \xi_{\nu_t}^+ > x\right], \\ \mathbf{E}\left[t^{\tau_x} \exp\{-pT_x\}\right] &= \left(\mathbf{E}\, e^{p\xi_{\nu_t}^-}\right)^{-1} \mathbf{E}\left[e^{p(\xi_{\nu_t}^- + x)}; -\xi_{\nu_t}^- > x\right]; \end{aligned} \tag{4}$$

ii) *для интегральных преобразований совместных распределений $\{\xi(\nu_t), \xi_{\nu_t}^{\pm}\}$ справедливы формулы*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\nu_t)};\ \xi_{\nu_t}^+ \le x\right] &= \mathbf{E}\, e^{-p\xi_{\nu_t}^-}\, \mathbf{E}\left[e^{-p\xi_{\nu_t}^+};\ \xi_{\nu_t}^+ \le x\right], \quad \Re(p) \le 0, \\ \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\nu_t)};\ \xi_{\nu_t}^- \ge -x\right] &= \mathbf{E}\, e^{-p\xi_{\nu_t}^+}\, \mathbf{E}\left[e^{-p\xi_{\nu_t}^-};\ \xi_{\nu_t}^- \ge -x\right], \quad \Re(p) \ge 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Равенства леммы были получены для однородных процессов с независимыми приращениями в работе Е. А. Печерского и Б. А. Рогозина [38]. Приведем элементарное доказательство этих формул с использованием факторизационного тождества Спицера и простых вероятностных рассуждений. Установим равенства (4). Согласно формуле полной вероятности, свойству строгой марковости блуждания и его однородности по пространству, для всех $x \geq 0$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}\left[e^{-p\xi^+_{\nu_t}};\, \xi^+_{\nu_t} > x\right] = \mathbf{E}\left[t^{\tau^x} e^{-p\xi(\tau^x)}\right] \mathbf{E}\, e^{-p\xi^+_{\nu_t}}, \quad \Re(p) \geq 0. \tag{6}$$

Приведем также следующее краткое пояснение. Очевидно, что событие $\{\xi^+_n > x\}$ эквивалентно событию $\{\tau^x \leq n\}$. Тогда при $\Re(p) \geq 0$

$$\mathbf{E}\left[e^{-p\xi^+_n};\, \xi^+_n > x\right] = \mathbf{E}\left[e^{-p\xi^+_n};\, \tau^x \leq n\right] = \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\tau^x)} e^{-p\xi^+_{n-\tau^x}}; \tau^x \leq n\right].$$

Поскольку τ^x — марковский момент, то случайная величина $\xi^+_{n-\tau^x}$ не зависит от сигма-алгебры $\mathfrak{B}_{\tau^x}$, порожденной событиями $\{\xi(m) < u\} \cap \{\tau^x > m\}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $u \in \mathbb{R}$. Поэтому, согласно формуле полной вероятности,

$$\mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\tau^x)} e^{-p\xi^+_{n-\tau^x}};\, \tau^x \leq n\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(m)};\, \tau^x = m\right] \mathbf{E}\, e^{-p\xi^+_{n-m}}, \quad \Re(p) \geq 0.$$

Подставив правую часть этого равенства в предыдущую формулу, будем иметь

$$\mathbf{E}\left[e^{-p\xi^+_n};\, \xi^+_n > x\right] = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(m)};\, \tau^x = m\right] \mathbf{E}\, e^{-p\xi^+_{n-m}}, \quad \Re(p) \geq 0.$$

Умножив это равенство на $(1-t)\,t^n = \mathbf{P}[\nu_t = n]$ и выполнив в обеих частях суммирование по всем $n \in \mathbb{Z}^+$, получим формулу (6). Разделив обе части формулы (6) на $\exp\{-px\}\mathbf{E}\exp\{-p\xi^+_{\nu_t}\}$, найдем производящую функцию совместного распределения $\{\tau^x, T^x\}$ и первое из равенств (4):

$$\mathbf{E}\left[t^{\tau^x} \exp\{-pT^x\}\right] = \left(\mathbf{E}\, e^{-p\xi^+_{\nu_t}}\right)^{-1} \mathbf{E}\left[e^{-p(\xi^+_{\nu_t} - x)};\, \xi^+_{\nu_t} > x\right], \quad \Re(p) \geq 0.$$

Применив это равенство к случайному блужданию $-\xi(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, получим второе из равенств (4).

Установим справедливость равенств (5). Используя формулу полной вероятности, однородность блуждания по пространству и тот факт, что τ^x — марковский момент, выводим равенство

$$\mathbf{E}\, e^{-p\xi(\nu_t)} = \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\nu_t)};\, \xi^+_{\nu_t} \leq x\right] + \mathbf{E}\left[t^{\tau^x} e^{-p\xi(\tau^x)}\right] \mathbf{E}\, e^{-p\xi(\nu_t)}, \quad \Re(p) = 0. \tag{7}$$

Равенство (7) отображает то обстоятельство, что приращение блуждания на интервале $[0, \nu_t]$ происходит на траекториях, которые либо не пересекают верхний уровень x (первое слагаемое в правой части уравнения), либо пересекают уровень x с последующими приращениями случайного блуждания на интервале $[0, \nu_t]$ (второе слагаемое в правой части равенства).

Подставляя в равенство (7) выражение для $\mathbf{E}\left[t^{\tau^x} e^{-p\xi(\tau^x)}\right]$ из формулы (6), находим

$$\mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\nu_t)};\,\xi^+_{\nu_t}\le x\right]=\mathbf{E}\,e^{-p\xi^-_{\nu_t}}\,\mathbf{E}\left[e^{-p\xi^+_{\nu_t}};\,\xi^+_{\nu_t}\le x\right],\quad \Re(p)=0.$$

Поскольку в правой и левой частях этого равенства содержатся аналитические при $\Re(p)\le 0$ функции, это равенство выполняется для всех $\Re(p)\le 0$. Таким образом, мы получили первое из равенств (5). Применив эту формулу к случайному блужданию $-\xi(n)$, $n\in\mathbb{Z}^+$, получим второе из равенств (5).

Лемма доказана.

2. Двухграничные задачи для блужданий. В этом пункте мы приведем решение основных двухграничных задач для случайного блуждания. Ключевым двухграничным функционалом для случайных процессов и блужданий является совместное распределение момента первого выхода процесса (блуждания) из интервала и величины перескока границы интервала в момент первого выхода. Предлагаемый метод решения этой задачи опирается на использование совместных распределений однограничных функционалов $\{\tau^x,\,T^x\}$, $\{\tau_x,\,T_x\}$, $x\ge 0$. Для составления уравнений и систем уравнений применяются прямой вероятностный метод, основанный на формуле полной вероятности и определяющих свойствах блуждания, таких как однородность по времени и пространству, марковость первого момента достижения множества (свойство строгой марковости блуждания). Мы применяем классический метод последовательных итераций [44].

2.1. Выход блуждания из интервала. Первая задача, которую мы рассмотрим, — определение производящей функции совместного распределения момента первого выхода блуждания из интервала и величины перескока блуждания через границу интервала в момент первого выхода. Пусть $B>0$ фиксировано, $x\in[0,B]$, $y=B-x$ и введем случайную величину $\chi=\inf\{n\colon \xi(n)\notin[-y,x]\}$ — момент первого выхода блуждания из интервала $[-y,x]$. Случайная величина χ является марковским моментом [45] и $\mathbf{P}[\chi<\infty]=1$. Выход блуждания из интервала может произойти либо через верхнюю границу x, либо через нижнюю $-y$. Введем события: $\mathfrak{A}^x=\{\xi(\chi)>x\}$ — выход блуждания из интервала произошел через верхнюю границу, $\mathfrak{A}_y=\{\xi(\chi)<-y\}$ — выход блуждания из интервала произошел через нижнюю границу. Для $x\in[0,B]$, $y=B-x$ обозначим

$$F^x(du,t)=\mathbf{E}\left[t^{\tau^x};\,T^x\in du\right]-\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau_y};T_y\in dv\right]\mathbf{E}\left[t^{\tau^{v+B}};T^{v+B}\in du\right],$$

$$F_y(du,t)=\mathbf{E}\left[t^{\tau_y};T_y\in du\right]-\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau^x};T^x\in dv\right]\mathbf{E}\left[t^{\tau_{v+B}};T_{v+B}\in du\right].$$

Теорема 1. *Пусть $\xi(n)\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание,*

$$\chi=\inf\{n\colon \xi(n)\notin[-y,x]\}\quad и\quad T=(\xi(\chi)-x)\mathbf{I}_{\mathfrak{A}^x}+(-\xi(\chi)-y)\mathbf{I}_{\mathfrak{A}_y}$$

— момент первого выхода блуждания из интервала $[-y,x]$ и величина перескока блуждания через границу в момент первого выхода.

