УДК 517.925

В. М. Евтухов (Одес. нац. ун-т),
А. А. Стехун (Одес. нац. мор. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Asymptotic representations are established for unbounded solutions of nonlinear nonautonomous third-order differential equations that, in a certain sense, are close to equations of the Emden – Fowler type.

Встановлено асимптотичні зображення для необмежених розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку, що у деякому сенсі є близькими до рівнянь типу Емдена – Фаулера.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p: [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)^1$ — непрерывная функция, $\varphi: [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\lim_{y \to +\infty} \varphi(y) = \begin{cases} \text{или} & 0, \\ \text{или} & +\infty, \end{cases} \qquad \varphi'(y) \ne 0, \qquad \lim_{y \to +\infty} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma = \text{const} \ne 0. \tag{2}$$

Его частным случаем является уравнение типа Емдена – Фаулера

$$y''' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma+1} \operatorname{sign} y, \quad \sigma \ne 0.$$

После исследования асимптотических свойств решений этого уравнения наметились новые идеи в дополнение к тем, которые использовались при изучении дифференциальных уравнений второго порядка, позволившие в дальнейшем (см. монографию И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия [1], а также работы [2 – 6]) построить асимптотическую теорию нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера n-го порядка.

Поэтому дифференциальное уравнение (1) служит важным промежуточным звеном при переходе к нелинейным дифференциальным уравнениям n-го порядка более общего вида, чем уравнения типа Эмдена – Фаулера, и требуют детального исследования асимптотических свойств всех его возможных типов решений.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-решением, если оно определено в некоторой левой окрестности ω и удовлетворяет следующим трем условиям:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{или} & 0, \\ \text{или} & \pm\infty, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \tag{3}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)\, y'(t)} = \lambda_0. \tag{4}$$

В [7] были получены необходимые и достаточные условия существования, а

---

[1] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

© В. М. ЕВТУХОВ, А. А. СТЕХУН, 2007

также асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-решений уравнения (1), для которых $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Данная статья посвящена $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-решениям уравнения (1), соответствующим значениям $\lambda_0 = \pm\infty$ и $\lambda_0 = 0$.

Введем необходимые для дальнейшего дополнительные условия. Будем говорить, что функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условию S_k, $k \in \{1, 2\}$, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L\colon\ [t_0, +\infty[\ \to\ ]0, +\infty[$ такой, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t L'(t)}{L(t)} = 0, \tag{5}$$

функция $\psi(y) = \dfrac{\varphi(y)}{y^{1+\sigma}}$ допускает асимптотическое представление вида

$$\psi\left(t^k L(t)\right) = \psi(t^k)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{6}$$

Условиям S_k заведомо удовлетворяют функции φ, для которых функция $\dfrac{\varphi(y)}{y^{1+\sigma}}$ имеет конечный предел при $y \to +\infty$, а также функции вида $\varphi(y) = y^{1+\sigma} \ln^{\mu} y$, $\varphi(y) = y^{1+\sigma} \ln^{\mu} y \ln^{\nu} \ln y$, где $\mu, \nu \neq 0$, и др.

Теорема 1. *Пусть функция* φ *удовлетворяет условию* S_1. *Тогда для существования* $P_{\omega 1}(0)$*-решений дифференциального уравнения* (1) *необходимо, чтобы* $\omega = +\infty$, *выполнялось неравенство*

$$\alpha_0 \sigma J_2(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in\ ]a, +\infty[\tag{7}$$

и имели место предельные соотношения

$$\lim_{t \to +\infty} t |J_2(t)|^{-1/\sigma} = +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{\left[J_2'(t)\right]^2}{J_2''(t) J_2(t)} = 0, \tag{8}$$

где

$$J_2(t) = \int_{A_2}^{t} J_1(\tau) d\tau, \qquad J_1(t) = \int_{A_1}^{t} p(s) \varphi(s) ds,$$

$$A_1 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^{+\infty} p(s)\varphi(s) ds = +\infty, \\ +\infty, & \text{если} \quad \int_a^{+\infty} p(s)\varphi(s) ds < +\infty, \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^{+\infty} |J_1(\tau)| d\tau = +\infty, \\ +\infty, & \text{если} \quad \int_a^{+\infty} |J_1(\tau)| d\tau < +\infty, \end{cases}$$

