УДК 519.21

А. М. Братійчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДО ЕРГОДИЧНОГО РОЗПОДІЛУ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ В СИСТЕМАХ ТИПУ $M^{\theta}/G/1/N$

For finite capacity queueing systems of the type $M^{\theta}/G/1$, the convenient formulas for the ergodic distribution of a queue length are obtained. An estimate of a rate of convergence of the distribution of queue length in the trasient regime to the ergodic distribution is obtained and computational algorithms for finding the convergence rate are presented.

Для систем обслуживания типа $M^{\theta}/G/1$ с ограниченной очередью найдены удобные формулы для эргодического распределения длины очереди, получена оценка скорости сходимости распределения длины очереди в переходном режиме к эргодическому, а также приведены вычислительные алгоритмы для нахождения скорости сходимости.

1. Вступ. У статті розглядаються системи обслуговування типу $M^{\theta}/G/1$ з обмеженою чергою, які формально можна описати таким чином. Замовлення надходять групами згідно з пуассонівським процесом з параметром λ, розмір n-ї групи θ_n не залежить від моменту надходження і $P\{\theta_n = i\} = a_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Замовлення обслуговуються по черзі, і обслуговане замовлення залишає систему, а обслуговуючий пристрій відразу розпочинає обслуговування з черги, якщо вона є, в противному разі чекає на надходження чергової групи замовлень. Дисципліна обслуговування є FIFO, і черга всередині однієї групи замовлень може бути організована довільним способом, оскільки характеристики, які ми вивчаємо в цій роботі (довжина черги та період зайнятості), не будуть залежати від способу її організації.

Нехай $\xi(t)$ — кількість замовлень у системі в момент часу t; τ_1 — довжина першого періоду зайнятості.

Нескладно довести факт існування $\pi_k \overset{\text{df}}{=} \lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) = k\}$, $0 \le k \le N$, який, фактично, є наслідком скінченності черги. В більшості робіт, присвячених таким системам, головну увагу зосереджено на алгоритмах обчислення ергодичного розподілу π_k, $k = 0, \ldots, N$. Такі алгоритми можна знайти в [1]. На думку автора, головним недоліком цих алгоритмів є та обставина, що коли, наприклад, обчисливши ергодичний розподіл для деякого N, намагаються обчислити його для $N+1$ (а така необхідність виникає, якщо вивчаються проблеми оптимізації і довжина черги є параметром керування), то, по-перше, багато з параметрів алгоритму потрібно переобчислити заново, оскільки вони є функцією N, а по-друге, для обчислення, скажімо, π_1 потрібно знати π_k, $1 < k \le N+1$ (у всякому разі в алгоритмах, які наведено в [1]). Це вимагає великої кількості обчислень навіть для відносно невеликих N. Такі алгоритми будемо називати „незручними". Приклад такого алгоритму з [1] ми наведемо нижче. Існує ще одна проблема, пов'язана з розподілом π_k, $k = 1, \ldots, N$. На практиці нас часто цікавить як швидко минає перехідний режим системи з тим, щоб користуватись ергодичним розподілом π_k, $k = 1, \ldots, N$. Оцінки типу $|\pi_k - P\{\xi(t) = k\}| = O(t^{-\alpha})$ з деяким $\alpha > 0$, які можна отримати досить легко, є малопридатними, оскільки не дають відповіді на поставлене питання. Нам потрібна оцінка типу $|\pi_k - P\{\xi(t) = k\}| \le Ct^{-\alpha}$ з точним значенням сталої C, обчислення якої вимагало б лише інформації про параметри системи. Такі оцінки будемо називати „точними". Нам невідомі такі оцінки. Тому питання, на які ми хочемо дати відповідь у статті, можна сформулювати так.

1. Знайти „зручні" алгоритми для обчислення ергодичного розподілу.

2. Знайти „точні” оцінки для швидкості збіжності до ергодичного розподілу.

