УДК 517.5

Ю. С. Коломойцев (Донец. нац. ун-т)

О МОДУЛЯХ ГЛАДКОСТИ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ФУРЬЕ В L_p, $0 < p < 1$

We obtain the theorem on the relationship between a modulus of smoothness and the best approximation in L_p, $0 < p < 1$, and theorems on the extension of functions with the preservation of the modulus of smoothness in L_p, $0 < p < 1$. In addition, we present a complete description of multipliers of periodic functions in the spaces L_p, $0 < p < 1$.

Отримано теорему про зв'язок між модулем гладкості та найкращим наближенням в L_p, $0 < p < 1$, і теореми про продовження функцій зі збереженням модуля гладкості в L_p, $0 < p < 1$. Крім того, наведено повний опис мультиплікаторів періодичних функцій у просторах L_p, $0 < p < 1$.

Пусть A — вещественная ось $\mathbb{R}$, единичная окружность $\mathbb{T}$ реализована как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами или конечный отрезок. Через $L_p = L_p(A)$, $0 < p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций f таких, что $\|f\|_p = \|f\|_p(A) < \infty$, где

$$\|f\|_p(A) := \begin{cases} \left(\int\limits_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{x \in A} |f(x)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{T}_n$ — множество тригонометрических полиномов порядка не выше n. Для 2π-периодических функций f через $E_n(f)_p := \inf\limits_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_p(\mathbb{T})$ обозначим наилучшее приближение функции f множеством $\mathcal{T}_n$.

Модуль гладкости функции $f \in L_p(A)$ порядка r и шага h определяют по формуле

$$\omega_r(f, h)_p := \omega_r(f, h)_p(A) := \sup_{0 < \delta \le h} \left(\int\limits_A |\Delta_\delta^r f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\Delta_\delta^r f(x) := \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} f(x + s\delta), & \text{если } [x, x + r\delta] \subset A, \\ 0, & \text{если } [x, x + r\delta] \not\subset A. \end{cases}$$

Оценка сверху величины $E_n(f)_p$, $0 < p < 1$, через модуль гладкости любого порядка $\omega_r(f, n^{-1})_p$ была получена Э. А. Стороженко и П. Освальдом [1] (см. также [2]). В п. 1 настоящей статьи получена теорема (см. ниже теорему 1), дающая условие, при котором величину $E_n(f)_p$ можно легко оценить снизу. Данная теорема является распространением на случай пространств $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, соответствующего результата Разора [3].

В настоящей статье также рассматривается вопрос о продолжении функций с сохранением модуля гладкости. В пространствах L_p при $p \ge 1$ теоремы о продолжении функций были получены В. К. Дзядыком [4], О. В. Бесовым [5] (см. также теоремы 4.1. в [6] и 4.6.12 в [7]). В п. 2 доказываются теоремы о продолжении функций из L_p, $0 < p < 1$, с отрезка на более широкий отрезок и на всю числовую прямую с сохранением свойств модуля гладкости (см. ниже теоремы 2 и 3).

В п. 3 рассматриваются мультипликаторы Фурье. Свойства мультипликаторов Фурье в пространствах $L_p(\mathbb{T})$ при $p \geq 1$ хорошо изучены (см., например, [8], гл. 4, п. II, [9], гл. 16, и [7], гл. 7). Мы рассмотрим мультипликаторы в $L_p(\mathbb{T})$ при $0 < p < 1$ и получим их полное описание (см. ниже теорему 4).

1. Далее во всей статье буква C будет обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров. Константы C могут быть различными даже в одной строке. Приведем ряд вспомогательных утверждений. Следующие два свойства модуля гладкости верны как в периодическом, так и в непериодическом случае (см., например, [6], гл. 12, § 5, или [7], гл. 4). Пусть $0 < p < 1$, $k, r \in \mathbb{N}$ $(k > r)$, $h > 0$ и $\lambda > 0$, тогда

$$\omega_k(f,h)_p \leq 2^{\frac{k-r}{p}} \omega_r(f,h)_p \leq 2^{\frac{r}{p}} \|f\|_p, \tag{1}$$

$$\omega_r(f,\lambda h)_p \leq r^{\frac{1}{p}-1}(1+\lambda)^{\frac{1}{p}+r-1}\omega_r(f,h)_p. \tag{2}$$

Теорема А [1, 2]. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, и $n, r \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$E_{n-1}(f)_p \leq C\omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p,$$

где константа C зависит только от r и p.

Известна также обратная теорема.

Теорема Б [10]. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, и $n, r \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{C}{n^r}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{rp-1}E_k(f)_p^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

где константа C зависит только от r и p.

Наша цель — доказать следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, и $r \in \mathbb{N}$. Для того чтобы существовала константа $L > 0$ такая, что при всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \leq LE_{n-1}(f)_p, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $k > r - 1 + \dfrac{1}{p}$ существовала константа $M > 0$ такая, что при всех $h \in (0,1]$

$$\omega_r(f,h)_p \leq M\omega_k(f,h)_p. \tag{4}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполняется условие (4), тогда из свойств (1) и (2) модуля гладкости получаем, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1]$ верно неравенство

$$\omega_k(f,nh)_p \leq Cn^{r-1+\frac{1}{p}}\omega_k(f,h)_p, \tag{5}$$

где C — константа, которая зависит от r, p и M.