причем каждое такое решение допускает при $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y(t) \sim t |\sigma J_2(t)|^{-1/\sigma}, \quad y'(t) \sim |\sigma J_2(t)|^{-1/\sigma}, \quad y''(t) \sim \alpha_0 J_1(t) |\sigma J_2(t)|^{-(1+\sigma)/\sigma}. \tag{9}$$

Более того, условия (7) *и* (8) *являются достаточными для существования* $P_{+\infty 1}(0)$*-решений уравнения* (1) *в случае* $-2 < \sigma < 0$, *а также в случае, когда существует конечный или равный* $\pm\infty$ *предел* $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t J_1'(t)}{J_1(t)}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — произвольное $P_{\omega 1}(0)$-решение дифференциального уравнения (1). Тогда в силу (1) и определения $P_{\omega 1}(0)$-решения выполняются условия (3), y, y', y'', y''' отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$ и

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'''(t)\, y'(t)}{\left[y''(t)\right]^2} = \pm\infty. \tag{10}$$

Поскольку

$$\frac{y'''(t)\, y'(t)}{\left[y''(t)\right]^2} = \frac{\left(\dfrac{y''(t)}{y'(t)}\right)'}{\left(\dfrac{y''(t)}{y'(t)}\right)^2} + 1 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[, \tag{11}$$

из (10) с учетом того, что $\lim\limits_{t \uparrow \omega} y'(t)$ равен либо нулю, либо $+\infty$, получаем

$$\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)^{-1} = -\int_C^t \gamma(\tau)\, d\tau [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где

$$\lim_{t \uparrow \omega} \gamma(t) = \pm\infty, \qquad C = \begin{cases} t_1, \text{ если } & \int_{t_1}^{\omega} \gamma(\tau)\, d\tau = \pm\infty, \\ \omega, \text{ если } & \int_{t_1}^{\omega} \gamma(\tau)\, d\tau = \text{const}. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, y''(t)}{y'(t)} = 0, \quad \text{где} \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

и поэтому, используя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, y'(t)}{y(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'(t) + \pi_\omega(t)\, y''(t)}{y'(t)} = 1.$$

Из этого предельного соотношения в силу первого из условий (3) следует, что функция π_ω является положительной в некоторой левой окружности ω. Поскольку это возможно лишь в случае, когда $\omega = +\infty$, рассматриваемое решение дифференциального уравнения (1) является $P_{+\infty 1}(0)$-решением. Поскольку $\omega = +\infty$, то для данного решения в силу изложенного выше

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t\, y''(t)}{y'(t)} = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{t\, y'(t)}{y(t)} = 1. \tag{12}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t \left(\dfrac{y(t)}{t}\right)'}{\dfrac{y(t)}{t}} = 0,$$

и поэтому вследствие выполнения условия S_1 имеем

$$\frac{\varphi(y(t))}{y^{1+\sigma}(t)} = \psi(y(t)) = \psi\left(t \cdot \frac{y(t)}{t}\right) = \psi(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{13}$$

Кроме того, с учетом (4) находим

$$\left(\frac{y''(t)}{\left[y'(t)\right]^{1+\sigma}}\right)' = \frac{y'''(t)}{\left[y'(t)\right]^{1+\sigma}}\left[1-(1+\sigma)\frac{\left[y''(t)\right]^2}{y'''(t)\,y'(t)}\right] =$$

$$= \frac{y'''(t)}{\left[y'(t)\right]^{1+\sigma}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

В силу этих двух асимптотических представлений из (1) с учетом второго из условий (12) следует, что

$$\left(\frac{y''(t)}{\left[y'(t)\right]^{1+\sigma}}\right)' = \alpha_0\, p(t)\varphi(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\frac{y''(t)}{\left[y'(t)\right]^{1+\sigma}} = C + \alpha_0 J_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где C — некоторая постоянная.

Покажем, что отсюда вытекает представление вида

$$\frac{y''(t)}{\left[y'(t)\right]^{1+\sigma}} = \alpha_0 J_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{14}$$

В самом деле, если бы это было не так, то предел интегрирования A_1 в J_1 был бы равен $+\infty$ и имело бы место представление $\dfrac{y''(t)}{\left[y'(t)\right]^{1+\sigma}} = C + o(1)$ при $t \to \to +\infty$, где $C \neq 0$. Учитывая его, а также (12) и (13), из (1) получаем

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} = \frac{\alpha_0}{C}\, p(t)\varphi(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

откуда следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \ln\left|y''(t)\right| = \text{const}.$$

Однако, этого быть не может, поскольку для рассматриваемого решения y выполняется второе из условий (3). Значит, имеет место (14).