Тогда для производящей функции совместного распределения случайных величин $\{\chi, T\}$ при $t \in (0,1)$ справедливы следующие равенства:

$$V^x(du,t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{E}\,[t^{\chi}; T \in du, \mathfrak{A}^x] = F^x(du,t) + \int\limits_0^{\infty} F^x(dv,t)\,\mathfrak{K}_+^t(v,du),$$
$$V_y(du,t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{E}\,[t^{\chi}; T \in du, \mathfrak{A}_y] = F_y(du,t) + \int\limits_0^{\infty} F_y(dv,t)\,\mathfrak{K}_-^t(v,du), \tag{8}$$

где $\mathfrak{K}_\pm^t(v,du) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} K_\pm^{(n)}(v,du,t),\ v>0,$ — *ряд из последовательных итераций;*

$$K_\pm^{(1)}(v,du,t) = K_\pm(v,du,t),$$
$$K_\pm^{(n+1)}(v,du,t) = \int\limits_0^{\infty} K_\pm^{(n)}(v,dl,t) K_\pm(l,du,t) \tag{9}$$

— *последовательные итерации* ($n \in \mathbb{N}$) *ядер* $K_\pm(v,du,t)$, *которые определены равенствами*

$$K_+(v,du,t) = \int\limits_0^{\infty} \mathbf{E}\big[t^{\,\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in dl\big]\,\mathbf{E}\left[t^{\,\tau^{l+B}}; T^{l+B} \in du\right],$$
$$K_-(v,du,t) = \int\limits_0^{\infty} \mathbf{E}\big[t^{\,\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in dl\big]\,\mathbf{E}\,[t^{\,\tau_{l+B}}; T_{l+B} \in du]. \tag{10}$$

Доказательство. Для функций $V^x(du,t)$, $V_y(du,t)$, согласно формуле полной вероятности, однородности блуждания по пространству и свойству строгой марковости, справедлива система уравнений

$$\mathbf{E}\left[t^{\tau^x}; T^x \in du\right] = V^x(du,t) + \int\limits_0^{\infty} V_y(dv,t)\mathbf{E}\left[t^{\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in du\right],$$
$$\mathbf{E}\,[t^{\tau_y}; T_y \in du] = V_y(du,t) + \int\limits_0^{\infty} V^x(dv,t)\mathbf{E}\,[t^{\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in du]. \tag{11}$$

Первое уравнение системы (11) отражает то обстоятельство, что первое пересечение верхнего уровня x блужданием (левая часть уравнения) происходит на траекториях, которые либо не пересекают нижний уровень $-y$ (первое слагаемое в правой части уравнения), либо пересекают нижний уровень $-y$ и затем впервые пересекают верхний уровень x (второе слагаемое в правой части уравнения). Приведем также следующее краткое пояснение. Очевидно, что

$$V^x(du,t) = \mathbf{E}\big[t^{\tau^x}; T^x \in du, \tau^x < \tau_y\big], \qquad V_y(du,t) = \mathbf{E}\big[t^{\tau_y}; T_y \in du, \tau_y < \tau^x\big].$$

Тогда, согласно формуле полной вероятности, справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{E}\left[t^{\tau^x}; T^x \in du\right] = \mathbf{E}\left[t^{\tau^x}; T^x \in du, \tau^x < \tau_y\right] + \mathbf{E}\left[t^{\tau^x}; T^x \in du, \tau_y < \tau^x\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[t^{\chi};\, T \in du, \mathfrak{A}^x\right] + \mathbf{E}\left[t^{\chi} t^{\tau^{B+X}};\, T^{B+X} \in du, \mathfrak{A}_y\right]. \tag{12}$$

Поскольку χ — марковский момент, случайные величины τ^{B+X}, T^{B+X} не зависят от сигма-алгебры $\mathfrak{B}_\chi$, порожденной событиями $\{\xi(m) < u\} \cap \{\chi > m\}$ при $m \in \in \mathbb{Z}^+$, $u \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\mathbf{E}\left[t^{\chi} t^{\tau^{B+X}};\, T^{B+X} \in du, \mathfrak{A}_y\right] = \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\chi}; T \in dv, \mathfrak{A}_y\right] \mathbf{E}\left[t^{\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in du\right].$$

Подставляя правую часть этого равенства в (12), получаем первое из равенств (11). Справедливость второго равенства системы устанавливается аналогично. Система линейных интегральных уравнений (11) вполне аналогична системе линейных уравнений с двумя неизвестными. Подставляя в первое уравнение выражение для $V_y(du,t)$ из второго уравнения, получаем

$$V^x(du,t) = F^x(du,t) + \int\limits_{l=0}^\infty \int\limits_{v=0}^\infty V_y(dv,t)\mathbf{E}\left[t^{\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in dl\right] \mathbf{E}\left[t^{\tau^{l+B}}; T^{l+B} \in du\right].$$

Изменяя во втором слагаемом правой части порядок интегрирования, находим линейное интегральное уравнение относительно функции $V^x(du,t)$:

$$V^x(du,t) = F^x(du,t) + \int\limits_0^\infty V^x(dv,t) K_+(v,du,t). \tag{13}$$

Для ядра этого уравнения $K_+(v,du,t)$ для всех $v,u > 0$, $t \in (0,t_0)$ справедлива оценка

$$K_+(v,du,t) \le \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\big[t^{\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in dl\big]\, \mathbf{E}t^{\tau^{l+B}} \le \mathbf{E}t^{\tau^B} \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\big[t^{\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in dl\big] \le$$

$$\le \mathbf{E}t^{\tau^B}\mathbf{E}t^{\tau_B} \le a = \mathbf{E}t_0^{\tau^B}\mathbf{E}t_0^{\tau_B} < 1, \quad t_0 \in (0,1).$$

При выводе этой цепочки неравенств мы использовали неравенства

$$\mathbf{E}t^{\tau^B} - \mathbf{E}t^{\tau^{v+B}} = \mathbf{P}\big[\xi^+_{\nu_t} \in (B, v+B]\big] \ge 0, \qquad \mathbf{E}t^{\tau_B} \ge \mathbf{E}t^{\tau_{v+B}}, \quad v > 0,$$

которые следуют из равенств (4). И если

$$K_+^{(1)}(v,du,t) = K_+(v,du,t), \qquad K_+^{(n+1)}(v,du,t) = \int\limits_0^\infty K_+^{(n)}(v,dl,t)\, K_+(l,du,t)$$

— последовательность n-х итераций ядра $K_+(v,du,t)$, $n \in \mathbb{N}$, то по индукции устанавливаем, что для всех $v,u > 0$, $t \in (0,t_0)$ справедлива оценка $K_+^{(n)}(v,du,t) < a^n$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, ряд $\mathfrak{K}_+^t(v,du) = \sum_{n\in\mathbb{N}} K_+^{(n)}(v,du,t) < a\,(1-a)^{-1}$ из последовательных итераций ядра $K_+(v,du,t)$ сходится равномерно по $v,u>0$, $t\in(0,t_0)$. Применяя для решения линейного интегрального уравнения (13) метод последовательных итераций [44], находим

$$V^x(du,t)=F^x(du,t)+\int\limits_0^\infty F^x(dv,t)\mathfrak{K}_+^t(v,du),\quad t\in(0,t_0).$$

Устремляя t_0 к 1, получаем первое из равенств (8). Справедливость второго из равенств (8) устанавливается аналогично. Для однородного процесса с независимыми приращениями и целочисленного случайного блуждания аналогичные теоремы были доказаны в [36].

Теорема доказана.

2.2. Supremum, infimum и значение блуждания. Применим теорему 1 для определения функции $(x,y\geq 0)$

$$Q^t(p)=\mathbf{E}\big[e^{-p\xi(\nu_t)};\chi>\nu_t\big]=\int\limits_{-y}^{x}e^{-up}\,\mathbf{P}\big[-y\leq\xi^-_{\nu_t},\,\xi(\nu_t)\in du,\xi^+_{\nu_t}\leq x\big].$$

Совместное распределение supremum'а, infimum'а и значения однородного процесса с независимыми приращениями было получено в монографии И. И. Гихмана, А. В. Скорохода [1] в терминах распределений приращений процесса и однограничных функционалов $\{\tau^x,T^x\}$, $\{\tau_y,T_y\}$. Для составления уравнений использовались вероятностно-комбинаторные рассуждения, основанные на формуле включения и исключения. В следующей теореме содержится выражение для интегрального преобразования совместного распределения supremum'а, infimum'а и значения блуждания в терминах распределения $\{\chi,T\}$ и распределения $\{\xi(\nu_t),\xi^{\pm}_{\nu_t}\}$, определенного равенством (5).