Стаття побудована таким чином. У п. 2 наведено деякі допоміжні результати, доведення яких можна знайти в [2, 3]. У п. 3 доведено ергодичну теорему і отримано „зручні” формули для ергодичного розподілу довжини черги, а в наступному пункті встановлено „точні” оцінки для швидкості збіжності в цій теоремі. В останньому пункті наведено алгоритми для обчислення величин, які використовуються при оцінці швидкості збіжності в ергодичній теоремі.

2. Позначення. Допоміжні результати. Для $\operatorname{Re} s > 0$, $|z| \le 1$ позначимо

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad \theta(z) = \sum_{l=1}^\infty z^l a_l, \quad \bar{a}_n = \sum_{i=n}^\infty a_i, \quad m_i = \int_0^\infty x^i dF(x).$$

Символи E_n, P_n позначають відповідно умовне математичне сподівання та умовну ймовірність при умові $\xi(0) = n$, а b_i^{k*}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, — k-кратна згортка послідовності b_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Нехай послідовності $p_i(s)$, $q_i(s)$, $\operatorname{Re} s \ge 0$, задаються співвідношеннями

$$\sum_{i=-1}^\infty z^i p_i(s) = \frac{f(s + \lambda(1 - \theta(z)))}{z f(s)},$$

$$\sum_{i=0}^\infty z^i q_i(s) = \frac{1 - f(s + \lambda(1 - \theta(z)))}{f(s)(s + \lambda(1 - \theta(z)))}.$$

Очевидно, що $p_i(s)$, $s \ge 0$, можна інтерпретувати як розподіл стрибків деякого неперервного знизу випадкового блукання. Нехай $R_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots$, є резольвентою цього блукання, яка задається співвідношенням

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k(s) = z f(s) \left(f(s + \lambda(1 - \theta(z))) - z \right)^{-1} \tag{1}$$

для достатньо малих $|z|$.

Позначимо

$$g_n(s, k, N) \overset{\mathrm{df}}{=} I\{n \le k < N\} q_{k-n}(s) + I\{k = N\} \sum_{i=N-n}^\infty q_i(s),$$

$$Q_n(N, s) = \frac{f(s) + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1-n} R_l(s)}{f(s) + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)},$$

а оператор $Q(\mu, \nu, f)$ для послідовності f_l, $l = 0, 1, \ldots$, означимо так:

$$Q(\mu, \nu, f) = \sum_{l=1}^{N-1} R_l(\mu) f_l - \nu \sum_{l=0}^{N-1} a_i \sum_{l=i+1}^{N-1} R_{l-i}(\mu) f_l.$$

У роботі [3] для сумісного розподілу довжини черги та першого періоду зайнятості отримано зображення

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathrm{P}_n\{\xi(t) = k, \ \tau > t\} dt =$$

$$= Q_n(N, s) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s, k, N) - \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s, k, N) \tag{2}$$

для $1 \le n \le N - 1$ і

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathrm{P}_N \{\xi(t) = k,\ \tau \geq t\} dt =$$

$$= \frac{f^2(s) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k,N)}{f(s) + (1-f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)} + I\{k = N\} \frac{1-f(s)}{s}. \tag{3}$$

Звідси отримуємо такий результат.

***Наслідок* 1.** *Для періоду зайнятості справедливими є зображення*

$$\mathrm{E}_n e^{-s\tau} = \frac{f(s) + (1-f(s)) \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s)}{f(s) + (1-f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)} \tag{4}$$

для $1 \leq n \leq N-1$ *і*

$$\mathrm{E}_N e^{-s\tau} = \frac{f^2(s)}{f(s) + (1-f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}. \tag{5}$$

Для довжини черги в довільний момент часу маємо

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathrm{P}_N \{\xi(t) = k\} dt =$$

$$= \frac{(\lambda+s) Q(s,\theta,g) + \lambda I\{k=N\} \bar{a}_N (1-f(s)) s^{-1} + I\{k=0\}}{(1-f(s)) \left((\lambda+s) Q(s,\theta,\bar{1}) + \lambda f(s) \bar{a}_N\right) + sf(s)} \times$$

$$\times \left(f(s) + (1-f(s)) \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s) \right) - \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s,k,N), \tag{6}$$

де $\theta = \lambda(\lambda+s)^{-1}$, а $\bar{1}$ позначає послідовність, тотожно рівну 1.