Докажем далее, что

$$\frac{1}{n^{kp}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{kp-1}E_\nu(f)_p^p \le C\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p^p, \tag{6}$$

где C — константа, которая зависит от r, p и M. Применяя теорему А и неравенство (5), последовательно имеем

$$\frac{1}{n^{kp}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{kp-1}E_\nu(f)_p^p \le \frac{C}{n^{kp}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{kp-1}\omega_k\left(f,\frac{1}{\nu+1}\right)_p^p \le$$

$$\le \frac{C}{n^{kp-(r-1)p-1}}\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p^p\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{kp-(r-1)p-2} \le C\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p^p.$$

Из теоремы Б следует, что для всех m и $n \in \mathbb{N}$

$$\omega_k\left(f,\frac{1}{mn}\right)_p^p \le \frac{C}{(mn)^{kp}}\sum_{\nu=0}^{mn}(\nu+1)^{kp-1}E_\nu(f)_p^p =$$

$$= \frac{C}{(mn)^{kp}}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{mn}(\nu+1)^{kp-1}E_\nu(f)_p^p + \sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{kp-1}E_\nu(f)_p^p\right\} \le$$

$$\le C\left\{\frac{1}{(mn)^{kp}}\sum_{\nu=n+1}^{mn}(\nu+1)^{kp-1}E_\nu(f)_p^p + \frac{1}{m^{kp}}\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p^p\right\},$$

откуда находим

$$\sum_{\nu=n+1}^{mn}(\nu+1)^{kp-1}E_\nu(f)_p^p \ge \frac{(mn)^{kp}}{C}\omega_k\left(f,\frac{1}{mn}\right)_p^p - n^{kp}\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p^p.$$

Далее, в силу монотонности $E_n(f)_p$ и свойства (5) получаем

$$E_n(f)_p^p\sum_{\nu=n+1}^{mn}(\nu+1)^{kp-1} \ge (Cm^{kp-(r-1)p-1}-1)n^{kp}\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p^p.$$

Выбирая подходящим образом m и выполняя простые вычисления, находим такую положительную константу C, что

$$E_n(f)_p^p \ge C\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_p^p.$$

Из последнего соотношения и неравенства (4) сразу следует (3).

Необходимость следует из теоремы А.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, *и* $r \in \mathbb{N}$. *Отношение*

$$E_n(f)_p \asymp \omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p, \quad n \to \infty,$$

выполняется тогда и только тогда, когда для некоторого $k > r - 1 + \dfrac{1}{p}$ *выполняется отношение*

$$\omega_r(f,h)_p \asymp \omega_k(f,h)_p, \quad h \to +0$$

(*двусторонние неравенства с положительными константами*).

2. Основным результатом в данном пункте являются следующие две теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $I \subset J$ — *два отрезка и* $0 < p < 1$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда существует линейный ограниченный оператор* T *такой, что* $T\colon L_p(I) \to L_p(J)$, $Tf(x) = f(x)$, $x \in I$, *и*

$$\omega_r(Tf,h)_p(J) \le C\omega_r(f,h)_p(I), \quad h \in (0,1],$$

где константа C *зависит только от* r, p *и отношения длин отрезков* $|J|/|I|$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_p(I)$, $0 < p < 1$, *и* I — *отрезок. Тогда*:

i) *если при* $r \ge 2$ *и некотором* $k \in [1, r-1]$ *интеграл* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(k-1)p+2}}du < \infty$, *то существует линейный ограниченный оператор* U *продолжения функции* f *на* $\mathbb{R}$, *причем, после исправления функции* f *на множестве меры нуль,* $(Uf)^{(k-1)}$ *локально абсолютно непрерывна на* $\mathbb{R}$, $Uf(x) = f(x)$ *при* $x \in I$ *и*

$$\omega_r(Uf,h)_p(\mathbb{R}) \le C\left\{h^{k-1+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^h \frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(k-1)p+2}}du\right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=k+1}^{r} h^{\nu-1+\frac{1}{p}}\left(\|f\|_p^p + \int\limits_h^1 \frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(\nu-1)p+2}}du\right)^{\frac{1}{p}}\right\}, \quad h \in (0,1],$$

где константа C *зависит только от* r, p, k *и* $|I|$;

ii) *при* $r \ge 1$ *существует линейный ограниченный оператор* E *такой, что* $Ef(x) = f(x)$ *при* $x \in I$ *и*

$$\omega_r(Ef,h)_p(\mathbb{R}) \le$$

$$\le C\left\{\omega_r(f,h)_p + \sum_{\nu=1}^{r} h^{\nu-1+\frac{1}{p}}\left(\|f\|_p^p + \int\limits_h^1 \frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^3}du\right)^{\frac{1}{p}}\right\}, \quad h \in (0,1],$$

где константа C *зависит только от* r *и* p.

Введем необходимые обозначения и докажем ряд утверждений, которые нам понадобятся при доказательстве теорем 2 и 3.

Пусть $I = [0,1]$. Через $\mathcal{S}_{r,n}(I)$ обозначим пространство сплайнов максимальной гладкости с разбиением $\left\{\dfrac{i}{2^n}\right\}_{i=0}^{2^n}$. Будем говорить, что $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$, если $S_n(x) = P_{r-1,i}(x)$ при $x \in \left[\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right]$, где $i = 1, \ldots, 2^n$, $P_{r-1,i}$ — полином степени $\le r-1$ и, кроме того, $S_n^{(r-2)} \in C(I)$ при $r \ge 2$. Под сплайном наилучшего приближения будем понимать сплайн $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$ такой, что $\|S_n - f\|_p = \inf\limits_{S \in \mathcal{S}_{r,n}(I)} \|S - f\|_p$.

Лемма 1 [11; 6, с. 136]. *Для любого сплайна* $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$, r, $n \in \mathbb{N}$, *имеют место следующие утверждения*:

i) $\|S_n\|_p \leq C2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|S_n\|_q$, *где* $0 < p \leq q \leq \infty$ *и константа* C *зависит только от* p, q *и* r;

ii) *при* $k = 1, \ldots, r-1$ $\|S_n^{(k)}\|_p \leq C2^{kn}\|S_n\|_p$, *где* $0 < p \leq \infty$ *и константа* C *зависит только от* r.

Теорема В [11; 12, с. 83]**.** *Пусть* $f \in L_p(I)$, $0 < p < 1$, *и* $r, n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует сплайн* $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$ *такой, что*

$$\|f - S_n\|_p \leq C\omega_r(f, 2^{-n})_p,$$

где константа C *зависит только от* r *и* p.

При доказательстве теоремы В используется аналог теоремы Уитни о локальном приближении функций алгебраическими полиномами.

Теорема Г [13]. *Пусть* $f \in L_p(J)$, $0 < p < 1$, $r \in \mathbb{N}$ *и* J — *отрезок. Тогда существует алгебраический полином* P_{r-1} (*степени* $\leq r-1$) *такой, что*

$$\|f - P_{r-1}\|_p(J) \leq C\omega_r(f, |J|)_p(J),$$

где константа C *зависит только от* r *и* p.