Интегрируя соотношение (14) на промежутке от t_1 до t и принимая во внимание второе из условий (3), а также условие $\sigma \neq 0$, имеем

$$\left[y'(t)\right]^{-\sigma} = -\alpha_0\, \sigma J_2(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Отсюда ясно, что выполняется неравенство (7) и имеет место второе из асимптотических представлений (9). В силу этого представления из второго из условий (12) и соотношения (14) вытекают первое и третье из асимптотических представлений (9).

Используя теперь асимптотические представления (9), а также соотношение

$$y'''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi(t)\big[y'(t)\big]^{1+\sigma}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\to+\infty,$$

которое вытекает из (1), (13) и второго из условий (12), получаем на основании первого из условий (3) и условия (4), где $\omega=+\infty$ и $\lambda_0=0$, условия (8).

Достаточность. Пусть функция φ удовлетворяет условию S_1, $\omega=+\infty$ и выполняются условия (7), (8). Используя второе из условий (8), точно так же, как из (10) было получено при доказательстве необходимости первое из условий (12), устанавливаем, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t\,J_2'(t)}{J_2(t)} = 0. \tag{15}$$

Принимая во внимание первое из условий (8), подбираем число $t_0 \ge a$ настолько большим, чтобы при $t\ge t_0$ выполнялось неравенство $\frac{1}{2}t\,|\sigma J_2(t)|^{-1/\sigma} \ge$ $\ge \max\{0, y_0\}$.

Дифференциальное уравнение (1) с помощью преобразования

$$\tau = \ln t, \qquad y(t) = t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}[1+v_1(\tau)],$$
$$y'(t) = |\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}[1+v_2(\tau)], \qquad y''(t) = \alpha_0 J_1(t)|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}[1+v_3(\tau)] \tag{16}$$

и с учетом того, что

$$\varphi\Big(t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}(1+v_1)\Big) =$$
$$= \varphi\Big(t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\Big) + t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\varphi'\Big(t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\Big)v_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}t^2|\sigma J_2(t)|^{-\frac{2}{\sigma}}\varphi''\Big(t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}(1+\xi)\Big)v_1^2,$$

где $\xi=\xi(t,v_1)$ удовлетворяет неравенству $0<|\xi|<|v_1|$ при $t\ge t_0$ и $|v_1|\le\frac{1}{2}$, сведем к системе дифференциальных уравнений

$$v_1' = q_1(\tau) + [-1+q_1(\tau)]v_1 + v_2,$$
$$v_2' = q_1(\tau)(v_2-v_3),$$
$$v_3' = q_2(\tau)\left[f(\tau)+c(\tau)v_1+\left(-1+\frac{(1+\sigma)q_1(\tau)}{q_2(\tau)}\right)v_3+V(\tau,\,v_1)\right], \tag{17}$$

в которой

$$q_1(\tau(t)) = \frac{t\,J_2'(t)}{J_2(t)}, \qquad q_2(\tau(t)) = \frac{t\,J_1'(t)}{J_1(t)},$$

$$f(\tau(t)) = \frac{\varphi\Big(t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\Big)}{\varphi(t)|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}} - 1 + \frac{(1+\sigma)q_1(\tau(t))}{q_2(\tau(t))},$$

$$c(\tau(t)) = \frac{t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\varphi'\Big(t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\Big)}{\varphi(t)|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}},$$

$$V(\tau(t), v_1) \;=\; \frac{t^2 |\sigma J_2(t)|^{-\frac{2}{\sigma}} \varphi''\Big(t|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}(1+\xi)\Big)}{2\varphi(t)|\sigma J_2(t)|^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}} v_1^2 .$$

Здесь в силу условий (2), S_1, (8) и (15)

$$\lim_{\tau\to+\infty} q_1(\tau) \;=\; 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{q_1(\tau)}{q_2(\tau)} \;=\; 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} f(\tau) \;=\; 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} c(\tau) \;=\; 1+\sigma \tag{18}$$

и

$$\lim_{v_1\to 0} \frac{V_1(\tau, v_1)}{v_1} \;=\; 0 \quad \text{равномерно по} \quad \tau \in [\ln t_0, +\infty[. \tag{19}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\ln t_0}^{+\infty} q_i(\tau)d\tau \;=\; \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{J_{3-i}'(s)ds}{J_{3-i}(s)} = \ln\left|J_{3-i}(s)\right|_{t_0}^{+\infty} \;=\; \pm\infty, \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Поэтому при $-2 < \sigma < 0$ система дифференциальных уравнений (17) имеет согласно теореме 1.3 и замечанию 1.4 из работы [8] хотя бы одно решение $(v_i)_{i=1}^3 \colon [\ln t_1, +\infty[\;\to \mathbb{R}^3$, где $t_1 \geq t_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Ему в силу замен (16) соответствует решение $y\colon [t_1, +\infty[\;\to \mathbb{R}$, допускающее при $t \to$ $\to +\infty$ асимптотические представления (9).