Теорема 2. *Пусть $\xi(n)\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание, $x,y\geq 0$. Тогда для интегрального преобразования совместного распределения $\{\xi^-_{\nu_t},\,\xi(\nu_t),\,\xi^+_{\nu_t}\}$ при $t\in(0,1)$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}Q^t(p)&=U^x(t,p)-e^{yp}\int\limits_0^\infty e^{vp}\,\mathbf{E}\big[t^{\chi};T\in dv,\mathfrak{A}_y\big]U^{v+B}(t,p),\quad \Re(p)\leq 0,\\ Q^t(p)&=U_y(t,p)-e^{-xp}\int\limits_0^\infty e^{-vp}\mathbf{E}\big[t^{\chi};T\in dv,\mathfrak{A}^x\big]U_{v+B}(t,p),\quad \Re(p)\geq 0,\end{aligned}\tag{14}$$

где $B=x+y$ и

$$U^x(t,p)=\mathbf{E}\big[e^{-p\xi(\nu_t)};\xi^+_{\nu_t}\leq x\big]=\mathbf{E}\,e^{-p\xi^-_{\nu_t}}\,\mathbf{E}\big[e^{-p\,\xi^+_{\nu_t}};\xi^+_{\nu_t}\leq x\big],\quad \Re(p)\leq 0,$$

$$U_y(t,p)=\mathbf{E}\big[e^{-p\,\xi(\nu_t)};\xi^-_{\nu_t}\geq -y\big]=\mathbf{E}\,e^{-p\xi^+_{\nu_t}}\,\mathbf{E}\big[e^{-p\,\xi^-_{\nu_t}};\xi^-_{\nu_t}\geq -y\big],\quad \Re(p)\geq 0.$$

В частности,

$$\mathbf{P}\,[\,\chi > \nu_t\,] = \mathbf{P}\left[\xi^+_{\nu_t} \le x\right] - \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[t^\chi; T \in dv, \mathfrak{A}_y]\;\mathbf{P}[\xi^+_{\nu_t} \le v + B\,] =$$

$$= \mathbf{P}[\xi^-_{\nu_t} \ge -y] - \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[t^{\,\chi}; T \in dv, \mathfrak{A}^x]\,\mathbf{P}[\xi^-_{\nu_t} \ge -(v + B)]. \qquad (15)$$

Доказательство. Установим справедливость первого из равенств (14). Согласно формуле полной вероятности, однородности по пространству и свойству строгой марковости блуждания, справедливо уравнение

$$\mathbf{E}\big[e^{-p\xi(\nu_t)}; \xi^+_{\nu_t} \le x\big] = \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\nu_t)}; \chi > \nu_t\right] +$$

$$+\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\big[t^\chi; T \in dv, \mathfrak{A}_y\big]e^{(v+y)p}\mathbf{E}\big[e^{-p\xi(\nu_t)}; \xi^+_{\nu_t} \le v + B\big], \quad \Re(p) \le 0. \qquad (16)$$

Это уравнение отражает то обстоятельство, что приращения блуждания на траекториях, которые не пересекают уровень x на интервале $[0, \nu_t]$, происходят либо на траекториях блуждания, которые не пересекают и уровень $-y$ (первое слагаемое в правой части этого равенства), либо на траекториях блуждания, которые пересекают уровень $-y$ с дальнейшими приращениями на траекториях, которые не пересекают уровень x на интервале $[0, \nu_t]$ (второе слагаемое в правой части равенства). Кроме этого замечания приведем следующие пояснения. Ясно, что событие $\{\xi^-_n \ge -y\}$ эквивалентно событию $\{\tau_y > n\}$. Тогда, согласно формуле полной вероятности, при $\Re(p) \le 0$ справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{E}\left[e^{-p\xi(n)}; \xi^+_n \le x\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(n)}; \xi^+_n \le x, \tau_y > n\right] + \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(n)}; \tau^x > n, \tau_y \le n\right] =$$

$$= \mathbf{E}\Big[e^{-p\xi(n)}; \xi^-_n \ge -y, \xi^+_n \le x\Big] + \mathbf{E}\left[e^{p(y+X)}e^{-p\,\xi(n-\chi)}; \chi \le n, \tau^{B+X} > n - \chi, \mathfrak{A}_y\right].$$

Поскольку χ — марковский момент, приращения блуждания $\xi(n-\chi),\ n \ge \chi$, и τ^{B+X} не зависят от сигма-алгебры $\mathfrak{B}_\chi$, и поэтому при $\Re(p) \le 0$

$$\mathbf{E}\left[e^{p(y+X)}e^{-p\,\xi(n-\chi)}; \chi \le n, \tau^{B+X} > n - \chi, \mathfrak{A}_y\right] =$$

$$= e^{py}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{pv}\mathbf{P}\,[\chi = m, T \in dv, \mathfrak{A}_y]\;\mathbf{E}\left[e^{-p\xi(n-m)}; \tau^{v+B} > n - m\right].$$

Подставляя правую часть этой формулы в предыдущее равенство, находим

$$\mathbf{E}\left[e^{-p\,\xi(n)}; \xi^+_n \le x\right] = \mathbf{E}\left[e^{-p\,\xi(n)}; \xi^-_n \ge -y, \xi^+_n \le x\right] +$$

$$+e^{py}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{pv}\mathbf{P}\big[\chi = m, T \in dv, \mathfrak{A}_y\big]\;\mathbf{E}\left[e^{-p\,\xi(n-m)}; \xi^+_{n-m} \le v + B\right].$$

Умножая это равенство на $(1-t)\,t^n = \mathbf{P}[\nu_t = n]$ и выполняя суммирование по всем $n \in \mathbb{Z}^+$, получаем (16). Из равенства (16) следует первая из формул (14). Справедливость второй формулы устанавливается аналогично. Равенство (15) следует из равенств (14) при $p = 0$. Для однородного процесса с независимыми приращениями равенства, аналогичные (14), получены в [36].

Теорема доказана.

2.3. Пересечения интервала блужданием. Пусть $\xi(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание, $\xi(0) = 0$, $B > 0$, $x \in [0, B]$, $y = B - x$. Следуя работе [22], введем случайные последовательности ($k \in \mathbb{N}$)

$$i_0^{\pm} = 0, \qquad i_k^- = \inf\left\{n > i_{k-1}^+ \colon \xi(n) < -y\right\}, \qquad i_k^+ = \inf\{n > i_k^- \colon \xi(n) > x\}.$$

Определим случайную величину $\alpha_n^+ = \max\{k \in \mathbb{Z}^+ \colon i_k^+ \leq n\} \in \mathbb{Z}^+$ — число пересечений интервала $[-y, x]$ блужданием $\xi(\cdot)$ снизу вверх на временном отрезке $[0, n]$, где $\inf\{\varnothing\} = \infty$. Аналогично, введем случайные последовательности

$$\tilde{i}_0^{\pm} = 0, \qquad \tilde{i}_k^+ = \inf\{n > \tilde{i}_{k-1}^- \colon \xi(n) > x\}, \qquad \tilde{i}_k^- = \inf\{n > \tilde{i}_k^+ \colon \xi(n) < -y\}.$$

Определим случайную величину $\alpha_n^- = \max\{k \in \mathbb{Z}^+ \colon \tilde{i}_k^- \leq n\} \in \mathbb{Z}^+$ — число пересечений интервала $[-y, x]$ блужданием $\xi(\cdot)$ сверху вниз на временном отрезке $[0, n]$. Для всех $k, l \in \mathbb{Z}^+$ введем обозначения

$$p_k^l(n) = \mathbf{P}\left[\alpha_n^+ = k, \alpha_n^- = l\right], \qquad p_k^{\pm}(n) = \mathbf{P}\left[\alpha_n^{\pm} = k\right], \qquad p_k(n) = \mathbf{P}\left[\alpha_n = k\right], \tag{17}$$

где $\alpha_n = \alpha_n^+ + \alpha_n^-$ — общее число пересечений интервала блужданием за n шагов. Распределение $p_k^{\pm}(\nu_t)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, получено в [22] с использованием проективных операторов от компонент факторизации случайного блуждания. В следующей теореме приведены распределения (17) в терминах совместного распределения $\{\chi, T\}$ и последовательных итераций $K_{\pm}^{(n)}(v, du, t)$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Теорема 3. *Пусть $\xi(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание, $B > 0$, $x \in [0, B]$, $y = B - x$. Тогда для совместного распределения $\{\alpha_{\nu_t}^+, \alpha_{\nu_t}^-\}$ для всех $n \in \mathbb{Z}^+$, $t \in (0, 1)$ справедливы равенства*

$$p_n^{n+1}(\nu_t) = \int_0^\infty V^x(dv, t) \int_0^\infty K_+^{(n)}(v, du, t) \int_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau_{u+B}}; T_{u+B} \in dl\right]\left(1 - \mathbf{E}t^{\tau^{l+B}}\right),$$

$$p_{n+1}^n(\nu_t) = \int_0^\infty V_y(dv, t) \int_0^\infty K_-^{(n)}(v, du, t) \int_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau^{u+B}}; T^{u+B} \in dl\right]\left(1 - \mathbf{E}t^{\tau_{l+B}}\right), \tag{18}$$

$$p_n^n(\nu_t) = \mathbf{I}_{\{n=0\}}\left(1 - \int_0^\infty V^x(dv, t)\mathbf{E}t^{\tau_{v+B}} - \int_0^\infty V_y(dv, t)\mathbf{E}t^{\tau^{v+B}}\right) +$$

$$+\mathbf{I}_{\{n \in \mathbb{N}\}} \int_0^\infty V^x(dv, t) \int_0^\infty K_+^{(n)}(v, du, t)\left(1 - \mathbf{E}t^{\tau_{u+B}}\right) +$$

$$+\mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}}\int\limits_0^\infty V_y(dv,t)\int\limits_0^\infty K_-^{(n)}(v,du,t)\left(1-\mathbf{E}t^{\tau^{u+B}}\right),$$

где $K_\pm^{(0)}(v,du,t)\overset{\mathrm{df}}{=}\delta(v-u)\,du$, *а функции* $V^x(dv,t)$, $V_y(dv,t)$ *и итерации* $K_\pm^{(n)}(v,du,t)$, $n\in\mathbb{N}$, *ядер* $K_\pm(v,du,t)$ *найдены с помощью теоремы* 1.