Замечание. Из доказательства теоремы В, предложенного Ю. А. Брудным [12] (см. также [14]) следует, что на отрезке $[0, 2^{-n}]$ приближающий сплайн S_n совпадает с соответствующим полиномом из теоремы Г.

Далее нам понадобится определение класса функций ограниченной p-вариации. Говорят, что $f \in V_p$, $0 < p < \infty$, на отрезке $A := [a, b]$, если

$$V_a^b(f)_p := \sup_{\Pi}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где разбиение $\Pi := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. При $p = 1$ — это классическое определение Жордана, а для остальных p эти классы ввел Винер (приведенное определение принадлежит Юнгу). Свойства функций ограниченной p-вариации см. в [15], там же доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $0 < p < 1$. *Для каждого сплайна* $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$, $n, r \in \mathbb{N}$, *при* $0 < h \leq \dfrac{1}{r2^n}$ *выполняется равенство*

$$\frac{\omega_r(S_n, h)_p}{h^{r-1+\frac{1}{p}}} = CV_0^1(S_n^{(r-1)})_p,$$

где C — *константа, зависящая только от* r *и* p.

Из леммы 2 и свойств модулей гладкости (1) и (2) следует такая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $0 < p < 1$. *Для каждого сплайна наилучшего приближения* $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$, n, $r \in \mathbb{N}$, *функции* $f \in L_p(I)$ *выполняется соотношение*

$$\|f - S_n\|_p + 2^{-n(r-1+\frac{1}{p})}V_0^1(S_n^{(r-1)})_p \asymp \omega_r(f, 2^{-n})_p$$

(*двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими от* r *и* p).

***Доказательство теоремы* 2.** Достаточно рассмотреть случай $I = [0, 1]$ и $J = [-1, 1]$.

Положим

$$Tf(x) := \begin{cases} f(x), & x \in I, \\ \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i f(-2^{-i}x), & x \in J \setminus I, \end{cases}$$

где константы $\{\alpha_i\}_{i=0}^{r-1}$ удовлетворяют условию $\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i(-2^{-i})^j = 1$, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, r-1$. После простых вычислений для каждой функции $f \in L_p(I)$ и для каждого сплайна $g \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$ $r, n \in \mathbb{N}$, получим

$$\|Tf\|_p(J) \leq \left(1 + \sum_{i=0}^{r-1} 2^i|\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p(I)$$

и

$$V_{-1}^1((Tg)^{(r-1)})_p \leq \left(\sum_{i=0}^{r-1} 2^{-i(r-1)p}|\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} V_0^1(g^{(r-1)})_p.$$

Выберем n так, чтобы $\dfrac{1}{2^{n+1}} < h \leq \dfrac{1}{2^n}$. Пусь также $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$ — сплайн наилучшего приближения функции f. Применяя лемму 3 и свойства (1) и (2), последовательно находим

$$\omega_r(Tf, h)_p(J) \leq C\Big\{\|Tf - TS_n\|_p(J) + 2^{-n(r-1+\frac{1}{p})} V_{-1}^1((TS_n)^{(r-1)})_p\Big\} \leq$$

$$\leq C\{\|f - S_n\|_p(I) + 2^{-n(r-1+\frac{1}{p})} V_0^1(S_n^{(r-1)})_p\} \leq C\omega_r(f, h)_p.$$

Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Сначала докажем следующие две леммы.

Лемма 4. *Пусть $f \in L_p(I)$, $0 < p < 1$, $r, n \in \mathbb{N}$ и $P(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_{k,n}x^k$ — полином, удовлетворяющий теореме Г на $J_n = [0, 2^{-n}]$. Тогда*

$$|a_{i,n}| \leq C\left(\|f\|_p^p + \int\limits_{2^{-n}}^{1} \frac{\omega_r(f, u)_p^p}{u^{ip+2}} du\right)^{\frac{1}{p}}, \quad i = 0, \ldots, r-1,$$

где константа C зависит только от r и p.

Доказательство. Пусть $i = 0, \ldots, r-1$, $S_k \in \mathcal{S}_{r,k}(I)$, $k = 1, \ldots, n,$ — сплайны наилучшего приближения функции f в L_p. Воспользуемся представлением $S_n =$ $= S_1 + \sum_{j=1}^{n-1}(S_{j+1} - S_j)$. Используя замечание к теореме B и утверждения i) и ii) леммы 1, имеем

$$i!|a_{i,n}| = \|P^{(i)}\|_\infty(J_n) \leq \|S_n^{(i)}\|_\infty(I) \leq$$

$$\leq \left(\|S_1^{(i)}\|_\infty^p + \sum_{j=1}^{n-1} \|(S_{j+1} - S_j)^{(i)}\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C\left(\|S_1\|_p^p+\sum_{j=1}^{n-1}2^{j(1+ip)}\|S_{j+1}-S_j\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq C\left(\|f\|_p^p+\sum_{j=1}^{n-1}2^{j(1+ip)}\omega_r(f,2^{-j})_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $f\in L_p(I)$, $0<p<1$, $r\geq 2$. *Если при некотором* $k\in\in[1,r-1]$ *интеграл* $\int_0^1\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(k-1)p+2}}du<\infty$, *то после исправления функции* f *на множестве меры нуль ее производная* $f^{(k-1)}$ *абсолютно непрерывна на* I.

Доказательство. Пусть $S_j\in\mathcal{S}_{r,j}(I)$, $j\in\mathbb{N}$, — сплайны наилучшего приближения функции f в L_p. Используя лемму 1 и теорему B, получаем

$$\|S_{j+1}^{(k)}-S_j^{(k)}\|_1\leq 2^{j(k-1+\frac{1}{p})}\|S_{j+1}-S_j\|_p\leq C2^{j(k-1+\frac{1}{p})}\omega_r(f,2^{-j})_p,$$

откуда следует, что

$$\sum_{j=n}^{\infty}\|S_{j+1}^{(k)}-S_j^{(k)}\|_1\leq C\left(\sum_{j=n}^{\infty}2^{j(1+(k-1)p)}\omega_r(f,2^{-j})_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\int\limits_0^{2^{-n}}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(k-1)p+2}}du.$$

Далее, из сходимости интеграла в правой части и представления $f=S_n+ +\sum_{j=n}^{\infty}(S_{j+1}-S_j)$ в L_p по аналогии с доказательством теоремы 6.1.3 из [16] находим, что после исправления функции f ее производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна на I.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Будем доказывать теорему для продолжения на $\mathbb{R}_-$ (на $\mathbb{R}_+$ доказательство проводится аналогично).