3. Ергодичний розподіл довжини черги. Розглянемо питання про ергодичний розподіл довжини черги. Існування цього розподілу випливає з факту обмеженості черги, але ми доведемо це, використовуючи теорію відновлення, оскільки це дозволить отримати деякі зображення, потрібні в подальшому. Отже, нехай система починає працювати в момент надходження першої групи замовлень. Від цього моменту розпочинається відлік часу. Перший період зайнятості такої системи ми позначили τ_1. Тоді з формул (4), (5) отримуємо

$$\mathrm{E} e^{-s\tau_1} = \frac{f(s)) \sum_{n=1}^{N-1} a_n + (1-f(s)) \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s) + f^2(s) \bar{a}_N}{f(s) + (1-f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}. \tag{7}$$

Позначимо через τ_i, $i = 1, 2, \ldots$, моменти звільнення системи від замовлень, а через ξ_i інтервали простою системи після моментів τ_i до надходження чергової групи замовлень. Зрозуміло, що ξ_i — показниково розподілені випадкові величини з параметром λ і моменти $\xi_i + \tau_i$ утворюють процес відновлення. Позначимо через $H(x)$ функцію відновлення, яка відповідає цьому процесу, тобто $H(x) = \sum_{i=0}^\infty \Phi^{*i}(x)$, де $\Phi(x) = \mathrm{P}\{\tau_1 + \xi_1 < x\}$. Маємо

$$\mathrm{P}\{\xi(t) = k\} = \mathrm{P}\{\xi(t) = k,\ \tau_1 \geq t\} + \int_0^t \mathrm{P}(\xi(t-u) = k)\, d\Phi(u), \quad 0 < k \leq N.$$

Звідси

$$P\{\xi(t) = k\} = \int_0^t P\{\xi(t-u) = k,\ \tau_1 \geq t-u\} dH(u), \quad 0 < k \leq N. \tag{8}$$

Аналогічно

$$P\{\xi(t) = 0\} = \int_0^t P\{\tau_1 < t-u,\ \tau_1 + \xi_1 \geq t-u\} dH(u). \tag{9}$$

З (8), (9) та теореми відновлення отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Мають місце співвідношення*

$$\pi_k = \lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) = k\} = \frac{\lambda}{\lambda E\tau_1 + 1} \int_0^\infty P\{\xi(v) = k,\ \tau_1 \geq v\} dv, \quad 0 < k \leq N, \tag{10}$$

$$\pi_0 = \lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) = 0\} = \frac{\lambda}{\lambda E\tau_1 + 1} \int_0^\infty P\{\tau_1 < v,\ \tau_1 + \xi_1 \geq v\} dv. \tag{11}$$

З формул (2), (3) отримуємо

$$\int_0^\infty P\{\xi(v) = k,\ \tau_1 \geq v\} dv = \sum_{l=1}^{N-1} R_l g_l(k, N) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n} g_l(k, N) + \\ + \bar{a}_N m_1 I\{k = N\},$$

де

$$g_n(k, N) = I\{n \leq k < N\} q_{k-n} + I\{k = N\} \sum_{i=N-n}^\infty q_i,$$

а послідовність g_l задається співвідношенням

$$\sum_{i=0}^\infty z^i q_i = \frac{1 - f(\lambda(1-\theta(z)))}{\lambda(1-\theta(z))}. \tag{12}$$

Послідовність $R_l = \lim_{s\to 0} R_l(s)$, $l = 1, 2, \ldots$, для достатньо малих z задається рівністю

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k = z\left(f(\lambda(1-\theta(z))) - z\right)^{-1}. \tag{13}$$

Цю послідовність будемо інтерпретувати (за термінологією монографії [2]) як потенціал деякого решітчастого блукання, неперервного знизу. Це блукання визначається твірною функцією

$$\frac{f(\lambda(1-\theta(z)))}{z} = \sum_{i=-1}^\infty z^i p_i(\lambda), \tag{14}$$

де, як легко зрозуміти,

$$p_i(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} a_{i+1}^{k*} dF(t), \quad i \geq -1.$$

З формули (7) отримуємо

$$E\tau_1 = m\left(\sum_{n=1}^{N-1} R_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l - \bar{a}_N\right),$$

і тому з (10), (11) та рівності

$$\int_0^\infty \mathrm{P}\{\tau_1 < v,\ \tau_1 + \xi_1 > v\} dv = 1/\lambda,$$

яка є наслідком того, що показниковий розклад має властивість відсутності пам'яті, одержуємо такий результат.