Доказательство. Для $v>0$, a, $b\in[0,1]$ введем производящие функции

$$h_v(a,b,t)=\mathbf{E}\,a^{\alpha^+_{\nu_t}(-v-y)}b^{\alpha^-_{\nu_t}(-v-y)},$$

$$h^v(a,b,t)=\mathbf{E}\,a^{\alpha^+_{\nu_t}(v+x)}b^{\alpha^-_{\nu_t}(v+x)},\qquad h(a,b,t)=\mathbf{E}\,a^{\alpha^+_{\nu_t}}\,b^{\alpha^-_{\nu_t}},$$

где $\alpha^\pm_{\nu_t}(u)$, $u\in\mathbb{R}$, — число пересечений интервала $[-y,x]$ снизу вверх (сверху вниз) случайным блужданием $u+\xi(n)$ на временном отрезке $[0,\nu_t]$. Согласно формуле полной вероятности, однородности по пространству и свойству строгой марковости блуждания, для этих функций имеет место система уравнений

$$h^v(a,b,t)=1-\mathbf{E}\,t^{\tau_{v+B}}+b\int\limits_0^\infty\mathbf{E}\,[t^{\tau_{v+B}};T_{v+B}\in du]\,h_u(a,b,t),$$

$$h_v(a,b,t)=1-\mathbf{E}\,t^{\tau^{v+B}}+a\int\limits_0^\infty\mathbf{E}\left[t^{\tau^{v+B}};T^{v+B}\in du\right]h^u(a,b,t),\tag{19}$$

$$h(a,b,t)=1-\mathbf{E}\,t^{\chi}+\int\limits_0^\infty V^x(dv,t)h^v(a,b,t)+\int\limits_0^\infty V_y(dv,t)h_v(a,b,t).$$

Подставляя в первое уравнение этой системы выражение для функции $h_v(a,b,t)$ из второго уравнения, для функции $h^v(a,b,t)$ получаем линейное интегральное уравнение

$$h^v(a,b,t)=1-\mathbf{E}\,t^{\tau_{v+B}}+b\int\limits_0^\infty\mathbf{E}\,[t^{\tau_{v+B}};T_{v+B}\in du]\left(1-\mathbf{E}\,t^{\tau^{u+B}}\right)+$$

$$+ab\int\limits_0^\infty K_+(v,du,t)h^u(a,b,t).\tag{20}$$

Обозначим $K_\pm^{(0)}(v,du,t)\overset{\mathrm{df}}{=}\delta(v-u)\,du$,

$$\mathfrak{K}_+^t(v,du,a,b)=\sum_{n=0}^\infty(ab)^n\,K_+^{(n)}(v,du,t),\quad a,b\in[0,1].$$

Равномерная сходимость этого ряда при $a=b=1$ обоснована при доказательстве теоремы 1. Применяя для решения интегрального уравнения (20) метод последовательных итераций [44], имеем

$$h^v(a,b,t) = \int\limits_0^\infty \mathfrak{K}_+^t(v,du,a,b)\,(1-\mathbf{E}t^{\,\tau_{u+B}}) +$$

$$+b\int\limits_0^\infty \mathfrak{K}_+^t(v,du,a,b)\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\big[t^{\,\tau_{u+B}}; T_{u+B}\in dl\big]\big(1-\mathbf{E}t^{\,\tau^{l+B}}\big). \qquad (21)$$

Аналогично (или применяя принцип симметрии) находим

$$h_v(a,b,t) = \int\limits_0^\infty \mathfrak{K}_-^t(v,du,a,b)\big(1-\mathbf{E}t^{\tau^{u+B}}\big) +$$

$$+a\int\limits_0^\infty \mathfrak{K}_-^t(v,du,a,b)\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau^{u+B}}; T^{u+B}\in dl\right](1-\mathbf{E}t^{\tau_{l+B}}), \qquad (22)$$

где

$$\mathfrak{K}_-^t(v,du,a,b) = \sum_{n=0}^\infty (ab)^n K_-^{(n)}(v,du,t), \quad a,\ b\in[0,1].$$

Производящие функции $h^v(a,b,t)$, $h_v(a,b,t)$, $v>0$, определены равенствами (21), (22) и, следовательно, третьим из равенств (19) определена производящая функция $h(a,b,t)$. Эти производящие функции генерируют совместные распределения $\{\alpha_{\nu_t}^+, \alpha_{\nu_t}^-\}$, приведенные в теореме. Сравнивая в обеих частях равенств (21), (22), (19) коэффициенты при $a^n b^m$, $|n-m|\le 1$, $n,\, m\in\mathbb{Z}^+$, получаем равенства теоремы. Распределения $p_n^{\pm}(\nu_t)$, $p_n(\nu_t)$ тривиальным образом следуют из формул (18). Для однородного процесса с независимыми приращениями аналогичная теорема доказана в [49].

***Замечание* 1.** Приведем вероятностную интерпретацию ядер $K_\pm(v,du,t)$, их последовательных итераций $K_\pm^{(n)}(v,du,t)$ и равенств теоремы 3. Обозначим через

$$i_1^v = \inf\{n>\tau_{v+B} \colon v+x+\xi(n)>x\} \quad \text{и} \quad I_1^v = v+x+\xi(i_1^v)-x$$

момент первого полного пересечения (пересечения в обоих направлениях) интервала $[-y,x]$ блужданием $v+x+\xi(\cdot)$ сверху и величину перескока верхней границы x блужданием $v+x+\xi(\cdot)$ в момент первого полного пересечения интервала сверху. Тогда

$$K_+(v,du,t) = \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\,\tau_{v+B}}; T_{v+B}\in dl\right]\mathbf{E}\left[t^{\,\tau^{l+B}}; T^{l+B}\in du\right] = \mathbf{E}\left[t^{\,i_1^v}; I_1^v\in du\right].$$

Положим по определению $i_0^v=0$, $I_0^v=v$ и для $n\in\mathbb{N}$ определим

$$i_n^v = i_{n-1}^v + \inf\{l>\tau_{I_{n-1}^v+B}\colon I_{n-1}^v+\xi(l)>0\} \quad \text{и} \quad I_n^v = I_{n-1}^v+\xi(i_n^v)$$

— момент n-го полного пересечения интервала $[-y,x]$ блужданием $v+x+\xi(\cdot)$ сверху и величину перескока уровня x блужданием в момент n-го полного пересечения сверху. Тогда $K_+^{(n)}(v,du,t) = \mathbf{E}\left[t^{\,i_n^v}; I_n^v\in du\right]$, $n\in\mathbb{Z}^+$. Теперь обратимся к первой из формул (18) и приведем для нее следующую вероятностную интерпретацию.

Событие $\{\alpha^+_{\nu_t} = n,\ \alpha^-_{\nu_t} = n+1\}$ может осуществиться на траекториях блуждания, которые имеют следующие свойства. Во-первых, эти траектории выходят из интервала $[-y, x]$, и выход происходит через верхнюю границу, так как в противном случае $\alpha^+_{\nu_t} \geq \alpha^-_{\nu_t}$ (выражение между первым и вторым интегралами). Во-вторых, далее на этих траекториях происходит n полных пересечений интервала блужданием сверху (выражение между вторым и третьим интегралами). И наконец, происходит одно пересечение интервала сверху вниз, а на оставшемся временном отрезке $[0, \nu_t]$ траектории блуждания не пересекают верхний уровень x (выражение под третьим интегралом).