В качестве продолжения возьмем функцию

$$g(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(x+2^i)_+^{r-1},$$

где $x_+=x$ при $x>0$ и $x_+=0$ при $x\leq 0$, а числа $\{\alpha_i\}$ определены так, чтобы

$$g^{(j-1)}(0)=\begin{cases}f^{(j-1)}(0), & j=1,\ldots,k,\\ 0, & j=k+1,\ldots,r;\end{cases}$$

из этих условий получим систему для нахождения $\{\alpha_i\}$:

$$\sum_{i=1}^{r}2^{i(r-j)}\alpha_i=\begin{cases}\dfrac{(r-j)!}{(r-1)!}f^{(j-1)}(0), & j=1,\ldots,k,\\ 0, & j=k+1,\ldots,r.\end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{j,i} f^{(j-1)}(0), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где $\{\gamma_{i,j}\}$ — некоторые константы, зависящие только от r и k.

Определим оператор продолжения функции f на $\mathbb{R}_-$ по формуле

$$Uf(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I, \\ g(x), & -2^r \le x < 0, \\ 0, & x < -2^r. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы нам также понадобится сплайн $\widetilde{g}_n$ такой, что $\widetilde{g}_n^{(r-2)} \in C(J)$, $J = (-\infty, 1]$, и имеющий вид

$$\widetilde{g}_n(x) = \begin{cases} S_n(x), & x \in I, \\ g(x) + \sum\limits_{i=1}^{r} \widetilde{\alpha}_i (x + 2^{i-n})_+^{r-1}, & -2^r \le x < 0, \\ 0, & x < -2^r, \end{cases}$$

где $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$ — сплайн наилучшего приближения функции f в $L_p(I)$, причем $S_n(x) = P(x)$ при $x \in [0, 2^{-n}]$. Согласно замечанию к теореме В можно считать, что $P(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_{k,n} x^k$ удовлетворяет теореме Г.

Для определения $\{\widetilde{\alpha}_i\}$ получим систему

$$\sum_{i=1}^{r} 2^{i(r-j)} \widetilde{\alpha}_i = \frac{(r-j)!}{(r-1)!} 2^{n(r-j)} \begin{cases} P^{(j-1)}(0) - f^{(j-1)}(0), & j = 1, \ldots, k, \\ P^{(j-1)}(0), & j = k+1, \ldots, r, \end{cases}$$

решив которую, найдем

$$\widetilde{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{j,i} 2^{n(r-j)} (P^{(j-1)}(0) - f^{(j-1)}(0)) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{r} \gamma_{j,i} 2^{n(r-j)} P^{(j-1)}(0), \quad i = 1, \ldots, r,$$

где $\{\gamma_{j,i}\}$ — некоторые константы, зависящие только от r и k.

Выберем n так, чтобы $\dfrac{1}{r2^{n+1}} < h \le \dfrac{1}{r2^n}$. Затем, используя лемму 3, находим

$$\omega_r(Uf, h)_p^p(J) \le C\Big\{ \|Uf - \widetilde{g}_n\|_p^p(J) + 2^{-n(1+p(r-1))} V_{-2^r-1}^{1} \big(\widetilde{g}_n^{(r-1)}\big)_p^p \Big\}. \tag{7}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (7). Используя выражения для $\{\widetilde{\alpha}_i\}$, после простых вычислений получаем

$$\|Uf - \widetilde{g}_n\|_p^p(J) = \int\limits_{-2^{r-n}}^{0} \left| \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\alpha}_i (x + 2^{i-n})_+^{r-1} \right|^p dx + \|f - S_n\|_p^p(I) \le$$

$$\leq C\left\{\sum_{j=1}^{k}2^{-n(1+p(j-1))}\left|f^{(j-1)}(0)-P^{(j-1)}(0)\right|^p+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=k+1}^{r}2^{-n(1+p(j-1))}\left|P^{(j-1)}(0)\right|^p\right\}.$$

Пусть далее $i=0,\ldots,k-1$. Применяя лемму 1 и теорему B, а также стандартные рассуждения доказательства леммы 5, находим

$$\left|f^{(i)}(0)-P_n^{(i)}(0)\right|\leq\|f^{(i)}-S_n^{(i)}\|_\infty(I)\leq\sum_{j=n}^{\infty}\|(S_{j+1}-S_j)^{(i)}\|_\infty\leq$$

$$\leq C\left(\sum_{j=n}^{\infty}2^{j(ip+1)}\omega_r(f,2^{-j})_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\int\limits_0^{2^{-n}}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{ip+2}}du\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оценка для $|P_n^{(i)}(0)|$, $i=k,\ldots,r-1$, содержится в лемме 4. Таким образом,

$$\|Uf-\widetilde{g}_n\|_p^p(J)\leq$$

$$\leq\|f-S_n\|_p^p(I)+C\left\{\sum_{j=1}^{k}2^{-n(1+p(j-1))}\left(\int\limits_0^{2^{-n}}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=k+1}^{r}2^{-n(1+p(j-1))}\left(\|f\|_p^p+\int\limits_{2^{-n}}^{1}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du\right)\right\}.\tag{8}$$