Теорема 2. *Для ергодичного розподілу довжини черги в системі* $M^\theta/G/1/N$ *справедливими є наступні зображення*:

$$\pi_k = \frac{\sum_{l=1}^{N-1} R_l g_l(k,N) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n} g_l(k,N) + \bar{a}_N m I\{k=N\}}{1 + \lambda m\left(\sum_{n=1}^{N-1} R_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l - \bar{a}_N\right)} \tag{15}$$

для $0 < k \le N$ *і*

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \lambda m\left(\sum_{n=1}^{N-1} R_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l + \bar{a}_N\right)}. \tag{16}$$

Ці ж самі формули можна отримати з (6), використавши тауберову теорему.

Формули, наведені вище, можна ефективно використати для знаходження ергодичного розподілу. Для того щоб пояснити, що ми розуміємо під ефективністю, наведемо один результат з [1] щодо ергодичного розкладу довжини черги, але в системі типу $M/G/1/N$ (тобто без групових надходжень замовлень), а саме алгоритм для обчислення ергодичного розподілу.

Позначимо

$$a_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dF(x), \qquad \bar{a}_k = \sum_{j=k}^\infty a_j$$

і визначимо $\gamma'_k,\ 0 \le k \le N-1$, за допомогою рекурентних співвідношень

$$\begin{gathered} \gamma'_0 = 1, \\ \gamma'_{k+1} = a_0^{-1}\left(\gamma'_k - \sum_{j=1}^k \gamma'_j a_{k-j+1} - a_k\right), \quad 0 \le k \le N-2. \end{gathered} \tag{17}$$

Нехай

$$\gamma_k = \gamma'_k \sum_{j=0}^{N-1} \gamma'_j, \qquad \rho = \sum_{k=1}^\infty \bar{a}_k, \qquad \rho' = \frac{\rho}{\gamma_0 + \rho}.$$

Тоді

$$\pi_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + \rho}, \qquad \pi_k = \frac{\rho'}{\rho}\left[\gamma_0 \bar{a}_k + \sum_{j=1}^k \gamma_j \bar{a}_{k-j+1}\right], \qquad 1 \le k \le N-1,$$

$$\pi_N = \frac{\rho'}{\rho}\left[\gamma_0 \sum_{k=N}^\infty \bar{a}_k + \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j \sum_{k=N-j+1}^{k} \bar{a}_k\right].$$

З наведених формул випливає, що коли ми змінюємо параметр N (максимальна ємність черги), то кожен раз повинні повторити алгоритм (17), оскільки допоміжні величини γ'_k є функцією N. Крім того, щоб знайти, наприклад, π_1 при $N = 100$, необхідно знайти всі $\gamma'_k,\ 0 \le k \le 99$. Це приводить до великої кількості обчислень. Ми покажемо як з формул (15), (16) можна отримати алгоритм, позбавлений цих недоліків.

Насамперед запишемо алгоритми для обчислення послідовностей R_i, q_i, $i \geq 1$. Зауважимо, що ці алгоритми не залежать від параметра N і, отже, можуть бути обчислені лише на підставі інформації про вхідний потік та розподіл часу обслуговування.

