УДК 512.544

Дж. Винчензи (Ун-т Салерно, Италия),
Л. А. Курдаченко (Днепропетр. нац. ун-т),
А. Руссо (Второй ун-т Неаполя, Италия)

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ, ВСЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ БЛИЗКИ К ПРОНОРМАЛЬНЫМ

A subgroup H of a group G is said to be *nearly pronormal* in G if, for each subgroup L of the group G including H, the normalizer $N_L(H)$ is contranormal in L. We prove that if G is a (generalized) soluble group in which every subgroup is nearly pronormal, then all subgroups of G are pronormal.

Підгрупа H групи G називається *наближено пронормальною* в G, якщо для кожної підгрупи L групи G, що містить у собі H, нормалізатор $N_L(H)$ є контранормальним в L. Доведено, що якщо G — (узагальнено) розв'язна група, в якій кожна підгрупа є наближено пронормальною, то всі підгрупи G пронормальні.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной* в G, если подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$ для любого элемента $g \in G$. Пронормальные подгруппы естественным образом возникли в процессе изучения таких важных типов подгрупп конечных (разрешимых) групп, как силовские и холловские подгруппы, системные нормализаторы и картеровы подгруппы. Термин „пронормальная подгруппа" был введен в рассмотрение Ф. Холлом более тридцати лет назад, и первые результаты о пронормальных подгруппах появились в статье Д. Роуса [1]. В конечных, особенно разрешимых, группах свойства пронормальных подгрупп, их важные характеризации и их взаимоотношения с другими важными типами подгрупп были изучены очень детально. Одними из важных типов подгрупп, связанных с пронормальными, являются следующие.

Подгруппа H группы G называется *абнормальной* в G, если $g \in \langle H, H^g \rangle$ для любого элемента $g \in G$. Абнормальные подгруппы впервые были рассмотрены Ф. Холлом [2], но сам термин „абнормальная подгруппа" был введен в рассмотрение Р. Картером [3]. Абнормальные группы являются самонормализуемыми, так что абнормальность — реальный антипод нормальности. Очевидно, любая абнормальная подгруппа пронормальна и любая ненормальная максимальная подгруппа абнормальна. Более того, если H — абнормальная подгруппа в G, то $H^G = H$.

Следуя Д. Роусу [4], назовем подгруппу H группы G *контранормальной*, если $H^G = H$. Таким образом, любая абнормальная подгруппа контранормальна, но обратное верно далеко не всегда. Так, локально нильпотентные группы не включают в себя собственных абнормальных подгрупп, но в тоже время имеют контранормальные подгруппы. Например, если $G = \langle b, a_n \mid a_1^2 = 1,\ a_{n+1}^2 = a_n,\ b^2 = 1,\ a_n^b = a_n^{-1},\ n \in \mathbb{N} \rangle$ — бесконечная диэдральная группа, то она, очевидно, гиперцентральна, а ее подгруппа $\langle b \rangle$ контранормальна. Если H — пронормальная подгруппа группы G, то $N_G(H)$ абнормальна в G (см., например, [5], лемму I.6.21); в частности, $N_G(H)$ контранормальна в G. Более того, если K — подгруппа, включающая в себя H, то $N_K(H)$ абнормальна в K и, следовательно, $N_K(H)$ контранормальна в K.

Подгруппу H группы G назовем *приближенно пронормальной*, если $N_K(H)$ контранормальна в каждой подгруппе K, включающей к себя H. Как можно видеть, приближенно пронормальные подгруппы являются обобщением пронормальных подгрупп.

В бесконечных группах исследования пронормальных и связанных с ними подгрупп были начаты в работах Н. Ф. Кузенного и И. Я. Субботина [6 – 9].

Вместе с тем интерес к такого рода подгруппам возник в связи с исследованиями З. И. Боревича и его учеников в бесконечных линейных группах над кольцами. В обзоре [10] М. С. Ба и З. И. Боревич рассмотрели очень много интересных типов подгрупп, возникающих в процессе этих исследований, а также их взаимные связи. Исследования подгрупп, связанных с пронормальными, были продолжены в серии статей Ф. де Жиованни и Дж. Винчензи (см. обзор. [11]), а также других авторов (см., например, [12 – 14]).