2.4. Момент первого вхождения блуждания в интервал. В этом пункте для удобства изложения мы изменим пространственное расположение интервала и введем новые обозначения. Пусть $\xi(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание, $y \in [0, B]$ и $\chi(y) = \inf\{n\colon y + \xi(n) \notin [0, B]\}$ — момент первого выхода блуждания $y + \xi(\cdot)$ из интервала $[0, B]$. Введем события: $\mathfrak{A}^B = \{\xi(\chi(y)) > B\}$ — выход блуждания $y + \xi(\cdot)$ из интервала $[0, B]$ произошел через верхнюю границу B, $\mathfrak{A}_0 = \{\xi(\chi(y)) < 0\}$ — выход блуждания $y + \xi(\cdot)$ из интервала $[0, B]$ произошел через нижнюю границу 0. Определим случайную величину

$$T(y) = (\xi(\chi(y)) - B)\,\mathbf{I}_{\mathfrak{A}^B} + (-\xi(\chi(y)))\,\mathbf{I}_{\mathfrak{A}_0}, \quad \mathbf{P}\left[\mathfrak{A}^B + \mathfrak{A}_0\right] = 1,$$

— величину перескока блуждания $y + \xi(\cdot)$ через границу в момент первого выхода из интервала $[0, B]$. По сравнению с предыдущими пунктами мы сдвинули интервал $[-y, x]$, $(x = B - y)$ и блуждание вверх на y. В силу однородности блуждания по пространству совместное распределение $\{\chi(y), T(y)\}$ совпадает с совместным распределением $\{\chi, T\}$, и его производящая функция определена равенствами теоремы 1. Положим по определению $\chi(y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0$, при $y \notin [0, B]$.

Теорема 4. *Пусть $\xi(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание, $y \in \mathbb{R}$,*

$$\overline{\chi}(y) = \inf\{n > \chi(y) : y + \xi(n) \in [0, B]\} \quad \text{и} \quad \overline{T}(y) = y + \xi(\overline{\chi}(y)) \in [0, B]$$

— момент первого вхождения блуждания $y+\xi(\cdot)$ в интервал $[0, B]$ и значение блуждания в момент первого вхождения. Тогда при $t \in (0,1)$ справедливы равенства

$$d^v(du, t) = \mathbf{E}\left[t^{\overline{\chi}(v+B)}; \overline{T}(v+B) \in du\right] =$$

$$= \int_0^\infty \mathfrak{Q}^t_+(v, dl)\mathbf{E}\left[t^{\tau_l}; B - T_l \in du\right] +$$

$$+ \int_0^\infty \mathfrak{Q}^t_+(v, dl) \int_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau_l}; T_l - B \in d\nu\right] \mathbf{E}\left[t^{\tau^\nu}; T^\nu \in du\right], \quad v > 0,$$

$$d_v(du, t) = \mathbf{E}\left[t^{\overline{\chi}(-v)}; \overline{T}(-v) \in du\right] = \int_0^\infty \mathfrak{Q}^t_-(v, dl)\mathbf{E}\left[t^{\tau^l}; T^l \in du\right] +$$

$$+\int\limits_0^\infty \mathfrak{Q}_-^t(v,dl)\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau^l};T^l-B\in d\nu\right]\mathbf{E}\left[t^{\tau_\nu};B-T_\nu\in du\right],\quad v>0, \tag{23}$$

$$d(y,du,t)=\mathbf{E}\left[t^{\overline{\chi}(y)};\overline{T}(y)\in du\right]=$$

$$=\int\limits_0^\infty V^x(dv,t)d^v(du,t)+\int\limits_0^\infty V_y(dv,t)d_v(du,t),\quad y\in[0,B],$$

где $\mathfrak{Q}_\pm^t(v,du)=\delta(v-u)\,du+\sum_{n\in\mathbb{N}}Q_\pm^{(n)}(v,du,t)$, $v>0$, *— ряд из последовательных итераций* $Q_\pm^{(n)}(v,du,t)$, $n\in\mathbb{N}$;

$$Q_\pm^{(1)}(v,du,t)=Q_\pm(v,du,t),\qquad Q_\pm^{(n+1)}(v,du,t)=\int\limits_0^\infty Q_\pm^{(n)}(v,dl,t)Q_\pm(l,du,t) \tag{24}$$

— итерации ядер $Q_\pm(v,du,t)$, *которые определены равенствами*

$$\begin{gathered}Q_+(v,du,t)=\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau_v};T_v-B\in dl\right]\mathbf{E}\left[t^{\tau^l};T^l-B\in du\right],\\ Q_-(v,du,t)=\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau^v};T^v-B\in dl\right]\mathbf{E}\left[t^{\tau_l};T_l-B\in du\right].\end{gathered} \tag{25}$$

Доказательство. Для функций $d^v(du,t)$, $d_v(du,t)$, $v>0$, согласно формуле полной вероятности, однородности блуждания по пространству и тому факту, что τ_x, τ^x, $x\geq 0$, — марковские моменты, имеет место система уравнений

$$\begin{gathered}d^v(du,t)=\mathbf{E}\left[t^{\tau_v};B-T_v\in du\right]+\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\,\tau_v};T_v-B\in dl\right]d_l(du,t),\\ d_v(du,t)=\mathbf{E}\left[t^{\tau^v};T^v\in du\right]+\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[t^{\tau^v};T^v-B\in dl\right]d^l(du,t).\end{gathered} \tag{26}$$

Эта система линейных интегральных уравнений вполне аналогична системе линейных уравнений с двумя неизвестными. Подставляя из правой части второго уравнения выражение для функции $d_v(du,t)$ в первое уравнение, имеем

$$d^v(du,t)=\mathbf{E}\left[t^{\tau_v};B-T_v\in du\right]+\int\limits_0^\infty \mathbf{E}[t^{\tau_v};\,T_v-B\in dl]\mathbf{E}[t^{\tau^l};T^l\in du]+$$

$$+\int\limits_{l=0}^\infty \mathbf{E}[t^{\tau_v};T_v-B\in dl]\int\limits_{\nu=0}^\infty \mathbf{E}[t^{\tau^l};T^l-B\in d\nu]d^\nu(du,t).$$

Изменяя в третьем слагаемом правой части этого уравнения порядок интегрирования, для функции $d^v(du,t)$, $v>0$, получаем линейное интегральное уравнение

$$d^{\,v}(du,t)=\int\limits_0^\infty Q_+(v,d\nu,t)d^\nu(du,t)+$$

$$+\mathbf{E}[t^{\tau_v};B-T_v\in du]+\int\limits_0^\infty \mathbf{E}[t^{\tau_v};T_v-B\in dl]\mathbf{E}[t^{\tau^l};T^l\in du] \tag{27}$$

с ядром

$$Q_+(v,du,t)=\int\limits_0^\infty \mathbf{E}[t^{\tau_v};T_v-B\in dl]\,\mathbf{E}[t^{\,\tau^l};T^l-B\in du],\quad v>0.$$

При $t\in(0,1)$ из очевидного равенства

$$\mathbf{E}\left[t^{\tau^{v+B}};T^{v+B}\in du\right]=$$

$$=\mathbf{E}\left[t^{\tau^v};T^v-B\in du\right]+\int\limits_0^B \mathbf{E}\left[t^{\tau^v};T^v\in dl\right]\mathbf{E}\left[t^{\tau^{B-l}};T^{B-l}\in du\right]$$

следует цепочка неравенств

$$\mathbf{E}\left[t^{\tau^v};T^v-B\in du\right]\le \mathbf{E}\left[t^{\tau^{v+B}};T^{v+B}\in du\right]\le \mathbf{E}t^{\tau^{v+B}}\le \mathbf{E}t^{\tau^B}.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\mathbf{E}\left[t^{\tau_v};T_v-B\in du\right]\le \mathbf{E}\left[t^{\,\tau_{v+B}};T_{v+B}\in du\right]\le \mathbf{E}t^{\tau_{v+B}}\le \mathbf{E}t^{\tau_B}.$$

Из этих двух цепочек неравенств для ядра $Q_+(v,du,t)$ при всех $v,u>0$, $t\in(0,t_0)$ получаем следующую оценку:

$$Q_+(v,du,t)=\int\limits_0^\infty \mathbf{E}[t^{\tau_v};T_v-B\in dl]\mathbf{E}[t^{\tau^l};T^l-B\in du]\le$$

$$\le \mathbf{E}t^{\tau_B}\mathbf{E}t^{\tau^B}<a=\mathbf{E}t_0^{\tau_B}\,\mathbf{E}t_0^{\tau^B}<1,\quad t_0\in(0,1).$$

Используя полученную оценку ядра и метод математической индукции, нетрудно установить, что для последовательных итераций (24) $Q_+^{(n)}(v,du,t)$ ядра $Q_+(v,du,t)$, при всех v, $u>0$, $t\in(0,t_0)$ справедлива оценка

$$Q_+^{(n+1)}(v,du,t)=\int\limits_0^\infty Q_+^{(n)}(v,dl,t)\,Q_+(l,du,t)<a^{n+1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, ряд из последовательных итераций $\sum_{n\in\mathbb{N}}Q_+^{(n)}(v,du,t)<a(1-$ $-\,a)^{-1}$ сходится равномерно по всем v, $u>0$, $t\in(0,t_0)$. Применяя для решения линейного интегрального уравнения (27) метод последовательных итераций [44], получаем первое из равенств (23). Справедливость второго из равенств (23) устанавливается аналогично. Третье из равенств (23) является следствием формулы полной вероятности и того факта, что $\chi(y)$ — марковский момент. Аналогичная теорема для однородного процесса с независимыми приращениями приведена в [50].