Рекурентне співвідношення

$$R_{k+1} = p_1^{-1}\left(I\{k = 0\} + R_k - \sum_{n=0}^{k} p_n R_{k-n} \right), \qquad R_0 = 0, \qquad k \geq 0,$$

безпосередньо отримуємо з рівностей (13), (14). З рівності (12) маємо

$$q_k = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_k^{i*} - \sum_{j=0}^{k} p_{j-1}(\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} a_{k-j}^{i*} \right), \qquad k \geq 1.$$

4. Оцінки для швидкості збіжності. Для оцінки швидкості збіжності в теоремі 2 потрібний результат з [4]. Щоб його сформулювати, розглянемо рівняння відновлення

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-u)\,dQ(u), \tag{18}$$

де $Q(u)$ — функція розподілу на $[0, \infty)$, а функція $y(t)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$. Якщо $H(t)$ — функція відновлення, що породжена $Q(u)$, то рівняння (18) має єдиний обмежений розв'язок, який можна записати у вигляді

$$x(t) = \int_0^t y(t-u)\,dH(u),$$

і якщо $q = \int_0^\infty t\,dQ(t)$, то

$$\bar{x} \overset{\text{df}}{=} \lim_{t\to\infty} x(t) = q^{-1}\int_0^\infty y(t)\,dt.$$

Припустимо, що розподіл $Q(u)$ має вигляд

$$Q(t) = \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda(t+u)}\right) dL(u), \tag{19}$$

де $L(u)$ — деякий розподіл на $[0, \infty)$, $\lambda > 0$. Співвідношення (19) є еквівалентним тому, що $O(t)$ має незалежну показникову компоненту з параметром λ. Позначимо

$$R(t) = \lambda(1 - Q(t)) - q(t), \qquad \mu = \int_0^\infty t^2\,dQ(t),$$

де $q(t)$ — щільність розподілу $Q(t)$. З (19) випливає, що $R(t) \geq 0$, $t \geq 0$.

Теорема 3 [4]. *Нехай*:

1) $\int_0^\infty t^{\alpha+1}\,dQ(t) < \infty$ *для деякого* $\alpha > 1$;

2) $\sup_{t\geq 0}(1+t)^{\alpha+1}|y(t)| < \infty$.

Тоді для всіх $t \geq (\alpha\varepsilon_0)^{-1}$ *маємо*

$$|x(t) - \bar{x}| < \frac{C(\varepsilon_0)}{(1+\varepsilon_0 t)^\alpha},$$

де

$$C(\varepsilon_0) = \frac{2(1+\alpha)e^{\lambda\mu}(\varepsilon_0\alpha+\lambda)}{\lambda\mu\alpha\varepsilon_0} \sup_{t\ge 0}(1+\varepsilon_0 t)^{\alpha+1}|y(t)-\bar{x}(1-Q(t))|,$$

а ε_0 — *єдиний корінь рівняння*

$$\int_0^\infty (1+\varepsilon t)^\alpha R(t)\exp\left(-\int_0^t R(u)du\right)dt = 1.$$

Використаємо цю теорему для того, щоб оцінити швидкість збіжності в теоремі 1.

Позначимо

$$D(t) = \lambda(1-\Phi(t)) - b(t), \qquad W(t) = D(t)\exp\left(-\int_0^t D(s)ds\right),$$

де $b(t)$ — щільність розподілу $\Phi(t)$, і нехай $\eta_1 = \tau_1 + \xi_1$, де, нагадаємо, τ_1 — перший період зайнятості, а ξ_1 — перший період простою системи. Неважко переконатись, що для довільного натурального n виконується рівність

$$\mathrm{E}\eta_1^n = \sum_{i=0}^n \frac{(i+1)(i+2)\ldots n}{(n-i)\lambda^{n-i}}\mathrm{E}\tau_1^i.$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\int_0^\infty t^{p+1}dF(t) < \infty$ *для деякого натурального* $p > 1$.

Тоді для всіх $t \ge (2\varepsilon_0)^{-1}$ *і* $0 \le k \le N$ *виконується нерівність*

$$|\mathrm{P}\{\xi(t) = k\} - \pi_k| \le \frac{2^{p+2}(1+p)(p\varepsilon_0+\lambda)e^{\lambda\mathrm{E}\eta_1^2}\max(1, \varepsilon_0^p\mathrm{E}\eta^p)}{\lambda\mathrm{E}\eta_1^2 p\varepsilon_0}\frac{1}{(1+\varepsilon_0 t)^p}, \qquad (20)$$