В работе [6] дано описание обобщенно разрешимых групп, все подгруппы которых пронормальны. Эти группы очень тесно связаны с группами, в которых отношение нормальности транзитивно. Напомним, что группа G называется *T-группой*, если каждая субнормальная подгруппа G будет нормальной. Группа G называется *$\overline{T}$-группой*, если каждая подгруппа G является T-группой. Строение конечных разрешимых T-групп описано В. Гашюцем [15]. В частности, оказалось, что любая конечная T-группа является $\overline{T}$-группой. Строение бесконечных разрешимых T-групп изучалось Д. Робинсоном [16]. Отметим, что разрешимые T-группы метабелевы, а непериодические разрешимые T-группы абелевы. В работе [9] было показано, что если любая циклическая подгруппа локально разрешимой группы G пронормальна, то G является $\overline{T}$-группой. В этой связи естественно возникает вопрос о строении групп, все подгруппы (соответственно, все циклические подгруппы) которых приближенно пронормальны. Изучение таких групп и является целью данной работы.

Лемма 1. *Пусть G — группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны.*

1. *Если H — подгруппа G, то любая циклическая подгруппа H приближенно пронормальна в H.*

2. *Если L — нормальная подгруппа G, то любая циклическая подгруппа G/L приближенно пронормальна в G/L.*

3. *Если H — подгруппа G, L — нормальная подгруппа H, то любая циклическая подгруппа H/L приближенно пронормальна в H/L.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Пусть C/L — произвольная циклическая подгруппа G/L и K/L — подгруппа, включающая в себя C/L. Тогда $C/L = \langle cL\rangle$ для некоторого элемента $c \in G$. Поскольку подгруппа $\langle c\rangle$ приближенно пронормальна, то $K = (N_K(\langle c\rangle))^K$. Включение $N_{K/L}(C/L) \geq N_K(\langle c\rangle)L/L$ показывает, что подгруппа $N_{K/L}(C/L)$ контранормальна в K/L. Это и означает, что C/L приближенно пронормальна в G/L. Последнее утверждение является следствием первых двух.

Лемма 2. *Пусть G — группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Если H — подгруппа G, а L — такая нормальная подгруппа H, что H/L локально нильпотентна, то секция H/L дедекиндова.*

Доказательство. Предположим сначала, что H/L нильпотентна. Пусть C/L — произвольная ее циклическая подгруппа. В силу леммы 1 подгруппа C/L приближенно пронормальна в H/L. Допустим, что C/L не будет нормальной подгруппой в H/L. Тогда $K/L = N_{H/L}(C/L) \neq H/L$. Из нильпотентности H/L следует, что подгруппа K/L субнормальна в H/L. Поэтому в H/L существует собственная нормальная подгруппа D/L, включающая в себя K/L. Но тогда $(K/L)^{H/L} \leq D/L \neq H/L$. Полученное противоречие показывает, что любая циклическая подгруппа H/L нормальна в H/L. Это влечет за собой нормальность в H/L и любой ее подгруппы.

Предположим теперь, что H/L локально нильпотентна. В силу леммы 1 и доказанного выше любая конечнопорожденная подгруппа H/L будет дедекиндовой. В частности, любая конечнопорожденная подгруппа H/L нильпотентна ступени нильпотентности не выше 2 (см., например, [17], предложение 5.3.7). Тогда и H/L нильпотентна ступени нильпотентности не выше 2. Согласно доказанному выше H/L будет дедекиндовой.

***Следствие* 1.** *Пусть G — группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Если H — подгруппа G, а L — такая нормальная подгруппа H, что секция H/L непериодическая локально нильпотентна, то H/L будет абелевой.*

В силу леммы 2 для доказательства достаточно лишь отметить, что непериодическая дедекиндова группа абелева (см., например, [17], предложение 5.3.7).

***Следствие* 2.** *Пусть G — группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Если H — подгруппа G, а L — такая нормальная подгруппа H, что секция H/L периодическая локально нильпотентна и $2 \notin \Pi(H/L)$, то H/L будет абелевой.*

В силу леммы 2 для доказательства достаточно лишь отметить, что периодическая дедекиндова группа, не имеющая элементов порядка 2, абелева (см., например, [17], предложение 5.3.7).