Вычислим теперь p-вариацию в (7). Имеем

$$V_{-2^r-1}^1(\widetilde{g}_n^{(r-1)})_p^p\leq$$

$$\leq(r-1)!\left(\sum_{j=1}^{r}|\alpha_j|^p+|\widetilde{\alpha}_j|^p+\left|a_{r-1,n}-\sum_{j=1}^{r}(\alpha_j+\widetilde{\alpha}_j)\right|^p\right)+$$

$$+V_0^1\left(S_n^{(r-1)}\right)_p^p.$$

Используя выражения для $\{\alpha_i\}$ и $\{\widetilde{\alpha}_i\}$, а также оценки для $\left|f^{(i)}(0)-P_n^{(i)}(0)\right|$ и $\left|P_n^{(i)}(0)\right|$, получаем следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{r}|\widetilde{\alpha}_i|^p\leq$$

$$\leq C\left\{\sum_{j=1}^{k}2^{n(r-j)p}\left|P_n^{(j-1)}(0)-f^{(j-1)}(0)\right|^p+\sum_{j=k+1}^{r}2^{n(r-j)p}|P_n^{(j-1)}(0)|^p\right\}\leq$$

$$\leq C\left\{\sum_{j=1}^{k}2^{n(r-j)p}\int\limits_{0}^{2^{-n}}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du+\sum_{j=k+1}^{r}2^{n(r-j)p}\left(\|f\|_p^p+\int\limits_{2^{-n}}^{1}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du\right)\right\}$$

и

$$\sum_{i=1}^{r}|\alpha_i|^p\leq C\sum_{j=1}^{k}\|f^{(j-1)}\|_\infty.$$

Чтобы оценить последнее неравенство, используем стандартные рассуждения (см., например, доказательство леммы 5), следуя которым, находим

$$\|f^{(j-1)}\|_\infty\leq\|S_1^{(j-1)}\|_\infty+\sum_{l=1}^{\infty}\|(S_{l+1}-S_l)^{(j-1)})\|_\infty\leq$$

$$\leq C\left\{\|f\|_p^p+\int\limits_{0}^{1}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Объединяя полученные выше неравенства и применяя лемму 4 для оценки $|a_{r-1,n}|$, после простых вычислений получаем

$$V_{-2^r-1}^1(\widetilde{g}_n^{(r-1)})_p^p\leq V_0^1(S_n^{(r-1)})_p^p+C\left\{\sum_{j=1}^{k}2^{n(r-j)p}\int\limits_{0}^{2^{-n}}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=k+1}^{r}2^{n(r-j)p}\left(\|f\|_p^p+\int\limits_{2^{-n}}^{1}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du\right)\right\}. \tag{9}$$

Подставляя в (7) неравенства (8) и (9), используя при этом лемму 3, находим

$$\omega_r(Uf,h)_p^p(J)\leq C\left\{\|f-S_n\|_p^p+h^{(r-1)p+1}V_0^1(S_n^{(r-1)})_p^p+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{k}h^{(j-1)p+1}\int\limits_{0}^{h}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du+$$

$$\left.+\sum_{j=k+1}^{r}h^{(j-1)p+1}\left(\|f\|_p^p+\int\limits_{h}^{1}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(j-1)p+2}}du\right)\right\}\leq$$

$$\leq C\left\{h^{(k-1)p+1}\int\limits_{0}^{h}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(k-1)p+2}}du+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=k+1}^{r}h^{(\nu-1)p+1}\left(\|f\|_p^p+\int\limits_{h}^{1}\frac{\omega_r(f,u)_p^p}{u^{(\nu-1)p+2}}du\right)\right\}.$$

Утверждение i) доказано.

Докажем утверждение ii). Определим оператор E следующим образом: $Ef(x) = f(x)$ при $x \in I$ и $Ef(x) = 0$ при $x \notin I$. Тогда

$$\omega_r(Ef, h)_p^p(J) \le \omega_r(f, h)_p^p(I) + \sup_{0<\delta\le h} \int\limits_{-r\delta}^{0} |\Delta_\delta^r Ef(x)|^p dx. \tag{10}$$

Выберем n так, чтобы $\dfrac{1}{2^{n+1}} < rh \le \dfrac{1}{2^n}$. Пусть также $S_n \in \mathcal{S}_{r,n}(I)$ — сплайн наилучшего приближения функции f в L_p. Второе слагаемое в правой части равенства (10) не превышает

$$C\int\limits_0^{rh} |f(x)|^p dx \le C\left\{\|f - S_n\|_p^p(I) + \int\limits_0^{rh} |S_n(x)|^p dx\right\} \le$$

$$\le C\left\{\omega_r(f,h)_p^p + \sum_{\nu=0}^{r-1} |a_{\nu,n}|^p h^{\nu p+1}\right\},$$

где $S_n(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{\nu,n}x^\nu$ при $x \in [0, 2^{-n}]$. Используя лемму 4 и замечание к теореме Г, получаем оценки для $|a_{\nu,n}|$, $\nu = 0,\ldots,r-1$, из которых и следует утверждение ii).

***Следствие* 2.** *Пусть $f \in L_p(I)$, $0 < p < 1$, $r \in \mathbb{N}$ и $\omega_r(f,h)_p \le Mh^\alpha$, $\alpha \in \left(0, r - 1 + \dfrac{1}{p}\right]$. Тогда существует линейный ограниченный оператор продолжения L функции f на $\mathbb{R}$ такой, что*:

i) *если $\alpha \ne \dfrac{1}{p}$, то $\omega_r(Lf,h)_p(\mathbb{R}) \le C(M + \|f\|_p)h^\alpha$, $h \in (0,1]$;*

ii) *если $\alpha = \dfrac{1}{p}$, то $\omega_r(Lf,h)_p(\mathbb{R}) \le C(M + \|f\|_p)h^{\frac{1}{p}}\left(1 + \ln^{\frac{1}{p}}\dfrac{1}{h}\right)$ $h \in (0,1]$,*
где константа C зависит только от r, p и $|I|$.

Доказательство. Если $\alpha \in \left(\dfrac{1}{p} + k - 1, \dfrac{1}{p} + k\right]$ при некотором $k \in [1, r-1]$, то в качестве оператора продолжения L достаточно взять оператор U из утверждения i) теоремы 2. В случае $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{p}\right]$ в качестве L используем оператор E из утверждения ii).