де ε_0 — *єдиний корінь рівняння*

$$\sum_{i=1}^p \varepsilon^i C_p^i \int_0^\infty t^i W(t)dt - e^{-\lambda\mathrm{E}\tau_1} = 0. \qquad (21)$$

Доведення. У даному випадку замість $Q(t)$, $y(t)$ ми маємо відповідно $\Phi(t)$ та $\mathrm{P}\{\xi(t) = k,\ \tau_1 \ge t\}$ або $\mathrm{P}\{\tau_1 < t,\ \eta_1 \ge t\}$. Той факт, що розподіл $\Phi(t)$ має незалежну показникову компоненту з параметром λ, є очевидним, оскільки моменти надходження замовлень утворюють пуассонівський процес. У цьому випадку величина τ_1 має всі моменти $\le p+1$. Цей факт безпосередньо випливає із зображення (10) і є наслідком того, що черга в системі обмежена. Випадкова величина ξ_1 (показниково розподілена) має всі моменти. Тому, використовуючи нерівність Чебишова, неважко показати, що виконуються умови теореми 3. Маємо

$$\sup_{t\ge 0}(1+t\varepsilon)^p\,|\mathrm{P}\{\tau_1 < t,\ \eta_1 \ge t\} - \pi_k\mathrm{P}\{\eta_1 \ge t\}| \le 2\sup_{t\ge 0}(1+t\varepsilon)^p\,\mathrm{P}\{\eta_1 \ge t\} \le$$

$$\le 2\max\left(\sup_{0\le t\varepsilon\le 1}(1+t\varepsilon)^p,\ \sup_{t\varepsilon\ge 1}(1+t\varepsilon)^p\,\mathrm{P}\{\eta_1 \ge t\}\right) \le$$

$$\le 2\max\left(2^p,\ \varepsilon^p\mathrm{E}\eta_1^p\sup_{t\varepsilon\ge 1}(1+(t\varepsilon)^{-1})^p\right) \le 2^{p+1}\max\left(1,\ \varepsilon^p\mathrm{E}\eta_1^p\right).$$

Ця рівність, теорема 3 та формула (8) дають оцінку (20) для $0 < k \le N$. Для $k = 0$ доведення є аналогічним, лише замість (8) потрібно використати (9).

Для того щоб знайти ε_0 з (21), фактично, потрібно знайти функцію $\Phi(x)$, використавши (7). Ця задача є досить складною, і тому бажано знайти більш зручний алгоритм для обчислення правої частини нерівності (20). Припустимо, що ми знайшли проміжок $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ такий, що $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_2 < \infty$, і для $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ вдалося знайти зручніші обчислювальні алгоритми. Тоді, замінивши в знаменнику (20) ε_0 на ε_1, а в чисельнику ε_0 на ε_2, ми досягнемо поставленої мети. Для реалізації цієї ідеї зауважимо, що оскільки коефіцієнти при ε^i в (21) є додатними, то додатний корінь рівняння (21) знаходиться між додатними коренями двох рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p} \varepsilon^i C_p^i \int_0^\infty t^i D(t)\,dt = e^{-\lambda \mathrm{E}\tau_1}, \qquad \sum_{i=1}^{p} \varepsilon^i C_p^i \int_0^\infty t^i D(t)\,dt = 1. \tag{22}$$

Неважко переконатись, що

$$\int_0^\infty t^i D(t)\,dt = \frac{\lambda \mathrm{E}\tau_1^{i+1}}{i+1}.$$

Тому рівняння (22) можемо переписати таким чином:

$$\sum_{i=1}^{p} \varepsilon^i C_{p+1}^{i+1} \mathrm{E}\tau_1^{i+1} = \lambda^{-1}(p+1)e^{-\lambda \mathrm{E}\tau_1}, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \varepsilon^i C_{p+1}^{i+1} \mathrm{E}\tau_1^{i+1} = \lambda^{-1}(p+1). \tag{24}$$

Отже, ми маємо наступний результат.

