УДК 517.5

Ю. І. Харкевич, І. В. Кальчук (Волин. ун-т, Луцьк)

АСИМПТОТИКА ВЕЛИЧИН НАБЛИЖЕННЯ В СЕРЕДНЬОМУ КЛАСІВ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ БІГАРМОНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА

Complete asymptotic decompositions are obtained for values of exact upper bounds of approximations of functions from the classes W_1^r, $r \in N$, and $\overline{W}_1^r$, $r \in N \setminus \{1\}$, by their biharmonic Poisson integrals.

Получены полные асимптотические разложения для величин точных верхних граней приближений функций из классов W_1^r, $r \in N$, и $\overline{W}_1^r$, $r \in N \setminus \{1\}$, их бигармоническими интегралами Пуассона.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій із нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, де норму задано таким чином: $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$

Через W_p^r (де $p = 1$ або $p = \infty$) позначимо множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно, і $\left\| f^{(r)}(t) \right\|_p \le 1$, якщо $p = 1, \infty$. $\overline{W}_p^r$ — клас функцій, спряжених до функцій із класу W_p^r, тобто

$$\overline{W}_p^r = \left\{ \bar{f} \colon \bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, \ f \in W_p^r \right\}, \tag{1}$$

де інтеграл розуміємо в сенсі його головного значення, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$$

(див., наприклад, [1, с. 22]).

Нехай $f \in L$. Величина

$$B_\delta(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) K_\delta(t) dt, \qquad \delta > 0, \quad -\pi \le x < \pi, \tag{2}$$

називається бігармонійним інтегралом Пуассона функції f, де

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-2/\delta} \right) \right] e^{-k/\delta} \cos kt \tag{3}$$

— бігармонійне ядро Пуассона (див. [2]).

Далі під позначенням B_δ будемо розуміти періодичне продовження функції $B_\delta(f, x)$, $x \in [-\pi; \pi)$, на всю числову вісь.

Позначимо

$$\mathscr{E}(\mathfrak{N}, B_\delta)_1 = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(x) - B_\delta(f, x) \|_1, \tag{4}$$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{N}, B_\delta)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(x) - B_\delta(f, x) \|_C, \tag{5}$$

де $\mathfrak{N} \equiv W_p^r$, або $\mathfrak{N} \equiv \overline{W}_p^r$, $p = 1, \infty$.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $g(\delta) = g(\mathfrak{N}; \delta)$ таку, що при $\delta \to \to \infty$ має місце точна асимптотична рівність

$$\mathscr{E}(\mathfrak{N}, B_\delta)_X = g(\delta) + o(g(\delta)), \tag{6}$$

то, наслідуючи О. І. Степанця [3, с. 198], будемо говорити, що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для даного класу $\mathfrak{N}$ і оператора $B_\delta(f, x)$ у метриці простору X.

Формальний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\delta)$ будемо називати *повним асимптотичним розкладом* або *повною асимптотикою* функції $f(\delta)$ при $\delta \to \infty$, якщо при всіх $n \in N$

$$\left| g_{n+1}(\delta) \right| = o(|g_n(\delta)|) \tag{7}$$

і при будь-якому натуральному N

$$f(\delta) = \sum_{n=0}^{N} g_n(\delta) + o(g_N(\delta)), \quad \delta \to \infty. \tag{8}$$

Коротко будемо записувати цей факт так: $f(\delta) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\delta)$.

Метою даної роботи є отримання повних асимптотичних розкладів величин (4) при $\mathfrak{N} = W_1^r$, $r \in N$, та $\mathfrak{N} = \overline{W}_1^r$, $r \in N \setminus \{1\}$, за степенями $\dfrac{1}{\delta}$ при $\delta \to \infty$.