Предложение. *Пусть $f \in L_p(I)$, $0 < p < 1$, $r \in \mathbb{N}$ и $\omega_r(f,h)_p = O(h^{\frac{1}{p}})$, $h \to +0$. Тогда существует ограниченный оператор продолжения V функции f на $\mathbb{R}$ такой, что*

$$\omega_r(Vf,h)_p(\mathbb{R}) = O(h^{\frac{1}{p}}), \quad h \to +0.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть продолжение на $\mathbb{R}_-$. Очевидно, что существует точка $x_0 \in (-1, 0)$ такая, что каждая из точек $\{-2^{-i}x_0\}_{i=0}^{r-1}$ является точкой Лебега для функции $|f|^p$, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_0^h \left|f(-2^{-i}x_0+t)\right|^p dt = \left|f(-2^{-i}x_0)\right|^p, \quad i=0,\ldots,r-1. \tag{11}$$

Определим оператор продолжения на $\mathbb{R}_-$ следующим образом:

$$Vf(x) := \begin{cases} Tf(x), & x\in[x_0,1],\\ 0, & x<x_0,\end{cases}$$

где T — оператор продолжения из теоремы 2.

Покажем, что V — искомый оператор продолжения.

Имеем

$$\omega_r(Vf,h)_p^p(J) \le \omega_r(Tf,h)_p^p(x_0,1) + \sup_{0<\delta<h}\int\limits_{x_0-r\delta}^{x_0}\left|\Delta_\delta^r Vf(x)\right|^p dx. \tag{12}$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\omega_r(Tf,h)_p^p(x_0,1) = O(h). \tag{13}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (12). После простых оценок из (11) получаем

$$\sup_{0<\delta<h}\int\limits_{x_0-r\delta}^{x_0}\left|\Delta_\delta^r Vf(x)\right|^p dx \le C\sum_{i=0}^{r-1}\int\limits_{x_0-rh}^{x_0+rh}\left|(-2^{-i}x)\right|^p dx = O(h). \tag{14}$$

Таким образом, из (12)–(14) следует доказательство предложения.

3. В этом пункте будут рассмотрены мультипликаторы Фурье. Ряд Фурье функции $f\in L(\mathbb{T})$ запишем в виде

$$f\sim\sum_k c_k(f)e^{ikx}.$$

Числовую последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ называют мультипликатором в $L_p(\mathbb{T})$, $1\le$ $\le p\le\infty$, если для каждой функции $f\in L_p(\mathbb{T})$ ряд $\sum\lambda_k c_k(f)e^{ikx}$ является рядом Фурье некоторой функции $\Lambda f\in L_p(\mathbb{T})$ и

$$\|\{\lambda_k\}\|_{M_p} = \sup_{\|f\|_p\le 1}\|\Lambda f\|_p.$$

Известна следующая теорема (см., например, [8], гл. 4, п. II, [9], гл. 16, и [7], гл. 7).

Теорема Д. *Для того чтобы последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была мультипликатором в L (C или L_∞), необходимо и достаточно, чтобы на $\mathbb{T}$ существовала конечная борелевская комплекснозначная мера μ такая, что для каждого $k\in\mathbb{Z}$ $\lambda_k=\int_{\mathbb{T}}e^{-ikx}d\mu$. При этом*

$$\Lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(x-t)d\mu(t)$$

и норма мультипликатора равна (*в каждом из трех случаев*)

$$\|\{\lambda_k\}\|_{M_p} = \operatorname{var}\mu.$$

Отметим также, что достаточные условия для мультипликаторов степенных рядов в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $0 < p \leq 1$ и их применения были получены в работе [17].

У функции из квазинормированного пространства $L_p, 0 < p < 1$, нет ряда Фурье, если она не из L_1. Более того, как известно, в L_p при $0 < p < 1$ вообще нет ненулевых линейных непрерывных функционалов. Ниже будет показано, что в L_p при $0 < p < 1$ нет нетривиальных мультипликаторов (см. следствие из теоремы 4).

Мультипликаторы естественно определить следующим образом. Числовую последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ назовем мультипликатором в $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, если существует константа γ такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого тригонометрического полинома $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$

$$\|\Lambda T_n\|_p \leq \gamma \|T_n\|_p, \qquad \inf \gamma = \big\|\{\lambda_k\}\big\|_{M_p}, \tag{15}$$

где $\Lambda T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k a_k e^{ikx}$.

В силу полноты пространства $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, и аппроксимационной теоремы Вейерштрасса мультипликатор $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ можно продолжить по непрерывности на все пространство $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, без увеличения квазинормы оператора Λ.

Докажем теорему, которая является аналогом теоремы Д в пространстве $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$.

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была мультипликатором в $L_p, 0 < p < 1$, необходимо и достаточно, чтобы на $\mathbb{T}$ существовала комплекснозначная функция $\mu \in V_p$ такая, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ $\lambda_k = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx} d\mu$. При этом*

$$\big\|\{\lambda_k\}\big\|_{M_p} = V_{-\pi}^{\pi}(\mu)_p. \tag{16}$$

Следующая лемма дает полное описание класса функций ограниченной p-вариации при $0 < p < 1$.

Лемма 6 [15]. *Пусть $0 < p < 1$. Функция f принадлежит V_p на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда*

$$f(x) = \sum_{x_k < x} c_k + \sum_{x_k \leq x} d_k,$$

где $\{x_k\}$ — конечное или счетное множество различных точек из $[a, b]$, причем если $x_k = a$, то $d_k = 0$, а если $x_k = b$, то $c_k = 0$ и

$$V_a^b(f)_p = \left(\sum_k |c_k|^p + |d_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ясно, что если функцию $\mu \in V_p$, $0 < p < 1$, исправить на некотором счетном множестве, то значение интеграла $\int_{\mathbb{T}} e^{-ikx} d\mu$ не изменится, поэтому условимся далее считать функцию μ непрерывной справа, т. е. $\mu(x) = \sum_j b_j h(x - x_j)$, где $\{x_j\}$ — конечное или счетное множество различных точек из $\mathbb{T}$, $\sum_j |b_j|^p < \infty$ и h — 2π-периодическая функция такая, что $h(x) = 1$ при $0 < x \le \pi$ и $h(x) = 0$ при $-\pi < x \le 0$. Таким образом, используя лемму 6, из теоремы 4 получаем такое следствие.