Лемма 3. *Пусть G — группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Если H, K — такие подгруппы G, что H нормальна в K и K/H локально нильпотентна, то любая нормальная в H циклическая подгруппа будет K-инвариантной.*

Доказательство. Пусть C — нормальная в H циклическая подгруппа, так что $N_K(C) \geq H$. Из леммы 1 следует, что K/H дедекиндова, в частности нильпотентна (см., например, [17], предложение 5.3.7). Будучи контранормальной в K, $N_K(C)$ не может совпадать с H. Предположим, что C не нормальна в K, т. е. $D = N_K(H) \neq K$. Таким образом, D/H — неединичная собственная подгруппа K/H. Из равенства $D^K = K$ следует равенство $(D/H)^{K/H} = K/H$. Поскольку K/H нильпотентна, то, как мы видели выше, она не может включать собственных контранормальных подгрупп. Это противоречие показывает, что C нормальна в K.

***Следствие* 1.** *Пусть G — группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Пусть, далее, H, K — такие подгруппы G, что существует возрастающий ряд*

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_\alpha \lhd H_{\alpha+1} \lhd \ldots \lhd H_\gamma = K,$$

соединяющий H и K, факторы $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ которого локально нильпотентны при любом $\alpha < \gamma$. Тогда любая нормальная в H циклическая подгруппа будет K-инвариантной.

Доказательство. Пусть C — нормальная в H циклическая подгруппа. Воспользуемся индукцией по γ. Если $\gamma = 1$, то результат следует из леммы 3. Предположим, что $\gamma > 1$ и уже доказана нормальность подгруппы C в H_α для всех $\alpha < \gamma$. Если γ — предельное порядковое число, то $H_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} H_\alpha$ и, очевидно, C нормальна в $H_\gamma = K$. Пусть теперь $\gamma - 1$ существует и положим $L = H_{\gamma-1}$. Индуктивное допущение показывает, что C нормальна в L. Поскольку K/L локально нильпотентна, лемма 3 показывает, что C нормальна в K.

***Следствие* 2.** *Пусть G — группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Пусть, далее, H, K — такие подгруппы G, что H — восходящая подгруппа K, а K радикальна. Если C — циклическая нор-*

мальная подгруппа H, *то* C — K *инвариантна.*

Доказательство. Пусть

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_\alpha \lhd H_{\alpha+1} \lhd \ldots \lhd H_\gamma = K$$

— возрастающий ряд между H и K. Из того, что K радикальна, следует уплотнение этого ряда

$$H = L_0 \lhd L_1 \lhd \ldots \lhd L_\beta \lhd L_{\beta+1} \lhd \ldots \lhd L_\sigma = K,$$

факторы которого $L_{\beta+1}/H_\beta$ локально нильпотентны при любом $\beta < \sigma$. Теперь можно применить предыдущее следствие.

***Следствие* 3.** *Пусть* G — *радикальная группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Если* C — *циклическая восходящая подгруппа* G, *то* C — G *инвариантна.*

Лемма 4. *Пусть* G — *радикальная группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Тогда либо* G — *дедекиндова группа, либо* G *включает в себя нормальную подгруппу* L, *удовлетворяющую следующим условиям*:

1) L *дедекиндова*;
2) G/L *абелева*;
3) $C_G(L) \le L$;
4) *каждая подгруппа* L *будет* G-*инвариантной.*

Доказательство. Пусть L — локально нильпотентный радикал G. В силу леммы 2 L дедекиндова. Отсюда следует, что любая циклическая подгруппа L будет нормальной в L, в частности, она субнормальна в G. Следствие 3 леммы 3 показывает, что любая циклическая подгруппа L будет G-инвариантной, а потому и любая подгруппа L также является G-инвариантной. Тогда $G/C_G(L)$ абелева (см., например, [18], теорему 1.5.1). Если $G = C_G(L)$, то G нильпотентна и потому дедекиндова в силу леммы 2. Если $G \ne C_G(L)$, то $C_G(L) \le L$ [19] (теорема 7).

Если G — разрешимая группа, то обозначим через $s(G)$ ступень разрешимости G.