Допустим теперь, что существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t J_1'(t)}{J_1(t)}$. Тогда, учитывая (15) и используя правило Лопиталя, получаем

$$0 \;=\; \lim_{t\to+\infty} \frac{t J_2'(t)}{J_2(t)} \;=\; \lim_{t\to+\infty} \frac{(t J_2(t))'}{J_2'(t)} \;=\; \lim_{t\to+\infty} \left[1 + \frac{t J_2''(t)}{J_2'(t)}\right] \;=\; \lim_{t\to+\infty} \left[1 + \frac{t J_1'(t)}{J_1(t)}\right].$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t J_1'(t)}{J_1(t)} \;=\; -1 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau\to+\infty} q_2(\tau) \;=\; -1. \tag{21}$$

Установив этот факт, систему дифференциальных уравнений (17) с помощью преобразования

$$v_1 \;=\; z_1, \qquad v_2 \;=\; z_2 \;+\; q_1(\tau)[(1+\sigma)z_1 - z_3], \qquad v_3 \;=\; z_3 \tag{22}$$

приведем к виду

$$\begin{aligned} z_1' \;&=\; q_1(\tau) \;+\; [-1 + (2+\sigma)q_1(\tau)]z_1 \;+\; z_2 \;-\; q_1(\tau)z_3, \\ z_2' \;&=\; q_1(\tau)[f_1(\tau) + c_1(\tau)z_1 - \sigma z_2 + 2\sigma q_1(\tau)z_3 + q_2(\tau)V(\tau, z_1)], \\ z_3' \;&=\; q_2(\tau)\left[f(\tau) + c(\tau)z_1 + \left(-1 + \frac{(1+\sigma)q_1(\tau)}{q_2(\tau)}\right)z_3 + V(\tau, z_1)\right], \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$f_1(\tau) \;=\; q_2(\tau)f(\tau) \;-\; (1+\sigma)q_1(\tau), \qquad c_1(\tau) \;=\; -(1+\sigma)[\sigma q_1(\tau) + q_2(\tau)] \;+\; q_2(\tau)c(\tau)$$

и в силу условий (18), (21) таковы, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_1(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to+\infty} c_1(\tau) = 0. \tag{24}$$

Если теперь учесть, что $\sigma \neq 0$ и выполняются условия (18) – (21), (24), то, выбирая произвольным образом число $\delta \in \,]0,1[$ и применяя к системе (23) новое дополнительное преобразование

$$z_1 = \delta w_1, \qquad z_2 = w_2, \qquad z_3 = w_3, \tag{25}$$

получаем систему дифференциальных уравнений, которая на основании теоремы 1.3 и замечания 1.4 из работы [8] имеет хотя бы одно решение $(w_i)_{i=1}^3$: $[\ln t_1, +\infty[\, \to \mathbb{R}^3$, где $t_1 \geq t_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Ему в силу замен (25), (22) и (16) соответствует решение y: $[t_1, +\infty[\, \to [y_0, +\infty[$ дифференциального уравнения (1), допускающее при $t \to +\infty$ асимптотические представления (9). Используя эти представления, вид уравнения (1), а также условия S_1 и (8), легко убеждаемся в том, что данное решение является $P_{+\infty 1}(0)$-решением уравнения (1).

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Если выполнены указанные в данной теореме достаточные условия существования $P_{+\infty 1}(0)$-решений уравнения (1), допускающих при $t \to$ $\to +\infty$ асимптотические представления (9), то с использованием замечания 1.1 работы [8] нетрудно установить, что при $\alpha_0\sigma > 0$ существует однопараметрическое семейство таких решений, а при $\alpha_0\sigma < 0$ — двупараметрическое.