***Следствие* 3.** *Для того чтобы последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была мультипликатором в $L_p, 0 < p < 1$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные или счетные наборы чисел $\{b_j\}$ и $\{x_j\}$ такие, что $\sum_j |b_j|^p < \infty$, $x_j \in \mathbb{T}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и для каждого $k \in \mathbb{Z}$ $\lambda_k = \sum_j b_j e^{-ikx_j}$, т. е. $\Lambda f(x) = \sum_j b_j f(x - x_j)$ (линейные комбинации сдвигов).*

Далее будем использовать такие обозначения: под φ везде будем понимать функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge 2$. Положим также

$$K_n(x) := \sum_{k=-2n}^{2n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx}$$

и

$$\Lambda_n(x) := \sum_{k=-2n}^{2n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \lambda_k e^{ikx}.$$

Лемма 7. *Пусть $0 < p < 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Для тригонометрического полинома K_n справедливы следующие утверждения*:

i) *существует константа C, которая не зависит от n, такая, что*

$$\|K_n\|_p \le C n^{1-\frac{1}{p}};$$

ii) $|K_n(x)| \le 4n + 1$ *при всех* $x \in \mathbb{T}$;

iii) *для каждого фиксированного* ϵ, $0 < \epsilon \le \pi$, *и* $l = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{\varepsilon \le |x| \le \pi} |K_n(x)| = O(n^{-l}), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Утверждение i) можно найти в [18] (см. также теорему 4.1.1 в [7]). Утверждение ii) очевидно.

Докажем утверждение iii). Положим

$$\widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-iux} du.$$

Для каждого $s = 0, 1, 2, \ldots$ имеют место соотношения

$$\widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{x}\right)^s \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(s)}(u) e^{-iux} du$$

и

$$\left|\widehat{\varphi}(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}|x|^s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi^{(s)}(u)|du \leq \frac{C}{|x|^s}. \tag{17}$$

Далее, используя формулу суммирования Пуассона (см., например, [19, с. 128]), имеем

$$K_n(x) = \sum_k \varphi\left(\frac{k}{n}\right)e^{ikx} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\sum_k \widehat{\varphi}(n(x+2\pi k)).$$

Выбирая в формуле (17) $s \geq 2$ и учитывая, что $\varepsilon \leq |x| \leq \pi$, находим

$$|K_n(x)| \leq Cn\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^s|x+2\pi k|^s} = O(n^{1-s}).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Для того чтобы* $\sup_n \|\Lambda_n\|_1 < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum_k \lambda_k e^{ikx}$ *являлся рядом Фурье некоторой меры* μ. *При этом если* $-\pi \leq a < b \leq \pi$, *то*

$$V_a^b(\mu)_1 \leq \varliminf_{n\to\infty}\int\limits_a^b|\Lambda_n(x)|dx.$$

Доказательство леммы ничем не отличается от доказательства теоремы 2.2.9 из [7]. Оценку сверху вариации можно найти, например, в [8, с. 225].

Лемма 9. *Для того чтобы последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *была мультипликатором в* L_p, $0 < p < 1$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sup\limits_n n^{\frac{1}{p}-1}\|\Lambda_n\|_p < \infty$.

Доказательство. *Необходимость* непосредственно следует из (15) и утверждения i) леммы 7, так как существует константа γ такая, что $\|\Lambda_n\|_p \leq \gamma\|K_n\|_p \leq \leq Cn^{1-\frac{1}{p}}$.

Достаточность. Пусть $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ — произвольный тригонометрический полином. Тогда

$$\Lambda T_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}T_n(x-u)\Lambda_n(u)du.$$

Используя неравенство Никольского (см., например, [6, с. 102; 16, с. 243]), имеем

$$\left|\Lambda T_n(x)\right|^p \leq Cn^{1-p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T_n(x-u)|^p|\Lambda_n(u)|^p du.$$

Далее

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\Lambda T_n(x)|^p dx \leq Cn^{1-p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\Lambda_n(u)|^p du\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T_n(x-u)|^p dx = Cn^{1-p}\|\Lambda_n\|_p^p\|T_n\|_p^p.$$

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** *Достаточность.* Используя представление

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} K_n(x-t)d\mu(t),$$

свойства интеграла Стильтьеса, утверждение i) леммы 7 и представление функции $\mu \in V_p$, $0 < p < 1$, последовательно находим

$$\|\Lambda_n\|_p^p = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)d\mu(t)\right|^p dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\sum_j b_j K_n(x-x_j)\right|^p dx \le$$

$$\le C\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_j |b_j|^p |K_n(x-x_j)|^p dx \le Cn^{p-1}V_{-\pi}^{\pi}(\mu)_p^p.$$

Из леммы 9 и последнего неравенства следует, что последовательность $\{\lambda_k\}$ является мультипликатором в L_p.

Необходимость. Согласно лемме 9 $\sup_n n^{\frac{1}{p}-1}\|\Lambda_n\|_p < \infty$, поэтому из неравенства Никольского имеем $\sup_n \|\Lambda_n\|_1 < \infty$ и, следовательно, из леммы 8 получаем $\sum_k \lambda_k e^{ikx} \sim d\mu$.

Теперь докажем, что $\mu \in V_p$. Зафиксируем некоторое $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^m$, $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \pi$. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $2\varepsilon < x_{k+1} - x_k$, $k = 0,\ldots,m-1$. Тогда

$$\int\limits_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)d\mu(t)\right| dx \le \int\limits_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon}\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(x-t)d\mu(t)\right| dx +$$

$$+\int\limits_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon}\left|\int\limits_{\mathbb{T}\setminus[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} K_n(x-t)d\mu(t)\right| dx. \tag{18}$$

Из утверждения iii) леммы 7 следует, что второй интеграл имеет порядок $O(n^{-l})$, $l = 1,2,\ldots$. Рассматривая первый интеграл справа и используя утверждение ii) леммы 7, имеем

$$\int\limits_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon}\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(x-t)d\mu(t)\right| dx = \int\limits_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon}\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\ldots\right|^{1-p}\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\ldots\right|^p dx \le$$

$$\le C\int\limits_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon} n^{1-p}\left(V_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}(\mu)_1\right)^{1-p}\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(x-t)d\mu(t)\right|^p dx \le$$

$$\le C\left(V_{x_k}^{x_{k+1}}(\mu)_1\right)^{1-p} n^{1-p}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\left|\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(x-t)d\mu(t)\right|^p dx. \tag{19}$$