***Следствие* 1.** *Пусть* G — *локально радикальная группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Тогда либо* G — *дедекиндова группа, либо* G *включает в себя нормальную подгруппу* L, *удовлетворяющую следующим условиям*:

1) L *дедекиндова*;
2) G/L *абелева*;
3) $C_G(L) \le L$;
4) *каждая подгруппа* L *будет* G-*инвариантной.*

В частности, G *гиперциклическая.*

В самом деле, в силу лемм 1, 4 каждая конечнопорожденная подгруппа K группы G разрешима, причем $s(K) \le 3$. Отсюда следует, что G разрешима и можно применить лемму 4.

***Следствие* 2.** *Пусть* G — *конечная разрешимая группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Тогда* G *сверхразрешима.*

***Следствие* 3.** *Пусть* G — *конечная группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Тогда группа* G *сверхразрешима.*

Доказательство. В силу следствия 2 достаточно показать, что G разрешима. Предположим противное. Выберем в G минимальную неразрешимую подгруппу L. Если H — собственная подгруппа L, то, согласно лемме 1 и следствию 3 леммы 4, H сверхразрешима. Однако конечная группа, все собственные подгруппы которой сверхразрешимы, разрешима [20] (предложение VI.9.6). Полученное противоречие и доказывает разрешимость группы G.

Д. Роус [1] показал, что произведение пронормальной и нормальной подгрупп будет пронормальной подгруппой (см. также [11], следствие 2.8). В некоторых специальных случаях будет верным и обращение этого результата (см. [21], лемму 3.3). Поскольку в дальнейшем нам будет необходимо использовать этот результат, для удобства читателей приведем его с доказательством.

Лемма 5. *Пусть G — конечная группа, H — p-подгруппа G и L — нормальная p'-подгруппа G для некоторого простого числа p. Если HL пронормальна в G, то и H пронормальна в G.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент G. Из того, что HL пронормальна в G, следует существование такого элемента $y \in \langle HL, (HL)^x \rangle$, что $(HL)^x = (HL)^y = H^y L$. В частности, $H^x \leq H^y L$. Равенства $\langle HL, (HL)^x \rangle = \langle HL, H^x L \rangle = \langle H, H^x \rangle L$ показывают,что $y = uv$, где $u \in \langle H, H^x \rangle$, $v \in L$. Тогда $v(H^y L)v^{-1} \leq H^y L$, а поскольку $v(H^y L)v^{-1} = H^u L$, то $H^u L \leq H^y L$. Итак, $H^x \leq H^y L$ и $H^u \leq H^y L$, так что $\langle H^x, H^u \rangle \leq H^y L$. Поскольку H^x, H^u — силовские p-подгруппы в $H^y L$, они будут и силовскими p-подгруппами в $\langle H^x, H^u \rangle$. Но тогда они сопряжены в этой последней подгруппе, т. е. $H^x = H^{uz}$ для некоторого $z \in \langle H^x, H^u \rangle$. Так как и $u \in \langle H, H^x \rangle$, то $uz \in \langle H, H^x \rangle$. Итак, подгруппы H и H^x сопряжены в $\langle H, H^x \rangle$, а это и означает, что H пронормальна в G.

Лемма 6. *Пусть G — конечная группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Тогда любая циклическая подгруппа G пронормальна. В частности, G — $\overline{T}$-группа.*

Доказательство. В силу следствия 3 леммы 4 группа G разрешима. Предположим противное и выберем среди всех конечных групп, удовлетворяющих условию леммы и содержащих циклические непронормальные подгруппы, группу L, имеющую наименьший порядок. Пусть C — циклическая подгруппа L, не являющаяся пронормальной. Отметим, что группа L разрешима в силу следствия 3 леммы 4. Если для любого $p \in \Pi(C)$ силовская p-подгруппа C пронормальна в L, то C пронормальна в L [5] (теорема I.6.10). Это показывает, что найдется простое число p, для которого силовская p'-подгруппа D из C не пронормальна в L. Положим $K = [L, L]$. Как было отмечено, $K \neq L$. Пусть R — силовская p'-подгруппа K, и предположим, что R неединична. В силу следствия 3 леммы 4 и самой леммы 4 любая подгруппа K будет L-инвариантной, в частности, R нормальна в L. Поскольку $|L/R| < |L|$, из выбора L и леммы 1 получаем, что любая циклическая подгруппа L/R будет пронормальной. В частности, DR пронормальна. Тогда из леммы 5 следует, что D пронормальна в L. Получили противоречие. Это противоречие показывает, что K — p-подгруппа. Но в этом случае силовская p-подгруппа P группы L нормальна. Из лемм 2, 3 получаем, что D нормальна в L, в частности, D пронормальна в L. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 7. *Пусть G — локально радикальная группа, все циклические подгруппы которой приближенно пронормальны. Если G непериодическая, то она абелева.*