Теорема 1. *Має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathscr{E}(W_1^1; B_\delta)_1 \cong \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\delta} + \sum_{k=2}^{\infty} \nu_k^1 \frac{1}{\delta^k} \right), \quad \delta \to \infty, \tag{9}$$

де

$$\nu_k^1 = (-1)^{k-1} \frac{1-k}{k!} \sigma_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

$$\sigma_j = \begin{cases} 0, & j = 2l-1, \\ \dfrac{1}{2^{j-1} j!} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (2i-1)^j a_i^{j+1} - \dfrac{2^j (j-1)!}{(2j)!} \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i C_j^i (j-i)^{2j}, & j = 2l, \end{cases} \quad l \in N, \tag{11}$$

$$a_i^j = \begin{cases} 1, & i = 1, \quad i = j-1, \\ a_i^{j-1}(2i-1) + a_{j-i}^{j-1}(2(j-i)-1), & 1 < i < j-1, \end{cases} \quad j \in N. \tag{12}$$

Доведення. В роботі [4] було знайдено повний асимптотичний розклад

$$\mathscr{E}(W_\infty^1; B_\delta)_C \cong \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\delta} + \sum_{k=2}^{\infty} \nu_k^1 \frac{1}{\delta^k} \right), \quad \delta \to \infty,$$

у якому ν_k^1 визначається за формулою (10), причому використовувалась рівність з роботи Л. П. Фалалєєва [5, с. 164]

$$\mathscr{E}(W_\infty^1; B_\delta)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^2}. \tag{13}$$

Отже, зрозуміло, що для встановлення співвідношення (9) достатньо показати, що $\mathscr{E}(W_1^1; B_\delta)_1$ збігається з правою частиною (13), або, те саме, що $\mathscr{E}(W_1^1; B_\delta)_1 = \mathscr{E}(W_\infty^1; B_\delta)_C$.

Враховуючи інтегральне зображення (2) і те, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(t)\,dt = 1,$$

маємо

$$f(x) - B_\delta(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(t+x))K_\delta(t)\,dt. \tag{14}$$

Оскільки функція $(f(x) - f(t+x))K_\delta(t)$ є вимірною на множині $[-\pi; \pi] \times \times [-\pi; \pi]$ та $\int_{-\pi}^{\pi}dx\int_{-\pi}^{\pi}\left|(f(x) - f(t+x))K_\delta(t)\right|dt < +\infty$, використовуючи наслідок до теореми Фубіні (див., наприклад, [6, с. 331]) після підстановки правої частини рівності (14) в (4), а також враховуючи, що для $f \in W_1^1$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|\,dx \le |t|$$

і $K_\delta(t) \ge 0$ при $\delta > 0$, $-\pi \le x < \pi$, отримуємо

$$\mathscr{E}(W_1^1; B_\delta)_1 \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,K_\delta(t)\,dt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^2}. \tag{15}$$

З іншого боку, згідно з лемою з роботи [7, с. 63]

$$\mathscr{E}(W_1^1; B_\delta)_1 \ge \sup_{f \in T^1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - B_\delta(f, x)|\,dx \ge$$

$$\ge \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^2}, \tag{16}$$

де T^n — клас усіх тригонометричних поліномів g, для яких має місце співвідношення $\int_{-\pi}^{\pi}\left|g^{(n)}(x)\right|dx \le 1$.

Із нерівностей (15) та (16) із урахуванням (13) отримуємо

$$\mathscr{E}(W_1^1; B_\delta)_1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^2} = \mathscr{E}(W_\infty^1; B_\delta)_C. \tag{17}$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $r = 2l + 1$, $l \in N$, *то при* $\delta \to \infty$ *має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathscr{E}(W_1^r; B_\delta)_1 \cong \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-r}{r!}\frac{1}{\delta^r}\ln\delta + \sum_{k=2}^{\infty}\nu_k^r\frac{1}{\delta^k}\right), \tag{18}$$

у якому

$$\nu_k^r = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k-1}(1-k)}{k!}\varphi_{r-k}(0), & k<r, \\ \dfrac{1}{r!}\left((1-r)\left(\ln 2 + \sum\limits_{i=1}^{r}\dfrac{1}{i}\right)+1\right), & k=r, \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(1-k)}{k!}\sigma_{k-r}, & k>r, \quad k=2,3,\ldots, \end{cases} \tag{19}$$

σ_j *визначається формулою* (11), *а*

$$\varphi_n(0) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}K_n, & n=2l-1, \\ \dfrac{\pi}{2}\tilde{K}_n, & n=2l, \end{cases} \quad l\in N, \tag{20}$$

де K_n *і* $\tilde{K}_n$ *— відомі константи Ж. Фавара – Н. І. Ахієзера – М. Г. Крейна*:

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$\tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n\in N.$$

Доведення. В роботі [4] (теорема 2) було знайдено повний асимптотичний розклад

$$\mathscr{E}(W_\infty^r; B_\delta)_C \cong \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-r}{r!}\frac{1}{\delta^r}\ln\delta + \sum_{k=2}^{\infty}\nu_k^r\frac{1}{\delta^k}\right), \quad \delta\to\infty,$$

де коефіцієнти ν_k^r обчислюються за формулою (19).