Подставляя равенство

$$\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(x-t)d\mu(t) = 2\pi\Lambda_n(x) - \int\limits_{T\setminus[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} K_n(x-t)d\mu(t),$$

в (19) и применяя еще к интегралу в правой части утверждение iii) леммы 7, получаем, что (19) не превышает

$$C\left(V_{x_k}^{x_{k+1}}(\mu)_1\right)^{1-p} n^{1-p} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |\Lambda_n(x)|^p dx + O(n^{1-(l+1)p}). \qquad (20)$$

Из неравенств (18) и (20) находим

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(V_{x_k}^{x_{k+1}}(\mu)_1\right)^p \left(V_{x_k}^{x_{k+1}}(\mu)_1\right)^{-1} \int\limits_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon} |\Lambda_n(x)|dx \le$$

$$\le Cn^{1-p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Lambda_n(x)|^p dx + O(n^{1-(l+1)p}).$$

Выбирая в последнем неравенстве $l > \dfrac{1}{p}$, переходя к верхнему пределу при $n \to \infty$ и учитывая лемму 8, получаем, что существует константа C, зависящая только от p, такая, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(V_{x_k}^{x_{k+1}}(\mu)_1\right)^p \frac{V_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon}(\mu)_1}{V_{x_k}^{x_{k+1}}(\mu)_1} \le C.$$

Далее, запишем функцию μ в виде $\mu = \mu_c + \mu_d$, где μ_c — непрерывная, а μ_d — дискретная часть (со скачками в точках $\{y_k\}$) функции μ. Выбирая m произвольных точек $\{y_k\}_{k=1}^m$, а в качестве точек $\{x_k\}_{k=0}^m$ беря точки непрерывности функции μ, причем таким образом, чтобы $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, m$, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $\mu_d \in V_p$.

Общий случай аналогичными рассуждениями можно получить из следующих неравенств:

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)d\mu_c(t)\right|^p \le \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)d\mu(t)\right|^p + \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)d\mu_d(t)\right|^p,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left|\mu_c(x_{k+1}) - \mu_c(x_k)\right|^p \frac{V_{x_k+\varepsilon}^{x_{k+1}-\varepsilon}(\mu_c)_1}{V_{x_k}^{x_{k+1}}(\mu_c)_1} \le C,$$

где $\{x_k\}_{k=0}^m$ — произвольное разбиение $\mathbb{T}$. Следовательно, функция $\mu \in V_p$.

Докажем теперь равенство (16). Оценка сверху нормы мультипликатора следует из того факта, что если $\mu(x) = \sum_j b_j h(x - x_j)$, то $\Lambda T_n(x) = \sum_j b_j T_n(x - x_j)$.

Для оценки снизу нам понадобится следующая лемма.

Лемма 10 [15]. *Пусть* $0 < p < 1$ *и* $f \in V_p$ *на* $\mathbb{T}$. *Тогда*

$$\sup_{\delta>0} \frac{\|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_p}{\delta^{\frac{1}{p}}} = V_{-\pi}^{\pi}(f)_p.$$

Положим $h_\delta(x) = \big(h(x+\delta) - h(x)\big)\delta^{-\frac{1}{p}}, \delta > 0$, и рассмотрим последовательность полиномов T_n такую, что $T_n \to h_\delta$ в L_p. На основании (15) получим, что $\Lambda T_n \to \Lambda\mu_\delta = \big(\mu(\cdot+\delta) - \mu(\cdot)\big)\delta^{-\frac{1}{p}}$ в L_p и, кроме того, $\|\Lambda\mu_\delta\|_p \le \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}\|h_\delta\|_p$. Взяв верхнюю грань по $\delta > 0$ и использовав лемму 5, найдем $V_{-\pi}^{\pi}(\mu)_p \le \|\{\lambda_k\}\|_p$.

Теорема доказана.

1. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теорема Джексона в $L_p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**. – С. 888 – 901.
2. *Руновский В. К.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**. – С. 145 – 160.
3. *Rathore R. K. S.* The problem of A. F. Timan on the precise oreder of decrease of the best approximations // J. Approxim. Theory. – 1994. – **77**. – P. 153 – 166.
4. *Дзядык В. К.* О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике L_p // Мат. сб. – 1956. – **40**. – С. 239 – 242.
5. *Бесов О. В.* Продолжение функций с сохранением дифференциально-разностных свойств в L_p // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, № 5. – С. 963 – 966.
6. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. – New York: Springer, 1993.
7. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Kluwer, 2004. – 585 p.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 538 с.
9. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2 т. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.
10. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**. – С. 641 – 658.
11. *Освальд П.* Приближение сплайнами в метрике L_p, $0 < p < 1$ // Math. Nachr. – 1980. – **94**. – P. 69 – 96.
12. *Брудный Ю. А., Шалашов В. К.* Теория сплайнов: Учеб. пос. – Ярославль, 1983. – 91 с.
13. *Стороженко Э. А.* Приближение алгебраическими многочленами функций класса L_p, $0 < < p < 1$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**. – С. 652 – 662.
14. *Иродова И. П.* Свойства функций, заданных скоростью убывания кусочно-полиномиальной аппроксимации // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль, 1980. – С. 92 – 117.
15. *Коломойцев Ю. С.* Описание класса функций с условием $\omega_r(f,h)_p \le Mh^{r-1+\frac{1}{p}}$ при $0 < p < < 1$ // Вестн. Днепропетр. нац. ун-та. Математика. – 2003. – Вып. 8. – С. 31 – 44.
16. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
17. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 4. – С. 145 – 160.
18. *Иванов В. И., Юдин В. А.* О тригонометрической системе в L_p, $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1980. – **28**, № 6. – С. 859 – 868.
19. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974.

Получено 19.09.2005