Доказательство. В силу следствия 1 леммы 4 либо G — дедекиндова группа, либо G включает в себя собственную нормальную подгруппу $L \geq [G, G]$, каждая подгруппа которой будет G-инвариантной. Если G — дедекиндова, то достаточно лишь отметить, что непериодическая дедекиндова группа абелева (см., например, [17], предложение 5.3.7).

Предположим, что G — недедекиндова, и покажем, что любая циклическая подгруппа G пронормальна в G. Предположим противное, т. е. пусть G включает в себя циклическую подгруппу C, которая не пронормальна в G. Это означает, что найдется такой элемент $g \in G$, что подгруппы C и C^g не сопряжены в $\langle C, C^g \rangle$. Поскольку C приближенно пронормальна, то $(N_G(C))^G = G$. Отсюда получаем равенство $N_G(C)L = G$, а значит, $g = xy$, где $x \in N_G(C)$, $y \in L$. Но тогда $C^g = C^y$ и подгруппы C, C^y не сопряжены в $\langle C, C^y \rangle$. Это означает, что C не может быть пронормальной в $K = \langle C, y \rangle$. Если допустить, что обе подгруппы C и $\langle y \rangle$ конечны, то K конечна. Тогда из лемм 1, 6 получаем, что подгруппа C пронормальна в K. Предположим теперь, что $\langle y \rangle$ бесконечна. Пусть c — элемент, для которого $C = \langle c \rangle$. Если допустить, что $[y, c] = 1$, то K абелева. Но тогда снова получаем, что C пронормальна в K. Так как $\langle y \rangle$ — G-инвариантна, то $y^c = y^{-1}$. Если допустить, что $N_K(C) \bigcap \bigcap \langle y \rangle = \langle z \rangle \neq \langle 1 \rangle$, то $[z, c] = 1$, а отсюда вытекает равенство $[y, c] = 1$, т. е приходим к уже рассмотренной ситуации. Итак, пусть теперь $C \bigcap \langle y \rangle = \langle 1 \rangle$. Если допустить, что в этом случае $N_K(C) \bigcap \langle y \rangle = \langle v \rangle \neq \langle 1 \rangle$, то $[v, c] = 1$, а отсюда опять вытекает равенство $[y, c] = 1$. Итак, пусть $N_K(C) \bigcap \langle y \rangle = \langle 1 \rangle$. Это означает, что $N_K(C) = C$. В этом случае C контранормальна в K, а значит, CW/W контранормальна в K/W, где $W = \langle y^2 \rangle$. Нетрудно видеть, что фактор-группа K/W абелева, и получаем противоречие, которое показывает, что подгруппа $\langle y \rangle$ должна быть конечной, а значит, подгруппа C — бесконечной. Но тогда C включает в себя K-инвариантную подгруппу D конечного индекса. Вследствие конечности K/D из лемм 1, 6 получаем, что C/D пронормальна в K/D. Но тогда C пронормальна в K, и снова получаем противоречие. Это противоречие показывает, что все циклические подгруппы пронормальны в G. Из результатов работ [8, 16] получаем теперь, что G — абелева группа.

Теорема. *Пусть G — локально радикальная группа.*

1. *Если все циклические подгруппы G приближенно пронормальны, то любая циклическая подгруппа G пронормальна. В частности, G — $\overline{T}$-группа.*

2. *Если все подгруппы G приближенно пронормальны, то все подгруппы G пронормальны.*

Доказательство. Если G — непериодическая группа, то G — абелева в силу леммы 7. Поэтому предположим, что G периодическая. Из лемм 1, 6 получаем, что любая конечная подгруппа G будет $\overline{T}$-группой. Из следствия 2 леммы 2.1.1 работы [16] нетрудно получить теперь, что и вся группа G будет $\overline{T}$-группой.