Отже, для доведення теореми досить показати справедливість рівності

$$\mathscr{E}(W_1^r; B_\delta)_1 = \mathscr{E}(W_\infty^r; B_\delta)_C, \quad r=2l+1, \quad l\in N, \tag{21}$$

зауваживши, що згідно з рівністю (47) роботи [4]

$$\mathscr{E}(W_\infty^r; B_\delta)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{22}$$

Із (14) в результаті r-кратного інтегрування частинами отримуємо

$$f(x) - B_\delta(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x+t)Q_r(t;\delta)\,dt,$$

де

$$Q_r(t;\delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\left(1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-k/\delta}}{k^r} \cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right). \tag{23}$$

Тому

$$\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1 = \sup_{f \in W_1^r} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t+x) Q_r(t;\delta)\, dt \right| dx. \tag{24}$$

Для подальшої оцінки величини $\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1$ покажемо спочатку, що

$$\operatorname{sign} Q_r(t;\delta) = \pm \operatorname{sign} \sin t, \quad r = 2l+1. \tag{25}$$

Очевидно, що при $r = 2l+1$, $l \in N$,

$$Q_r(0;\delta) = Q_r(\pi;\delta) = 0.$$

Тому, припустивши, що $Q_r(t;\delta)$ дорівнює нулю ще в деякій точці $t_0 \in (0, \pi)$, матимемо, що згідно з теоремою Ролля існують точки $t_1^{(1)} \in (0, t_0)$, $t_1^{(2)} \in (t_0, \pi)$ такі, що

$$Q_r'(t_1^{(1)};\delta) = Q_r'(t_1^{(2)};\delta) = 0,$$

звідки

$$Q_{r-1}(t_1^{(1)};\delta) = Q_{r-1}(t_1^{(2)};\delta) = 0,$$

і, як наслідок, існує точка $t_2 \in \left(t_1^{(1)}, t_1^{(2)}\right)$ така, що

$$Q_{r-2}(t_2;\delta) = 0,$$

і т. д. Повторивши вказану процедуру $r-2$ рази, прийдемо до висновку, що існують точки $t_{r-2}^{(1)} \in (0, t_{r-1})$, $t_{r-2}^{(2)} \in (t_{r-1}, \pi)$ такі, що

$$Q_2\left(t_{r-2}^{(1)};\delta\right) = Q_2\left(t_{r-2}^{(2)};\delta\right) = 0.$$

Остання рівність є суперечливою, тому що функція $Q_2(t;\delta)$ дорівнює нулю на проміжку $(0;\pi)$ лише в одній точці. Дійсно,

$$Q_2'(t;\delta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k/\delta} \sin kt}{k} + \frac{1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \sin kt.$$

Враховуючи співвідношення (1.441.1), (1.447.1) та (1.448.1) з [8], отримуємо

$$Q_2'(t;\delta) = \frac{t-\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{e^{-1/\delta} \sin t}{1-e^{-1/\delta} \cos t} + \frac{\left(1-e^{-2/\delta}\right)e^{-1/\delta} \sin t}{2\left(1-2e^{-1/\delta} \cos t + e^{-2/\delta}\right)}.$$

Далі знаходимо

$$Q_2''(t;\delta) = \frac{\left(e^{-2/\delta}-1\right)^2 \left(1-e^{-1/\delta} \cos t\right)}{2\left(1-2e^{-1/\delta} \cos t + e^{-2/\delta}\right)^2}$$

і переконуємося, що $Q_2''(t;\delta) > 0$, $t \in (0;\pi)$. Отже, $Q_2'(t;\delta)$ зростає на $(0;\pi)$, причому, оскільки $Q_2'(0;\delta) = -\frac{\pi}{2}$, $Q_2'(\pi;\delta) = 0$, то $Q_2'(t;\delta) < 0$ на $(0;\pi)$. Таким чином, $Q_2(t;\delta)$ спадає на $(0;\pi)$ і, враховуючи, що $Q_2(0;\delta) > 0$ і $Q_2(\pi;\delta) < 0$, приходимо до висновку, що функція $Q_2(t;\delta)$ дорівнює нулю лише в одній точці відрізка $(0;\pi)$.