3. Примеры. Приведем примеры применения полученных результатов для случайного блуждания с показательно распределенными в одну сторону скачками. Двухграничные задачи для такого класса блужданий были рассмотрены Т. В. Кадanковой в [51]. В этой работе для блуждания с геометрически распределенными отрицательными скачками были получены производящие функции распределения момента первого выхода из интервала через верхнюю и нижнюю границы, совместного распределения supremum'a, infimum'a и значения блуждания, а также определены вероятности выхода блуждания через границы. Кроме того, это блуждание было рассмотрено в интервале с двумя отражающими границами. Для него были определены переходные и стационарные характеристики и получены производящие функции граничных функционалов.

Пусть $\eta \in (0,\infty)$, $\gamma \sim \exp(\lambda)$. Введем случайную величину $\xi \in \mathbb{R}$ с преобразованием Лапласа

$$\mathbf{E}e^{-p\xi} = a\lambda(\lambda-p)^{-1} + (1-a)\mathbf{E}e^{-p\eta}, \qquad \Re(p)=0, \quad a\in(0,1). \tag{28}$$

Введем последовательность $\{\xi,\xi_i\}$, $i\in\mathbb{N}$, независимых одинаково распределенных случайных величин и определим случайное блуждание $\xi(n)\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, порожденное случайной величиной $\xi: \xi(0)=0$, $\xi(n)=\xi_1+\ldots+\xi_n$. У этого блуждания произошедший скачок следует распределению $-\gamma$ с вероятностью a, а с дополнительной вероятностью — распределению случайной величины η. Так введенное блуждание будем называть блужданием с показательно распределенной отрицательной компонентой. Из монографии А. А. Боровкова [39] (§ 18) известно, что в этом случае уравнение $1-t\,\mathbf{E}\,e^{-p\xi}=0$, $t\in(0,1)$, имеет в правой полуплоскости $\Re(p)>0$ единственный корень $c(t)\in(0,\lambda)$, и для интегральных преобразований случайных величин $\xi^+_{\nu_t}$, $\xi^-_{\nu_t}$ при $\Re(p)\ge 0$ справедливы равенства

$$\mathbf{E}\,e^{p\xi^-_{\nu_t}} = \frac{c(t)}{\lambda}\,\frac{\lambda+p}{c(t)+p}, \qquad \mathbf{E}\,e^{-p\xi^+_{\nu_t}} = \lambda\,\frac{1-t}{c(t)}\,(p-c(t))\,\mathbb{R}(p,t), \tag{29}$$

$$\mathbb{R}(p,t) = \left(a\lambda t + (p-\lambda)[1-(1-a)t\mathbf{E}\,e^{-p\eta}]\right)^{-1}, \qquad \Re(p)\ge 0, \quad p\ne c(t), \tag{30}$$

где $\mathbb{R}(p,t)$ — резольвентная функция. Из равенств (4) и формул (29) нетрудно получить интегральные преобразования совместных распределений $\{\tau_x,\,T_x\}$, $\{\tau^x,\,T^x\}$ для случайного блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой, $\Re(p)$, $\Re(z)\ge 0$

$$\mathbf{E}\left[t^{\tau_x}; T_x\in du\right] = (\lambda-c(t))e^{-xc(t)}e^{-\lambda u}\,du = \mathbf{E}t^{\tau_x}\mathbf{P}\left[\gamma\in du\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\mathbf{E}t^{\tau^x}e^{-z\xi(\tau^x)}dx = \frac{1}{p}\left(1-\frac{p+z-c(t)}{z-c(t)}\,\frac{\mathbb{R}(p+z,s)}{\mathbb{R}(z,s)}\right). \tag{31}$$

Случайные величины τ_x, T_x являются независимыми, и для всех $x \geq 0$ величина перескока нижней границы T_x показательно распределена с параметром λ. Это свойство является характерной особенностью случайного блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой. Резольвентная функция $\mathbb{R}(p,t)$ является аналитической при $\Re(p) > c(t)$ и $\lim\limits_{|p|\to\infty} \mathbb{R}(p,t) = 0$. Следовательно [52, с. 71], она представима абсолютно сходящимся интегралом Лапласа

$$\mathbb{R}(p,t) = \int\limits_0^\infty e^{-px} R_t(x)\,dx, \quad \Re(p) > c(t). \tag{32}$$

Функцию $R_t(x)$, $x \geq 0$, будем называть резольвентой случайного блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой. При этом будем полагать, что $R_t(x) = 0$ при $x < 0$. Отметим, что $R_t(0) = \lim\limits_{p\to\infty} p\,\mathbb{R}(p,t) = 1$ (p действительное) и из равенств (29) следуют формулы $\mathbf{P}[\xi^-_{\nu_t} = 0] = c(t)\,\lambda^{-1}$, $\mathbf{P}[\xi^+_{\nu_t} = 0] = \lambda(1-t)c(t)^{-1}$. Из второй формулы (29) следует равенство

$$\mathbb{R}(p,t) = \frac{c(t)}{\lambda(1-t)}\,\frac{1}{p-c(t)}\,\mathbf{E}\,e^{-p\xi^+_{\nu_t}}, \quad \Re(p) > c(t).$$

В правой части этого равенства содержатся функции, которые при $\Re(p) > c(t)$ являются преобразованиями Лапласа. Следовательно, совпадают функции-оригиналы левой и правой частей этого равенства и

$$R_t(x) = \frac{c(t)}{\lambda(1-t)} \int\limits_{-0}^{x} e^{c(t)(x-u)} d\,\mathbf{P}\,[\,\xi^+_{\nu_t} < u\,], \quad x \geq 0.$$

Мы получили полезное представление для резольвенты случайного блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой. Из этого представления следует, что функция $R_t(x)$, $x \geq 0$, является положительной, монотонно возрастающей непрерывной функцией и $R_t(x) < A(t)\exp\{xc(t)\}$, $A(t) < \infty$. Поэтому $\int_0^\infty R_t(x) e^{-\alpha x} dx < \infty$ при $\alpha > c(t)$. Кроме того, очевидно, что в окрестности любой точки $x \geq 0$ функция $R_t(x)$ имеет ограниченную вариацию. Следовательно, согласно [52, с. 68], справедлива формула обращения

$$R_t(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{xp}\mathbb{R}(p,t)\,dp, \quad \alpha > c(t). \tag{33}$$

Это равенство, наряду с равенством (31), определяет резольвенту случайного блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой.

3.1. Выход из интервала. В этом пункте мы применим формулы теоремы 1 для определения производящей функции совместного распределения $\{\chi, T\}$ случайного блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой.

***Следствие* 1.** *Пусть $\xi(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание с показательно распределенной компонентой, $B > 0$, $y \in [0, B]$, $x = B - y$. Тогда при $t \in (0, 1)$:*

i) *для интегральных преобразований совместных распределений случайных величин* $\{\chi, T\}$ *справедливы равенства*

$$\begin{gathered} V_y(du,t) = (\lambda - c(t))e^{-yc(t)-\lambda u}\left(1 - \mathbf{E}\left[t^{\tau^x} e^{-c(t)\xi(\tau^x)}\right]\right) K(t)^{-1} du, \\ V^x(du,t) = f^x(du,t) - \mathbf{E}\left[t^{\chi}; \mathfrak{A}_y\right] f^B_\lambda(du,t), \end{gathered} \tag{34}$$

где

$$f^x(du,t) = \mathbf{E}\left[t^{\tau^x}; T^x \in du\right], \qquad f^B_\lambda(du,t) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda v} f^{v+B}(du,t)\, dv,$$

$$K(t) = 1 - \mathbf{E} t^{\tau_B} \tilde{f}^B_\lambda(c(t),t), \qquad \tilde{f}^B_\lambda(c(t),t) = \int\limits_0^\infty e^{-uc(t)} f^B_\lambda(du,t);$$

ii) *для производящих функций случайной величины* χ *справедливы формулы*

$$\begin{gathered} \mathbf{E}\left[t^{\chi}; \mathfrak{A}_y\right] = \left(1 - \frac{c(t)}{\lambda}\right) e^{-yc(t)} \left(1 - \mathbf{E}\left[t^{\tau^x} e^{-c(t)\xi(\tau^x)}\right]\right) K(t)^{-1}, \\ \mathbf{E}\left[t^{\chi}; \mathfrak{A}^x\right] = f^x(t) - \mathbf{E}\left[t^{\chi}; \mathfrak{A}_y\right] f^B_\lambda(t), \end{gathered} \tag{35}$$