Пусть теперь все подгруппы G приближенно пронормальны. В силу следствия 1 леммы 4 либо G — дедекиндова группа, либо G включает в себя собственную нормальную подгруппу $L \geq [G, G]$, каждая подгруппа которой будет G-инвариантной. Если G дедекиндова, то все ее подгруппы нормальны, а потому и пронормальны. Предположим поэтому, что G недедекиндова, и покажем, что любая подгруппа G пронормальна в G. Предположим противное, т. е. пусть G включает в себя подгруппу H, которая не пронормальна в G. Это означает, что найдется такой элемент $g \in G$, что подгруппы H и H^g не сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Поскольку H приближенно пронормальна, то $(N_G(H))^G = G$. Отсюда получаем равенство $N_G(H)L = G$, а значит, $g = xy$, где $x \in N_G(H)$, $y \in L$. Но тогда $H^g = H^y$ и подгруппы H, H^y не сопряжены в $\langle H, H^y \rangle$. Это означает, что H не может быть пронормальной в $K = \langle H, y \rangle$. Так как G периодическая, то $\langle y \rangle$ конечна. Поскольку $y \in L$, то подгруппа $\langle y \rangle$ G-инвариантна. Тогда $K = \langle y \rangle H$, в частности, H имеет конечный индекс в K. Но тогда H включает в себя K-инвариантную подгруппу D конечного индекса. По доказанному выше G — $\overline{T}$-группа, так что и K/D будет конечной $\overline{T}$-группой. Но тогда все подгруппы K/D пронормальны [22], в частности, H/D пронормальна в K/D. Но тогда H пронормальна в K. Получили противоречие. Это противоречие и показывает, что все подгруппы пронормальны в G.

Напомним, что группа G называется *локально ступенчатой*, если любая ее неединичная конечнопорожденная подгруппа включает в себя собственную подгруппу конечного индекса.

Если G — разрешимая группа, то через $\delta_n(G)$ обозначим член ряда ее последовательных коммутантов, имеющий номер n.

***Следствие* 1.** *Пусть G — периодическая локально ступенчатая группа.*

1. *Если все циклические подгруппы G приближенно пронормальны, то любая циклическая подгруппа G пронормальна. В частности, G — $\overline{T}$-группа.*

2. *Если все подгруппы G приближенно пронормальны, то все подгруппы G пронормальны.*

Доказательство. Пусть H — произвольная неединичная конечнопорожденная подгруппа G. Обозначим через K пересечение всех подгрупп H, имеющих конечный индекс. Если L — нормальная подгруппа H, имеющая в H конечный индекс, то из лемм 1, 6 следует, что H/L будет $\overline{T}$-группой. Но тогда $\delta_2(H) \leq L$. Отсюда вытекает включение $\delta_2(H) \leq K$, которое показывает, что H/K — разрешимая группа. Будучи периодической, она конечна. Теперь из выбора K получаем $K = \langle 1 \rangle$. Таким образом, G — локально разрешимая группа, и утверждение вытекает из приведенной выше теоремы.

***Следствие* 2.** *Пусть G — группа, все простые секции которой конечны.*

1. *Если все циклические подгруппы G приближенно пронормальны, то любая циклическая подгруппа G пронормальна. В частности, G — $\overline{T}$-группа.*

2. *Если все подгруппы G приближенно пронормальны, то все подгруппы G пронормальны.*