Рівність (25) доведено. Отже, виходячи з (24) при $r = 2l+1$, $l \in N$, одержуємо

$$\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Q_r(t;\delta)\right|dt = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\left[1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-k/\delta}}{k^r}\sin kt\,dt\right| =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{26}$$

З іншого боку, використовуючи лему з роботи [7, с. 63], при непарному r маємо

$$\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1 \ge \sup_{f\in T^r}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-B_\delta(f,x)\right|dx \ge$$

$$\ge \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{27}$$

Порівнюючи співвідношення (26) та (27), приходимо до висновку, що

$$\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}},$$

і, враховуючи (22), одержуємо (21) і, як наслідок, (18).

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Якщо* $r = 2l$, $l \in N$, *то при* $\delta \to \infty$ *має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1 \cong \frac{4}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\eta_k^r\frac{1}{\delta^k}, \tag{28}$$

у якому

$$\eta_k^r = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k-1}(1-k)}{k!}\psi_{r-k}(0), & k<r,\\ \dfrac{r-1}{r!}\dfrac{\pi}{4}, & k=r,\\ \dfrac{(1-k)}{k!}\tau_{k-r}, & k>r, \quad k=2,3,\ldots, \end{cases} \tag{29}$$

$$\tau_j = \begin{cases} 0, & j=2l,\\ \dfrac{1}{2^j}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i-1}a_i^{j+1}, & j=2l-1, \end{cases} \quad l\in N, \tag{30}$$

коефіцієнти a_i^j *означено формулою* (12),

$$\psi_n(0) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\tilde{K}_n, & n=2l-1,\\ \dfrac{\pi}{4}K_n, & n=2l, \end{cases} \quad l\in N. \tag{31}$$

Доведення. Згідно з теоремою 3 роботи [4] має місце повний асимптотичний розклад

$$\mathcal{E}(W^r_\infty; B_\delta)_C \;\cong\; \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\eta^r_k\frac{1}{\delta^k}, \quad \delta\to\infty,$$

де коефіцієнти η^r_k обчислюються за формулою (29), а також згідно з формулою (50) тієї ж роботи має місце рівність

$$\mathcal{E}(W^r_\infty; B_\delta)_C \;=\; \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1-\left(1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{32}$$

Тому для доведення теореми достатньо показати, що виконується рівність

$$\mathcal{E}(W^r_1; B_\delta)_1 \;=\; \mathcal{E}(W^r_\infty; B_\delta)_C, \quad r=2l, \quad l\in N,$$

або, що те саме, довести, що величина $\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1$ збігається з правою частиною (32).

Як показано в доведенні теореми 1, має місце рівність (24). Покажемо, що

$$\operatorname{sign}\left(Q_r(t;\delta)-Q_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right) \;=\; \pm\operatorname{sign}\cos t, \quad r=2l, \quad l\in N. \tag{33}$$

Рівність (33) у випадку $r = 2$ виконується як наслідок того, що функція $Q_2(t;\delta)$ має лише один нуль на $(0;\pi)$.

Покажемо справедливість рівності (33) у випадку $r = 2l + 2$, $l \in N$. За припущення, що

$$Q_r(t_0;\delta) - Q_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \;=\; 0, \quad t_0\in(0,\pi), \quad t_0\neq\frac{\pi}{2},$$

згідно з теоремою Ролля існує точка $t_1\in(0,\pi)$ така, що

$$Q'_r(t_1;\delta) \;=\; 0,$$

звідки

$$Q_{r-1}(t_1;\delta) \;=\; 0.$$

Але це внаслідок (25) неможливо. Рівність (33) доведено. Тому із (24), використовуючи наслідок із теореми Фубіні [5, с. 331], виконання умов якого є очевидними, при $r=2l$, $l\in N$, маємо

$$\mathcal{E}(W^r_1; B_\delta)_1 \;=\; \sup_{f\in W^r_1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(x+t)\left(Q_r(t;\delta)-Q_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right)dt\right|dx \;\le$$

$$\le\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Q_r(t;\delta)-Q_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right|dt \;=\; \frac{2}{\pi}\left|\left(\int_0^{\pi/2}-\int_{\pi/2}^{\pi}\right)\left(Q_r(t;\delta)-Q_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right)dt\right| \;=$$

$$=\; \frac{4}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}\cos(2k+1)t\,dt\right| \;=$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 - \left(1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right) e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{34}$$