Теорема 2. *Пусть функция* φ *удовлетворяет условию* S_2. *Тогда для существования* $P_{\omega 1}(\pm\infty)$*-решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\omega = +\infty$, *выполнялось неравенство*

$$\alpha_0 \sigma J_3(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in \,]a, +\infty[\tag{26}$$

и имели место предельные соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 |J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{t J_3'(t)}{J_3(t)} = 0, \tag{27}$$

где

$$J_3(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sigma} \int\limits_{A_3}^{t} p(s)\varphi(s^2)\,ds, \qquad A_3 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^{+\infty} p(s)\varphi(s^2)\,ds = +\infty, \\ +\infty, & \text{если} \quad \int_a^{+\infty} p(s)\varphi(s^2)\,ds < +\infty. \end{cases}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y(t) \sim \frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}, \qquad y'(t) = t|\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}, \qquad y''(t) \sim |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}. \tag{28}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть y: $[t_0, \omega[\, \to \,]y_0, +\infty[$ — $P_{\omega 1}(\pm\infty)$-решение уравнения (1). Тогда в силу (1) и определения $P_{\omega 1}(\pm\infty)$-решения y, y', y'', y''' отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\, \subset [t_0, \omega[$, причем y и y' являются положительными на этом промежутке. Кроме того, согласно (11) и условию (4), где $\lambda_0 = \pm\infty$, имеем

$$\frac{\left(\dfrac{y''(t)}{y'(t)}\right)'}{\left(\dfrac{y''(t)}{y'(t)}\right)^2} = -1 + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом (3) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\,y''(t)}{y'(t)} = 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\,y'(t)}{y(t)} = 2,$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

В силу условий $y(t) > 0$ и $y'(t) > 0$ при $t \in [t_1, \omega[$ второе из этих предельных соотношений, очевидно, возможно лишь в случае, когда $\omega = +\infty$. Следовательно, рассматриваемое решение y уравнения (1) является $P_{+\infty 1}(\pm\infty)$-решением и для него

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t\,y''(t)}{y'(t)} = 1, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{t\,y'(t)}{y(t)} = 2, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{t\,y'''(t)}{y''(t)} = 0. \tag{29}$$

Поскольку функция φ удовлетворяет условию S_2 и в силу второго из предельных соотношений (29)

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(\dfrac{y(t)}{t^2}\right)'}{\left(\dfrac{y(t)}{t^2}\right)} = 0,$$

то

$$\frac{\varphi(y(t))}{y^{1+\sigma}(t)} = \psi(y(t)) = \psi\left(t^2\cdot\frac{y(t)}{t^2}\right) = \psi(t^2)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\to+\infty. \tag{30}$$

Отсюда с использованием (29) находим

$$\varphi(y(t)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sigma} t^{2+2\sigma}\left[y''(t)\right]^{1+\sigma}\psi(t^2)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\to+\infty,$$

или

$$\varphi(y(t)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sigma}\varphi(t^2)\left[y''(t)\right]^{1+\sigma}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

Поэтому из (1) имеем

$$\frac{y'''(t)}{\left[y''(t)\right]^{1+\sigma}} = \alpha_0\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sigma} p(t)\varphi(t^2)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\to+\infty. \tag{31}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t и учитывая, что $\lim\limits_{t\to+\infty} y''(t)$ равен либо нулю, либо $\pm\infty$, получаем

$$\left[y''(t)\right]^{-\sigma} = -\alpha_0\sigma J_3(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

Отсюда следует, что выполняется неравенство (26) и имеет место третье из асимптотических представлений (28). Из этого представления с учетом первых двух предельных соотношений (29) получаем первое и второе из асимптотических представлений (28). Условия (27) непосредственно вытекают из (28), если учесть первое из условий (3), третье из предельных соотношений (29), а также (31).

Достаточность. Пусть функция φ удовлетворяет условию S_2, $\omega = +\infty$ и выполняются условия (26), (27). В силу первого из условий (27) найдется число $t_0 \in [a, +\infty[$ такое, что при $t \geq t_0$ имеет место неравенство $\frac{1}{4} t^2 |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} \geq$ $\geq \max\{0, y_0\}$. Выбирая таким образом число t_0 и применяя к уравнению (1) преобразование

$$y(t) = \frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} [1 + v_1(\tau)], \qquad y'(t) = t |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} [1 + v_2(\tau)],$$
$$y''(t) = |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} [1 + v_3(\tau)], \quad \tau = \ln t, \tag{32}$$