Теорема 5. *Нехай* $\int_0^\infty t^{p+1} dF(t) < \infty$ *для деякого натурального* $p > 1$. *Тоді для всіх* $t \geq (2\varepsilon_1)^{-1}$ *і* $0 \leq k \leq N$ *виконується нерівність*

$$|\mathrm{P}\{\xi(t) = k\} - \pi_k| \leq \frac{2^{p+2}(1+p)(p\varepsilon_2 + \lambda)e^{\lambda \mathrm{E}\eta_1^2} \max(1, \varepsilon_2^p \mathrm{E}\eta^p)}{\lambda \mathrm{E}\eta_1^2 p \varepsilon_1} \frac{1}{(1+\varepsilon_1 t)^p},$$

де ε_1 *та* ε_2 *є єдиними додатними коренями відповідно рівнянь* (23) *та* (24).

Для випадку $p = 2$ маємо такий результат.

Наслідок 2. *Нехай* $\int_0^\infty t^3 dF(t) < \infty$. *Тоді для всіх* $t \geq (2\varepsilon_1)^{-1}$ *і* $0 \leq k \leq N$ *має місце нерівність*

$$|\mathrm{P}\{\xi(t) = k\} - \pi_k| \leq \frac{48 e^{\lambda \mathrm{E}\eta_1^2}(2\varepsilon_2 + \lambda)\max(1, \varepsilon_2^3 \mathrm{E}\eta^3)}{\lambda \mathrm{E}\eta_1^2 \varepsilon_1} \frac{1}{(1+\varepsilon_1 t)^2},$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{9(\mathrm{E}\tau_1^2)^2 + 12\lambda^{-1}\mathrm{E}\tau_1^3 \exp(-\lambda \mathrm{E}\tau_1)} - 3\mathrm{E}\tau_1^2}{2\mathrm{E}\tau_1^3},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{9(\mathrm{E}\tau_1^2)^2 + 12\lambda^{-1}\mathrm{E}\tau_1^3} - 3\mathrm{E}\tau_1^2}{2\mathrm{E}\tau_1^3},$$

$$\mathrm{E}\eta_1^3 = \mathrm{E}\tau_1^3 + 3\lambda^{-1}\mathrm{E}\tau_1^2 + 3\lambda^{-2}\mathrm{E}\tau_1 + 2\lambda^{-3},$$

$$\mathrm{E}\eta_1^2 = \mathrm{E}\tau_1^2 + 2\lambda^{-1}\mathrm{E}\tau_1 + \lambda^{-2}.$$

У наступному пункті ми наведемо алгоритм для обчислення моментів першого періоду зайнятості.

5. Моменти для періоду зайнятості. Для того щоб отримати зображення для $\mathrm{E}\tau_1^n$, потрібно здиференціювати (7) по s відповідну кількість разів, а потім перейти до границі при $s \to 0$. Але такий підхід призведе до дуже громіздких формул, і тому ми скористаємось іншим методом. Для цього перепишемо (7) у вигляді

$$\left(f(s) + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) \right) \mathrm{E} e^{-s\tau_1} =$$

$$= f(s) \sum_{n=1}^{N-1} a_n + f^2(s)\bar{a}_N + (1 - f(s)) \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s).$$

Здиференціювавши цю формулу k разів по s, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \mathrm{E} \tau_1^i e^{-s\tau_1} \left(f^{(k-i)}(s) - \sum_{j=1}^{k-i} C_{k-j}^j f^{(j)}(s) \sum_{l=1}^{N-1} R_l^{(k-i-j)}(s) + \right.$$

$$\left. + (1 - f(s)) \sum_{l=1}^{N-1} R_l^{(k-i)}(s) \right) =$$

$$= f^{(k)}(s) \sum_{n=1}^{N-1} a_n - \sum_{i=1}^{k} C_k^i f^{(i)}(s) \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l^{(k-i)}(s) +$$

$$+ (1 - f(s)) \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N+n-1} R_l^{(k)}(s) + \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(s) f^{(k-i)}(s) \bar{a}_N.$$

Оскільки $f^{(i)}(0) = (-1)^i m_i = (-1)^i \int_0^\infty x^i \, dF(x)$, то, підставивши в цю формулу $s = 0$, будемо мати