З іншого боку, згідно з лемою з роботи [7, с. 63] при парних r має місце співвідношення

$$\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1 \geq \sup_{f \in T^r} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - B_\delta(f, x)| dx \geq$$

$$\geq \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 - \left(1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right) e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{35}$$

Із (34) та (35) із урахуванням (32) випливає справедливість рівності

$$\mathcal{E}(W_1^r; B_\delta)_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1 - \left(1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right) e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}} = \mathcal{E}(W_\infty^r; B_\delta)_C.$$

Теорему 3 доведено.

В наступних двох теоремах подано повні асимптотичні розклади для наближень класів $\overline{W}_1^r$.

Теорема 4. *Якщо* $r = 2l$, $l \in N$, *то при* $\delta \to \infty$ *має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1 \cong \frac{2}{\pi}\left(\frac{r-1}{r!} \frac{1}{\delta^r} \ln\delta + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\nu}_k^r \frac{1}{\delta^r}\right), \tag{36}$$

де $\bar{\nu}_k^r = \nu_k^r$ *при* $k \neq r$ *і* $\bar{\nu}_r^r = -\bar{\nu}_r^r$, *а коефіцієнти* ν_k^r, $k = 2, 3, \ldots$, *визначаються формулою* (19).

Доведення. В теоремі 4 роботи [4] знайдено повний асимптотичний розклад

$$\mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C \cong \frac{2}{\pi}\left(\frac{r-1}{r!} \frac{1}{\delta^r} \ln\delta + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\nu}_k^r \frac{1}{\delta^r}\right), \quad \delta \to \infty.$$

Як і раніше, для доведення даної теореми достатньо показати, що

$$\mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C = \mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1, \quad r = 2l, \quad l \in N,$$

якщо для $\mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C$, $r = 2l$, $l \in N$ (див. [4, с. 23]), є відомою рівність

$$\mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right) e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{37}$$

Враховуючи інтегральне зображення (1) і те, що при $f \in W^r$, $r \in N \setminus \{1\}$,

$$\overline{B}_\delta(f, x) = B_\delta(\bar{f}, x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-k/\delta} \sin kt \, dt,$$

після застосування r-кратного інтегрування частинами отримуємо

$$\mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1 = \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W^r} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t+x) \overline{Q}_r(t;\delta)\, dt \right| dx, \tag{38}$$

де

$$\overline{Q}_r(t;\delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-k/\delta}}{k^r} \cos\left(kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right), \quad \delta > 0.$$

Переконаємося в тому, що

$$\operatorname{sign} \overline{Q}_r(t;\delta) = \pm \operatorname{sign} \sin t, \qquad r = 2l, \quad l \in N. \tag{39}$$

Очевидно, що

$$\overline{Q}_r(0;\delta) = \overline{Q}_r(\pi;\delta) = 0, \qquad r = 2l, \quad l \in N.$$

Отже, в припущенні, що

$$\overline{Q}_r(t;\delta) = 0$$

ще при деякому $t_0 \in (0, \pi)$, застосовуючи $r-2$ рази теорему Ролля, приходимо до висновку, що для функції $\overline{Q}_2(t;\delta)$ існує $t_{r-2} \in (0,\pi)$ таке, що

$$\overline{Q}_2(t_{r-2};\delta) = 0.$$

Але це неможливо, оскільки, використовуючи зауваження до теореми 1.14 роботи [9, с. 297], можна переконатись, що

$$\overline{Q}_2(t;\delta) > 0, \quad t \in (0,\pi).$$

Отже, рівність (39) має місце.