с учетом (26) и того, что

$$\varphi\left(\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} (1 + v_1)\right) =$$
$$= \varphi\left(\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\right) + \frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} \varphi'\left(\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\right) v_1 +$$
$$+ \frac{1}{8} t^4 |\sigma J_3(t)|^{-\frac{2}{\sigma}} \varphi''\left(\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} (1 + \xi)\right) v_1^2,$$

где $\xi = \xi(t, v_1)$ удовлетворяет неравенству $0 < |\xi| < |v_1|$ при $t \geq t_0$ и $|v_1| \leq \frac{1}{2}$, получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} v_1' &= q(\tau) + [q(\tau) - 2] v_1 + 2 v_2, \\ v_2' &= q(\tau) + [q(\tau) - 1] v_2 + v_3, \\ v_3' &= q(\tau) [f(\tau) + c(\tau) v_1 + v_3 + V(\tau, v_1)], \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$q(\tau(t)) = \frac{t J_3'(t)}{\sigma J_3(t)}, \qquad f(\tau(t)) = 1 - \frac{\varphi\left(\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sigma} \varphi(t^2) |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}},$$

$$c(\tau(t)) = -\frac{\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} \varphi'\left(\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sigma} \varphi(t^2) |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}},$$

$$V(\tau(t), v_1) = -\frac{\frac{t^4}{8} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{2}{\sigma}} \varphi''\left(\frac{t^2}{2} |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1}{\sigma}} (1 + \xi)\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sigma} \varphi(t^2) |\sigma J_3(t)|^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}} v_1^2.$$

Здесь в силу условий (27), (2) и S_2

$$\lim_{\tau \to +\infty} q(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau \to +\infty} f(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau \to +\infty} c(\tau) = -1 - \sigma, \tag{34}$$

$$\lim_{v_1 \to 0} \frac{V(\tau, v_1)}{v_1} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \tau \in [\ln t_0, +\infty[. \tag{35}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\ln t_0}^{+\infty} q(s)\,ds = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{J_3'(u)\,du}{\sigma J_3(u)} = \frac{1}{\sigma}\ln|J_3(u)|\Big|_{t_0}^{+\infty} = \pm\infty. \tag{36}$$

Теперь, применяя к системе дифференциальных уравнений (33) дополнительное преобразование

$$v_1 = z_1, \quad v_2 = z_2, \quad v_3 = z_3 + h_1(\tau)z_2 + h_2(\tau)z_1, \tag{37}$$

где $(h_i)_{i=1}^2\colon [\ln t_1, +\infty[\;\to \mathbb{R}^2$ $(t_1 \ge t_0)$ — исчезающее при $\tau \to +\infty$ решение системы дифференциальных уравнений

$$h_1' = h_1 - 2h_2 - h_1^2,$$

$$h_2' = q(\tau)c(\tau) + 2h_2 - h_1h_2,$$

существующее в силу условий (34) согласно теореме 1.3 и замечанию 1.4 работы [8], получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= q(\tau) + [q(\tau)-2]z_1 + 2z_2, \\ z_2' &= q(\tau) + h_2(\tau)z_1 + \big[q(\tau)+h_1(\tau)-1\big]z_2 + z_3, \\ z_3' &= q(\tau)f_1(\tau) + \left[q(\tau)c_1(\tau) + \frac{\big(1-h_1(\tau)-h_2(\tau)\big)'}{1-h_1(\tau)-h_2(\tau)}\right]z_3 + q(\tau)V(\tau, z_1), \end{aligned} \tag{38}$$

в которой

$$f_1(\tau) = f(\tau) - h_1(\tau) - h_2(\tau), \quad c_1(\tau) = 1 + \frac{c(\tau)}{1-h_1(\tau)-h_2(\tau)}.$$

Поскольку

$$\lim_{\tau\to+\infty} h_i(\tau) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{39}$$

и выполняются второе и третье из условий (34), то

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_1(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} c_1(\tau) = -\sigma \ne 0. \tag{40}$$

В силу условий (34) – (36), (39) и (40) система дифференциальных уравнений (38) имеет на основании теоремы 1.3 и замечания 1.4 работы [8] хотя бы одно решение $(z_i)_{i=1}^2\colon \big[\ln t_2, +\infty\big[\;\to \mathbb{R}^2$ $(t_2 \ge t_1)$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Ему в силу замен (37) и (32) соответствует решение $y\colon [t_2, +\infty[\;\to [y_0, +\infty[$ дифференциального уравнения (1), допускающее при $t \to +\infty$ асимптотические представления (28). Учитывая эти представления и условия (27), легко убеждаемся в том, что данное решение уравнения (1) является $P_{+\infty 1}(\pm\infty)$-решением.

Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Если выполняются условия (26) и (27), то, учитывая замечание 1.1 из работы [8], нетрудно проверить, что случае $\alpha_0 > 0$ уравнение (1) имеет двупараметрическое семейство $P_{+\infty 1}(\pm\infty)$-решений, допускающих при $t \to +\infty$ асимптотические представления (28), а в случае $\alpha_0 < 0$ — трехпараметрическое семейство таких решений.

В качестве примера, иллюстрирующего установленные результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' = \alpha t^{\gamma} y^{1+\sigma} \ln^{\mu} y, \tag{41}$$

где $\alpha, \sigma, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$, причем $\alpha \neq 0$, $\sigma \neq 0$ и $(1+\sigma)^2 + \mu^2 \neq 0$. Оно является уравнением вида (1), в котором $\alpha_0 = \operatorname{sign}\alpha$, $p(t) = |\alpha| t^{\gamma}$, $\varphi(y) = y^{1+\sigma}\ln^{\mu} y$. Здесь функция φ удовлетворяет условиям (2), а также условиям S_1 и S_2. Кроме того, для функций J_k, $k = 1, 2, 3$, из теорем 1 и 2 имеют место при $t \to \to +\infty$ асимптотические представления

$$J_1(t) = |\alpha| \int_{A_1}^{t} \tau^{1+\gamma+\sigma} \ln^{\mu} \tau \, d\tau \sim$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{|\alpha| t^{2+\gamma+\sigma} \ln^{\mu} t}{2+\gamma+\sigma}, & \text{если} \quad 2+\gamma+\sigma \neq 0, \\ \dfrac{|\alpha| \ln^{\mu+1} t}{\mu+1}, & \text{если} \quad 2+\gamma+\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu \neq -1, \\ |\alpha| \ln\ln t, & \text{если} \quad 2+\gamma+\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu = -1, \end{cases}$$

$$J_2(t) = \int_{A_2}^{t} J_1(\tau) \, d\tau \sim$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{|\alpha| t^{3+\gamma+\sigma} \ln^{\mu} t}{(2+\gamma+\sigma)(3+\gamma+\sigma)}, & \text{если} \quad (2+\gamma+\sigma)(3+\gamma+\sigma) \neq 0, \\ -\dfrac{|\alpha| \ln^{\mu+1} t}{\mu+1}, & \text{если} \quad 3+\gamma+\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu \neq -1, \\ -|\alpha| \ln\ln t, & \text{если} \quad 3+\gamma+\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu = -1, \\ \dfrac{|\alpha| t \ln^{\mu+1} t}{\mu+1}, & \text{если} \quad 2+\gamma+\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu \neq -1, \\ |\alpha| t \ln\ln t, & \text{если} \quad 2+\gamma+\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu = -1, \end{cases}$$

$$J_3(t) = \frac{|\alpha|}{2^{1+\sigma-\mu}} \int_{A_3}^{t} \tau^{2+\gamma+2\sigma} \ln^{\mu} \tau \, d\tau \sim$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{|\alpha| t^{3+\gamma+2\sigma} \ln^{\mu} t}{2^{1+\sigma-\mu}(3+\gamma+2\sigma)}, & \text{если} \quad (3+\gamma+2\sigma) \neq 0, \\ \dfrac{|\alpha| \ln^{\mu+1} t}{2^{1+\sigma-\mu}(\mu+1)}, & \text{если} \quad 3+\gamma+2\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu \neq -1, \\ \dfrac{|\alpha| \ln\ln t}{2^{1+\sigma-\mu}}, & \text{если} \quad 3+\gamma+2\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \mu = -1. \end{cases}$$

В силу этих представлений из теорем 1 и 2 настоящей работы непосредственно вытекают следующие утверждения.