где $f^x(t) = \mathbf{E} t^{\tau^x}$, $f^B_\lambda(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v} f^{v+B}(t)\, dv$;

iii) *для производящих функций случайной величины* χ *справедливы резольвентные представления*

$$\begin{gathered} \mathbf{E}\left[t^{\chi}; \mathfrak{A}_y\right] = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda B} \frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)}, \qquad V_y(du,t) = e^{-\lambda(u+B)} \frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)}\, du, \\ \mathbf{E}\left[t^{\chi}; \mathfrak{A}^x\right] = 1 - \frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)} \left[\frac{e^{-\lambda B}}{\lambda} + \lambda(1-t)\hat{S}_B(\lambda,t)\right] + \lambda(1-t) S_t(x), \\ \sum_{n=0}^\infty t^n \mathbf{P}\left[\chi > n\right] = \lambda \frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)} \hat{S}_B(\lambda,t) - \lambda S_t(x), \end{gathered} \tag{36}$$

где $R_t(x)$, $x \geq 0$, — *резольвента блуждания* (33),

$$\hat{R}_B(\lambda,t) = \int\limits_B^\infty e^{-\lambda u} R_t(u)\, du,$$

$$\hat{S}_B(\lambda,t) = \int\limits_B^\infty e^{-\lambda u} S_t(u)\, du, \qquad S_t(x) = \int\limits_0^x R_t(u)\, du.$$

Доказательство. Для блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой равенства теоремы 1 упрощаются. Используя равенства (31) и определения (10) ядер $K_\pm(v,du,t)$, находим

$$K_+(v,du,t) = \left(1-\frac{c(t)}{\lambda}\right) e^{-c(t)(v+B)} f_\lambda^B(du,t),$$

$$K_-(v,du,t) = (\lambda - c(t))\, e^{-c(t)B-\lambda u}\, \mathbf{E}\left[t^{\,\tau^{v+B}} e^{-c(t)T^{v+B}}\right] du.$$

Используя эти равенства, метод математической индукции и формулу (9), находим последовательные итерации $K_\pm^{(n)}(v,du,t)$, $n\in\mathbb{N}$, ядер $K_\pm(v,du,t)$:

$$K_-^{(n)}(v,du,t) = \mathbf{E}\big[t^{\,\tau^{v+B}} e^{-c(t)T^{v+B}}\big]\mathbf{E}\, t^{\,\tau_B}\, (1-K(t))^{n-1}\ \lambda\, e^{-\lambda u}\, du,$$

$$K_+^{(n)}(v,du,t) = e^{-vc(t)}\, \mathbf{E}\, t^{\,\tau_B}\, (1-K(t))^{n-1}\ f_\lambda^B(du,t).$$

Ряды $\mathfrak{K}_\pm^t(v,du)$ из последовательных итераций $K_\pm^{(n)}(v,du,t)$ в данном случае являются геометрическими прогрессиями и легко вычисляются:

$$\mathfrak{K}_-^t(v,du) = \sum_{n=1}^{\infty} K_-^{(n)}(v,du,t) = \mathbf{E}\big[t^{\tau^{v+B}} e^{-c(t)T^{v+B}}\big]\mathbf{E}t^{\tau_B}\, K(t)^{-1}\lambda e^{-\lambda u}\, du,$$

$$\mathfrak{K}_+^t(v,du) = \sum_{n=1}^{\infty} K_+^{(n)}(v,du,t) = e^{-vc(t)}\, \mathbf{E}t^{\tau_B}\, K(t)^{-1} f_\lambda^B(du,t).$$

Подставляя найденные выражения для функций $\mathfrak{K}_\pm^t(v,du)$ в равенства (8), получаем формулы (34). Интегрируя равенства (34) по всем $u\ge 0$, находим равенства (35). Далее, используя определение резольвенты (33) и равенства (31), получаем резольвентные представления функций $f^x(t)$, $\mathbf{E}\left[t^{\tau^x} e^{-c(t)\xi(\tau^x)}\right]$:

$$f^x(t) = 1 - \lambda\frac{1-t}{c(t)} R_t(x) + \lambda(1-t)S_t(x),$$

$$\mathbf{E}\big[t^{\tau^x} e^{-c(t)\xi(\tau^x)}\big] = 1 - e^{-xc(t)} R_t(x) r(t),$$

где $r(t) = \left.\dfrac{d}{dp}\mathbb{R}(p,t)^{-1}\right|_{p=c(t)}$. Подставляя найденные резольвентные представления в формулы (35), находим резольвентные представления (36). Для целочисленного случайного блуждания с геометрически распределенной отрицательной компонентой резольвентные представления, аналогичные равенствам (36), были получены в работе [51].

3.2. Supremum, infimum и значения блуждания. В этом пункте, использовав формулы теоремы 2, для блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой определим совместное распределение $\{\xi_{\nu_t}^-,\ \xi(\nu_t),\ \xi_{\nu_t}^+\}$.

Следствие 2. *Пусть $\xi(n)\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание с показательно распределенной компонентой, $x,y\ge 0$, $x+y=B$. Тогда для совместного распределения $\{\xi_{\nu_t}^-,\ \xi(\nu_t),\ \xi_{\nu_t}^+\}$ справедлива формула*

$$\mathbf{P}\left[-y \leq \inf_{n\leq\nu_t} \xi(n),\ \xi(\nu_t) \leq u,\ \sup_{n\leq\nu_t} \xi(n) \leq x\right] =$$

$$= (1-t)\left(e^{-\lambda B}\,\frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)}\int\limits_0^{u+y} R_t(v)\,dv - \lambda\int\limits_0^{u} R_t(v)\,dv + R_t(u)\right), \quad u \in [-y,x]. \tag{37}$$

Доказательство. Определим функцию $U^x(t,p)$, $x \geq 0$, из теоремы 2. Используя формулы (29) для интегральных преобразований $\xi^-_{\nu_t}$, $\xi^+_{\nu_t}$ и равенство (5), при $\Re(p) \leq 0$, $\Re(z) > c(t) - \Re(p)$ находим интегральное преобразование совместного распределения $\{\xi(\nu_t),\ \xi^+_{\nu_t}\}$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-zx} U^x(t,p)\,dx = (1-t)\frac{\lambda-p}{c(t)-p}\left(1 - \frac{c(t)-p}{z}\right)\mathbb{R}(p+z,t).$$

Используя определение резольвенты (33) для обращений преобразований Лапласа в правой части этого равенства по переменной z, находим резольвентное представление функции $U^x(t,p)$, $x \geq 0$:

$$U^x(t,p) = (1-t)\frac{\lambda-p}{c(t)-p}e^{-xp}R_t(x) - (1-t)(\lambda-p)\int\limits_0^x e^{-up}R_t(u)\,du.$$

Далее, из первого равенства (36) имеем

$$\mathbf{E}\left[t^\chi; T \in\ du, \mathfrak{A}_y\right] = e^{-\lambda(u+B)}\,\frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)}\,du.$$

Подставляя выражения для функций $U^x(t,p)$, $x \geq 0$, $\mathbf{E}\left[t^\chi; T \in\ du, \mathfrak{A}_y\right]$ в первое из равенств (14), и проводя необходимые вычисления, находим

$$Q^t(p)(1-t)^{-1} = \mathbf{E}\left[e^{-p\xi(\nu_t)}; \chi > \nu_t\right](1-t)^{-1} =$$

$$= (p-\lambda)\int\limits_0^x e^{-up}R_t(u)\,du + e^{-xp}R_t(x) + e^{-\lambda B}\,\frac{R_t(x)}{\hat{R}(\lambda,t)}\int\limits_0^B e^{-p(u-y)}R_t(u)\,du.$$

Нетрудно получить следующее равенство:

$$\int\limits_{-y}^x e^{-up}\mathbf{P}\left[\xi(\nu_t) \leq u,\ \chi > \nu_t\right]\,du = \frac{1}{p}\left(Q^t(p) - \mathbf{P}[\chi > \nu_t]e^{-xp}\right). \tag{38}$$

Используя очевидное тождество $\lambda\hat{S}_B(\lambda,t) = \hat{R}_B(\lambda,t) + e^{-\lambda B}\,S_t(B)$, из третьей из формул (36) находим необходимое для данного случая выражение для $\mathbf{P}[\chi > \nu_t]$:

$$\mathbf{P}[\chi > \nu_t] = (1-t)\left(R_t(x) + e^{-\lambda B}\frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)}\int\limits_0^B R_t(u)\,du - \lambda\int\limits_0^x R_t(u)\,du\right).$$

Подставляя в равенство (38) найденные выражения для $Q^x(t,p)$, $\mathbf{P}[\chi > \nu_t]$ и проводя необходимые вычисления, имеем

$$\int_{-y}^{x} e^{-pu}\mathbf{P}\left[-y \le \inf_{n\le\nu_t} \xi(n),\ \xi(\nu_t)\le u,\ \sup_{n\le\nu_t}\xi(n)\le x\right]du =$$

$$= (1-t)\int_{-y}^{x} e^{-pu}\left(e^{-\lambda B}\,\frac{R_t(x)}{\hat{R}_B(\lambda,t)}\int_0^{u+y} R_t(v)\,dv - \lambda\int_0^{u} R_t(v)\,dv + R_t(u)\right)du,$$

где $R_t(u)=0$ при $u<0$. Полученная формула — суть равенство двух преобразований Лапласа. После сравнения функций-оригиналов в левой и правой частях этого равенства получим формулу (37).