Таким чином, із (38) при $r = 2l$, $l \in N$, одержуємо

$$\mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1 \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\overline{Q}_r(t;,\delta)\right| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-k/\delta}}{k^r} \sin kt\, dt \right| =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{40}$$

З іншого боку, використовуючи лему з роботи [7, с. 63], при парному r маємо

$$\mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1 \ge \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{41}$$

Порівнюючи співвідношення (40) та (41), а також враховуючи рівність (37), приходимо до висновку, що

$$\mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}} = \mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C.$$

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Якщо* $r = 2l + 1$, $l \in N$, *то при* $\delta \to \infty$ *має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathscr{E}(\overline{W}_1^{\,r}; B_\delta)_1 \;\cong\; \frac{4}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\eta}_k^{\,r}\,\frac{1}{\delta^k}, \tag{42}$$

де $\overline{\eta}_k^{\,r} = \eta_k^r$ *при* $k \neq r$ *і* $\overline{\eta}_r^{\,r} = -\overline{\eta}_r^{\,r}$, *а коефіцієнти* η_k^r, $k = 2, 3, \ldots$, *визначаються з рівності* (29).

Доведення. Згідно з теоремою 5 роботи [4] має місце повний асимптотичний розклад

$$\mathscr{E}(\overline{W}_\infty^{\,r}; B_\delta)_C \;\cong\; \frac{4}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\eta}_k^{\,r}\,\frac{1}{\delta^k}, \quad \delta \to \infty.$$

Тому для доведення теореми достатньо довести рівність

$$\mathscr{E}(\overline{W}_1^{\,r}; B_\delta)_1 \;=\; \mathscr{E}(\overline{W}_\infty^{\,r}; B_\delta)_C, \qquad r = 2l+1, \quad l \in N, \tag{43}$$

зауваживши, що згідно з рівністю (57) роботи [4]

$$\mathscr{E}(\overline{W}_\infty^{\,r}; B_\delta)_C \;=\; \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1 - \left[1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{44}$$

Як показано в доведенні теореми 4, має місце рівність (38). Покажемо, що

$$\operatorname{sign}\left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right) \;=\; \pm\operatorname{sign}\cos t, \qquad r = 2l+1, \quad l \in N. \tag{45}$$

За припущення, що

$$\overline{Q}_r(t_0;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \;=\; 0, \qquad t_0 \in (0,\pi), \quad t_0 \;\neq\; \frac{\pi}{2},$$

згідно з теоремою Ролля існує точка $t_1 \in (0, \pi)$ така, що

$$\overline{Q}_r'(t_1;\delta) \;=\; 0,$$

звідки

$$\overline{Q}_{r-1}(t_1;\delta) \;=\; 0.$$

Але це внаслідок (39) неможливо. Рівність (45) доведено. Тому із (38), використовуючи наслідок із теореми Фубіні [6, с. 331], при $r = 2l+1$, $l \in N$, маємо

$$\mathscr{E}(\overline{W}_1^{\,r}; B_\delta)_1 \;=\; \sup_{f \in W_1^r}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x+t)\left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right)dt\right|dx \;\leq$$

$$\leq\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right|dt \;=\; \frac{2}{\pi}\left|\left(\int_0^{\pi/2} - \int_{\pi/2}^{\pi}\right)\left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right)dt\right| \;=$$

$$=\; \frac{4}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1 - \left[1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}\cos(2k+1)t\,dt\right| \;=$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{46}$$

З іншого боку, згідно з лемою роботи [7, c. 63] при непарних r має місце співвідношення

$$\mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1 \ \geq\ \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{47}$$

Із (46) та (47), а також (44) випливає рівність

$$\mathcal{E}(\overline{W}_1^r; B_\delta)_1 \ =\ \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{r+1}} \ =\ \mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C.$$

Теорему 5 доведено.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Петров В. А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 137 – 142.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
4. *Харкевич Ю. I., Кальчук I. В.* Повні асимптотики точних верхніх меж відхилень бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 311 – 335.
5. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения (Материалы Всесоюз. симп.). – Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. – С. 163 – 167.
6. *Натансон І. П.* Основи теорії функцій дійсної змінної. – Київ: Рад. школа, 1950. – 424 с.
7. *Pych P.* Approximation of functions in L- and C-metrics // Ann. Soc. Math. Pol. – 1967. – **1**, № 11. – P. 61 – 76.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Одержано 19.04.2006