***Следствие* 1.** *Для существования* $P_{+\infty 1}(0)$*-решений уравнения* (41) *необходимо и достаточно, чтобы* $3+\gamma+\sigma = 0$ *и выполнялось неравенство*

$$\alpha\sigma(1+\mu) > 0, \quad \textit{если} \quad \mu \neq -1,$$

$$\alpha\sigma > 0, \quad \textit{если} \quad \mu = -1.$$

Более того, если $\mu \neq -1$, *то каждое такое решение допускает при* $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y(t) \sim \rho_1 t(\ln t)^{-\frac{\mu+1}{\sigma}}, \qquad y'(t) \sim \rho_1(\ln t)^{-\frac{\mu+1}{\sigma}}, \qquad y''(t) \sim -\frac{\rho_1(\mu+1)}{\sigma}\frac{(\ln t)^{-\frac{\mu+1+\sigma}{\sigma}}}{t},$$

где $\rho_1 = \left|\dfrac{\alpha\sigma}{\mu+1}\right|^{-\frac{1}{\sigma}}$, *а если* $\mu = -1$, *то — асимптотические представления вида*

$$y(t) \sim \rho_2 t(\ln\ln t)^{-\frac{1}{\sigma}}, \qquad y'(t) \sim \rho_2(\ln\ln t)^{-\frac{1}{\sigma}}, \qquad y''(t) \sim -\frac{\rho_2}{\sigma}\frac{(\ln\ln t)^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}}{t\ln t},$$

где $\rho_2 = |\alpha\sigma|^{-\frac{1}{\sigma}}$.

Следствие 2. *Для существования* $P_{+\infty 1}(\pm\infty)$*-решений уравнения* (41) *необходимо и достаточно, чтобы* $3+\gamma+2\sigma = 0$ *и выполнялось неравенство*

$$\alpha\sigma(1+\mu) < 0, \quad \text{если} \quad \mu \neq -1,$$

$$\alpha\sigma < 0, \quad \text{если} \quad \mu = -1.$$

Более того, если $\mu \neq -1$, *то каждое такое решение допускает при* $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y(t) \sim \frac{\rho_3 t^2}{2}(\ln t)^{-\frac{\mu+1}{\sigma}}, \qquad y'(t) \sim \rho_3 t(\ln t)^{-\frac{\mu+1}{\sigma}}, \qquad y''(t) \sim \rho_3(\ln t)^{-\frac{\mu+1}{\sigma}},$$

где $\rho_3 = \left|\dfrac{\alpha\sigma}{(\mu+1)2^{1+\sigma-\mu}}\right|^{-\frac{1}{\sigma}}$, *а если* $\mu = -1$, *то — асимптотические представления вида*

$$y(t) \sim \frac{\rho_4 t^2}{2}(\ln\ln t)^{-\frac{1}{\sigma}}, \qquad y'(t) \sim \rho_4 t(\ln\ln t)^{-\frac{1}{\sigma}}, \qquad y''(t) \sim \rho_4(\ln\ln t)^{-\frac{1}{\sigma}},$$

где $\rho_4 = \left|\dfrac{\alpha\sigma}{2^{1+\sigma-\mu}}\right|^{-\frac{1}{\sigma}}$.

Выводы. В работах [5, 6] для обобщенного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка был введен достаточно широкий класс так называемых P_ω-решений, который по своим асимптотическим свойствам распадается на $n+2$ непересекающихся подмножества. Для P_ω-решений каждого из $(n+2)$-х возможных типов были получены необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические представления при $t \uparrow \omega$.

В настоящей статье в качестве объекта исследования выбрано двучленное дифференциальное уравнение третьего порядка (1) с нелинейностью более общего вида, чем у уравнений типа Эмдена – Фаулера. Для этого уравнения разработана методика, позволяющая установить асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ неограниченных P_ω-решений, для которых $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = \pm\infty$. При этом были также получены необходимые и достаточные условия существования таких решений. Следует обратить внимание на то, что здесь, в отличие от работы [7], где исследовались неограниченные P_ω-решения уравнения (1) со значениями $\lambda_0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \pm\infty\right\}$, асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ выписываются в явном виде. Полученные результаты проиллюстрированы на классическом в данном направлении исследований примере уравнения со степенным коэффициентом.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991.
2. *Абдул Г. Б.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1988.
3. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 524 – 526.
4. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений *n*-го порядка // Докл. расшир. заседаний Ин-та прикл. математики Тбил. ун-та. – 1988. – **3**, № 3. – С. 62 – 65.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера *n*-го порядка // Докл. РАН. – 1992. – **234**, № 2. – С. 258 – 260.
6. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения *n*-го порядка типа Эмдена – Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 2. – С. 269 – 273.
7. *Евтухов В. М., Стехун А. А.* Асимптотические представления неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 82 – 87.
8. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 433 – 444.

Получено 08.12.2005