Доказательство. Пусть H — произвольная неединичная конечнопорожденная подгруппа G и M — конечное подмножество, порождающее H. Обозначим через $\mathcal{R}$ семейство всех собственных нормальных подгрупп H. Если $L \in \mathcal{R}$, то, очевидно, L не включает в себя M. Отсюда вследствие конечности M получаем, что объединение любого линейно упорядоченного подсемейства из $\mathcal{R}$ не включает в себя M и потому принадлежит $\mathcal{R}$. Из леммы Цорна получаем, что $\mathcal{R}$ имеет максимальный элемент, т. е. H включает в себя максимальную собственную нормальную подгруппу U. Будучи простой, H/U конечна. Из лемм 1, 6 следует, что H/U будет $\overline{T}$-группой. Но тогда $\delta_2(H) \leq U$, в частности, $H \neq \delta_2(H)$. Предположим, что $V = \delta_2(H) \neq \langle 1 \rangle$. Если H/V периодическая, то, будучи разрешимой и конечнопорожденной, она конечна. В этом случае подгруппа V конечно порождена. Используя приведенные выше аргументы, получаем, что V включает в себя собственную нормальную подгруппу W конечного индекса. Положим $Y = \mathrm{Core}_H(W)$, тогда H/Y конечна и, как и выше, будет $\overline{T}$-группой. Но тогда $\delta_2(H) \leq Y$. С другой стороны, из выбора Y вытекает, что она является собственной подгруппой $\delta_2(H)$. Получили противоречие. Предположим теперь, что H/V непериодическая. Из леммы 1 и доказанной выше теоремы следует, что H/V абелева. В этом случае V включает в себя такое конечное подмножество Z, $\langle Z \rangle^H = V$ (см., например, [17], предложение 14.1.3). Будем считать, что Z — минимальное подмножество с этим свойством. Пусть $z \in Z$ и S — наибольшая H-инвариантная подгруппа V, включающая в себя $Z \backslash \{z\}$ и не содержащая элемента z. Тогда, очевидно, V/S — простая и, следовательно, конечная группа. Используя приведенные выше аргументы, снова приходим к противоречию. Это противоречие доказывает равенство $\delta_2(H) = \langle 1 \rangle$. В частности, H разрешима и G локально разрешима. Остается использовать доказанную выше теорему.

1. *Rose J. S.* Finite soluble groups with pronormal system normalizers // Proc. London Math. Soc. – 1967. – **17**. – P. 447 – 469.
2. *Hall P.* On system normalizers of soluble groups // Ibid. – 1937. – **43**. – P. 507 – 528.
3. *Carter R. W.* Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. – 1961. – **75**. – S. 136 – 139.
4. *Rose J. S.* Nilpotent subgroups of finite soluble groups // Ibid. – 1968. – **106**. – P. 97 – 112.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
6. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 325 – 329.
7. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Новая характеризация локально нильпотентных IH-групп // Там же. – 1988. – **40**, № 2. – С. 274 – 277.
8. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. вузов. Математика. – 1987. – **11**. – С. 77 – 79.
9. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Группы с пронормальными примарными подгруппами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 286 – 289.
10. *Ба М. С., Боревич З. И.* О расположении промежуточных подгрупп // Кольца и линейные группы. – Краснодар: Кубан. ун-т, 1988. – С. 14 – 41.
11. *de Giovanni F., Vincenzi G.* Some topics in the theory of pronormal subgroups of groups // Topics Infinite Groups. Quad. mat. – 2001. – **8**. – P. 175 – 202.
12. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On transitivity of pronormality // Comment. mat. Univ. carol. – 2002. – **43**, № 4. – P. 583 – 594.
13. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Pronormality, contranormality and generalized nilpotency in infinite groups // Publ. mat. – 2003. – **47**, № 2. – P. 389 – 414.
14. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Abnormal, pronormal, contranormal, and Carter subgroups in some generalized minimax groups // Communs Algebra. – 2005. – **33**, № 12. – P. 4595 – 4616.
15. *Gaschütz W.* Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist // J. reine und angew. Math. – 1957. – **198**. – S. 87 – 92.
16. *Robinson D. J. S.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1964. – **60**. – P. 21 – 38.
17. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. – New York: Springer, 1982. – 499 p.
18. *Schmidt R.* Subgroups lattices of groups. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
19. *Плоткин Б. И.* Радикальные группы // Мат. сб. – 1955. – **37**. – С. 507 – 526.
20. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin: Springer, 1967. – 793 S.
21. *de Giovanni F., Vincenzi G.* Pronormality in infinite groups // Proc. Roy. Irish Acad. – 2000. – **100A**. – P. 189 – 203.
22. *Peng T. A.* Finite groups with pronormal subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **20**. – P. 232 – 234.

Получено 02.11.2006,
после доработки — 13.01.2007