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \mathrm{E} \tau_1^i \left((-1)^{k-i} m_{k-i} - \sum_{j=1}^{k-i} C_{k-j}^j (-1)^j m_j \sum_{l=1}^{N-1} R_l^{(k-i-j)}(0) \right) =$$

$$= (-1)^k m_k \sum_{n=1}^{N-1} a_n - \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-1)^i m_i \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l^{(k-i)}(0) +$$

$$+ (-1)^k \bar{a}_N \sum_{i=0}^{k} C_k^i m_i m_{k-i}.$$

Звідси одержуємо формулу для рекурентного обчислення моментів періоду зайнятості

$$\mathrm{E} \tau_1^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \mathrm{E} \tau_1^i \left(\sum_{j=1}^{k-i} (-1)^{j+k} C_{k-j}^j m_j \sum_{l=1}^{N-1} R_l^{(k-i-j)}(0) - m_{k-i} \right) +$$

$$+ m_k \sum_{n=1}^{N-1} a_n - \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-1)^{i+k} m_i \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l^{(k-i)}(0) +$$

$$+ \bar{a}_N \sum_{i=0}^{k} C_k^i m_i m_{k-i}.$$

Нам ще потрібно знайти зручні формули для обчислення $R_k^{(i)}(0)$. Для цього перепишемо співвідношення (1) у вигляді

$$(f(s+\lambda(1-\theta(z)))-z)\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s) \;=\; z f(s).$$

Здиференціювавши цю рівність по s i разів, отримаємо

$$\sum_{j=1}^{i} C_i^j f^{(j)}(s+\lambda(1-\theta(z)))\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k^{(i-j)}(s) \;+$$

$$+\;(f(s+\lambda(1-\theta(z)))-z)\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k^{(i)}(s) \;=\; z f^{(i)}(s),$$

звідки, поклавши $s = 0$, будемо мати

$$\sum_{j=1}^{i} C_i^j f^{(j)}(\lambda(1-\theta(z)))\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k^{(i-j)}(0) \;+$$

$$+\;(f(\lambda(1-\theta(z)))-z)\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k^{(i)}(0) \;=\; z(-1)^i m_i, \tag{25}$$

де

$$f^{(j)}(\lambda(1-\theta(z))) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_{k-1}(j,\lambda),$$

$$p_i(j,\lambda) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}(-1)^j e^{-\lambda t} t^j \frac{(\lambda t)^k}{k!} a_{i+1}^{k*}\, dF(t), \qquad i \ge -1. \tag{26}$$

Перепишемо тепер (25) у вигляді

$$\sum_{j=1}^{i} C_i^j \frac{f^{(j)}(\lambda(1-\theta(z)))}{f(\lambda(1-\theta(z)))-z}\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k^{(i-j)}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k^{(i)}(0) \;=\; \frac{(-1)^i z m_i}{f(\lambda(1-\theta(z)))-z}. \tag{27}$$

Тоді

$$\frac{z f^{(j)}(\lambda(1-\theta(z)))}{f(\lambda(1-\theta(z)))-z} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_{k-1}^{(j)} \sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{i=0}^{k-1} R_{k-i}(0)\, p_{i-1}(j,\lambda).$$

Тепер з (27) одержуємо

$$R_k^{(i)}(0) \;=\; (-1)^i m_i R_k \;-\; \sum_{j=1}^{i} C_i^j \sum_{l=0}^{k} R_{k-l+1}^{(i-j)}(0) \sum_{p=0}^{l-1} R_{l-p}\, p_{l-1}(j,\lambda), \tag{28}$$

де $p_l(j,\lambda)$ знаходимо з (26). Рівність (28) дає нам шукане рекурентне співвідношення для $R_k^{(i)}(0)$.

1. *Takagi H.* Queueing analysis. – North-Holland, 1993. – Vol. 2. – 546 p.
2. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
3. *Братійчук М. С.* Точні формули для системи обслуговування типу $E^{\theta}/G/1$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 1034 – 1044.
4. *Карташов Н. Р.* Степенные оценки скорости сходимости в теореме восстановления // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – **25**. – С. 600 – 607.

Одержано 18.11.2005