3.3. Пересечения интервала. Использовав формулы теоремы 3, для блуждания с показательно распределенной отрицательной компонентой найдем совместное распределение $\{\alpha^+_{\nu_t},\ \alpha^-_{\nu_t}\}$.

***Следствие* 3.** *Пусть $\xi(n)\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, — случайное блуждание с показательно распределенной отрицательной компонентой $B>0$, $x\in[0,B]$, $y=B-x$. Тогда для совместного распределения $\{\alpha^+_{\nu_t},\alpha^-_{\nu_t}\}$ числа пересечений блужданием интервала $[-y,x]$ снизу вверх и числа пересечений интервала сверху вниз на временном отрезке $[0,\nu_t]$ для всех $n\in\mathbb{Z}^+$, $t\in(0,1)$ справедливы равенства*

$$p_n^{n+1}(\nu_t) = \left(\mathbf{E}t^{\tau_y} - \mathbf{E}\left[t^{\chi};\mathfrak{A}_y\right]\right)(1-f_\lambda^B(t))[1-K(t)]^n,$$

$$p_{n+1}^{n}(\nu_t) = \mathbf{E}\left[t^{\chi};\mathfrak{A}_y\right](f_\lambda^B(t)-1+K(t))[1-K(t)]^n,$$

$$p_n^n(\nu_t) = \mathbf{I}_{\{n=0\}}\left\{1-\mathbf{E}t^{\tau_y}+\mathbf{E}\left[t^{\chi};\mathfrak{A}_y\right](1-f_\lambda^B(t))\right\}+$$

$$+\mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}}\mathbf{E}\left[t^{\chi};\mathfrak{A}_y\right](1-f_\lambda^B(t))[1-K(t)]^n+$$

$$+\mathbf{I}_{\{n\in\mathbb{N}\}}\left\{(\mathbf{E}t^{\tau_y}-\mathbf{E}\left[t^{\chi};\mathfrak{A}_y\right])(f_\lambda^B(t)-1+K(t))\right\}[1-K(t)]^{n-1},$$

где функции $f_\lambda^B(t)$, $\mathbf{E}\left[t^{\chi};\mathfrak{A}_y\right]$, $K(t)$ определены в следствии 1.

Доказательство. В следствии 1 мы нашли функции $V^x(du,t)$, $V_y(du,t)$, $K_\pm^{(n)}(v,du,t)$, $n\in\mathbb{N}$. Подставляя выражения для этих функций в равенства теоремы 3 и проводя необходимые вычисления, получаем равенства следствия 3.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 639 с.
2. *Ito K., McKean H.* Diffusion processes and their sample paths. – Berlin etc.: Springer, 1965.
3. *Takács L.* Combinatorial methods in the theory of stochastic processes. – New York etc.: John Wiley, 1967.
4. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 240 с.
5. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 170 – 174.
6. *Emery D. J.* Exit problem for a spectrally positive process // Adv. Appl. Probab. – 1973. – P. 498 – 520.

7. *Печерский Е. А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, вып. 1. – С. 104 – 119.
8. *Супрун В. Н.* Задача о разорении и резольвента обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 1. – С. 53 – 61.
9. *Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – **22**, вып. 2. – С. 419 – 425.
10. *Королюк В. С., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Маркова // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 4. – С. 464 – 471.
11. *Шуренков В. М.* Предельное распределение момента выхода и положения в момент выхода из широкого интервала для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – **23**, вып. 2. – С. 419 – 425.
12. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с нулевым средним и бесконечной дисперсией // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 262 – 264.
13. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Предельное распределение положения полунепрерывного процесса с независимыми приращениями в момент выхода из интервала // Проблемы теории вероятностных распределений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 96 – 106.
14. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с отрицательным бесконечным средним // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С. 538 – 541.
15. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
16. *Kemperman J. H. B.* A Winer – Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Statist. – 1963. – **34**, № 4. – P. 1168 – 1193.
17. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двухграничных задачах // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – **24**, вып. 3. – С. 475 – 485.
18. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двухграничных задачах // Там же. – 1979. – **24**, вып. 4. – С. 873 – 879.
19. *Lotov V. I., Khodzhibaev V. R.* Asymtotic expensions in a boundary problem // Sib. Math. J. – 1984. – **25**, № 5. – P. 758 – 764.
20. *Лотов В. И., Ходжибаев В. Р.* О числе пересечений полосы для случайных процессов с независимыми приращениями // Предельные теоремы для случайных процессов и их применения: Тр. Ин-та математики СО РАН. – 1993. – **20**. – С. 162 – 169.
21. *Lotov V. I., Khodjibaev V. R.* On limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes. II // Sib. Adv. Math. – 1998. – **8**, № 4. – P. 41 – 59.
22. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайных блужданий // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 4. – С. 822 – 842.
23. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* О факторизационных представлениях в граничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова // Там же. – 2005. – **46**, № 4. – С. 833 – 840.
24. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* Асимптотические разложения распределения числа пересечений полосы случайным блужданием, заданным на цепи Маркова // Там же. – 2006. – **47**, № 6. – С. 1303 – 1322.
25. *Bertoin J.* Levy processes. – Cambridge Univ. Press, 1996.
26. *Bertoin J.* On the first exit time of a completely asymmetric stable process from a finite interval // Bull. London Math. Soc. – 1996. – **28**. – P. 514 – 520.
27. *Bertoin J.* Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Levy processes in a finite interval // Ann. Appl. Probab. – 1997. – **7**. – P. 156 – 169.
28. *Lambert A.* Completely asymmetric Levy processes confined in a finite interval // Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. – 2000. – **36**, № 2. – P. 251 – 274.
29. *Doney R. A.* Some excursion calculations for spectrally one-sided Levy processes // M.C.S.S. Report. – 2003.
30. *Avram F., Kyprianou A. E., Pistorius M. R.* Exit problems for spectrally negative Lévy processes and applications to (Canadized) Russian options // J. Theor. Probab. – 2004. – **14**. – P. 215 – 235.
31. *Pistorius M. R.* On doubly reflected completely asymmetric Lévy processes // Stochast. Process. and Appl. – 2003. – **107**. – P. 131 – 143.

32. *Pistorius M. R.* On exit and ergodicity of the completely asymmetric Lévy process reflectid at its infimum // J. Theor. Probab. – 2004. – **17**. – P. 183 – 220.
33. *Kyprianou A. E., Palmowski Z.* An martingale review of some fluctuation theory for spectrally negative Lévy processes // Sémin. Probab. (Lect. Notes Math.). – 2005. – **38**. – P. 16 – 29.
34. *Perry D., Stadji W., Zacks S.* First-exit times for compound Poisson processes for some types of positive and negative jumps // Stochast. Models. – 2002. – **18**, № 1. – P. 139 – 157.
35. *Братійчук Н. С., Лукович О. В.* Задача про розорення для узагальненого процесу Пуассона з відбиттям // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 1465 – 1475.
36. *Каданков В. Ф., Каданкова Т. В.* О распределении момента первого выхода из интервала и величины перескока границы для процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий // Там же. – № 10. – С. 1359 – 1384.
37. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – **11**, вып. 4. – С. 656 – 670.
38. *Печерский Е. А., Рогозин Б. А.* О совместных распределениях случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями // Там же. – 1969. – **14**, вып. 3. – С. 431 – 444.
39. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
40. *Золотарев В. М.* Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – **9**, вып. 4. – С. 724 – 733.
41. *Kadankov V. F., Kadankova T. V.* On the disribution of duration of stay in an interval of the semi-continuous process with independent increments // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2004. – **12**, № 4. – P. 365 – 388.
42. *Каданкова Т. В.* Про сумісний розподіл supremum'а, infimum'а та значення напівнеперервного процесу з незалежними приростами // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2004. – **70**. – С. 56 – 65.
43. *Kadankov V.* Exit from an interval by a difference of two renewal processes // Theory Stochast. Process. – 2005. – **11**, № 3-4. – P. 92 – 96.
44. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 127 с.
45. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.
46. *Spitzer F. L.* A combinatorial lemma and its application to probability theory // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 323 – 339.
47. *Sparre-Andersen E.* On fluctuations of sums of random variables // Math. scand. – 1954. – P. 263 – 285.
48. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
49. *Kadankov V. F., Kadankova T. V.* Intersections of an inteval by a process with independent increments // Theory Stochast. Process. – 2005. – **11**, № 1-2. – P. 54 – 68.
50. *Каданков В. Ф., Каданкова Т. В.* Двухграничные задачи для процесса Пуассона с показательно распределенной компонентой // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 922 – 953.
51. *Каданкова Т. В.* Двограничні задачі для випадкового блукання з геометрично розподіленими від'ємними стрибками // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2003. – **68**. – С. 60 – 71.
52. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1966. – 406 с.

Получено 31.10.05,
после доработки — 11.10.06