УДК 517.977

А. В. Сукретна (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОБМЕЖЕНИЙ НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

We consider the problem of optimal control for the wave equation. For the formulated problem, we find the optimal control in the form of reverse connection in the case where the control attains the restrictions, construct some approximated control and justify its correctness, i.e., we prove that the proposed control realizes the minimum of the quality criterion.

Рассматривается задача оптимального управления для волнового уравнения. Для сформулированной проблемы найдено оптимальное управление в форме обратной связи в случае, когда управление выходит на ограничение, построено приближенное управление и обоснована его корректность, т. е. доказано, что предложенное управление реализует минимум критерия качества.

1. Вступ. Задача побудови оптимального керування у формі зворотного зв'язку або синтезу є актуальною проблемою і має розв'язок лише для скінченновимірних динамічних систем малої розмірності [1]. Для систем з розподіленими параметрами задача відшукання найкращого керування в замкненій формі в загальному випадку залишається ще й досі нерозв'язаною. Якщо нескінченновимірну систему вдається замінити еквівалентною скінченновимірною, для побудови оптимального керування можна скористатися принципом максимуму Понтрягіна [2]. При неможливості такого зведення оптимальне керування шукають, застосовуючи метод динамічного програмування Беллмана [3], однак при цьому підході постає проблема розв'язності рівнянь типу Ріккаті, що виникають при відшуканні функції Беллмана. Якщо вдається отримати програмне оптимальне керування, яке неперервно залежить від початкових даних, то синтезоване керування можна побудувати за допомогою граничного переходу М. М. Красовського [4]. В даній роботі для гіперболічної крайової задачі розв'язано питання обмеженого усередненого наближеного синтезу. Аналогічні питання у випадку відсутності обмежень на керування розглянуто в [5].

2. Постановка задачі. Нехай керований процес в циліндрі $\bar{Q}_T = [t_0, T] \times \bar{\Omega}$ описується крайовою задачею

$$\begin{aligned} &y^\varepsilon_{tt}(x,t) = A^\varepsilon(y^\varepsilon(x,t)) + g^\varepsilon(x)v(t), \quad (t,x) \in Q_T, \\ &y^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [t_0, T], \\ &y^\varepsilon(x,t_0) = \varphi_0^\varepsilon(x), \quad y^\varepsilon_t(x,t_0) = \varphi_1^\varepsilon(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $A^\varepsilon := \operatorname{div}(a^\varepsilon \overrightarrow{\nabla})$, $a^\varepsilon(x) = \{a^\varepsilon_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ — вимірні симетричні матриці, що підпорядковані умові

$$\exists \nu_1,\ \nu_2 > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \vec{\chi} \in \mathbb{R}^n\colon\ \nu_1 \sum_{i=1}^n \chi_i^2 \le a_{ij}(x)\chi_i\chi_j \le \nu_2 \sum_{i=1}^n \chi_i^2, \tag{2}$$

g^ε, $\varphi_1^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $\varphi_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з кусково-гладкою межею, $t_0 \ge 0$ — довільний фіксований момент часу, $\varepsilon \in (0,1)$ — малий параметр.

Керування

$$v(\cdot) \in U = \Big\{ v \in L_2([t_0, T]) \colon |v(t)| \leq \xi \quad \text{майже скрізь на} \quad [0;T] \Big\}. \tag{3}$$

На розв'язках (1) при $v(\cdot) \in U$ потрібно мінімізувати критерій якості

$$I(v) = \alpha \left(\int\limits_{\Omega} q_0^{\varepsilon}(x) y^{\varepsilon}(x, T) dx - \psi_0 \right)^2 + \gamma \int\limits_{t_0}^{T} v^2(t) dt \to \inf, \tag{4}$$

де $\alpha, \gamma > 0$, $\psi_0 \in \mathbb{R}$, $q_0^{\varepsilon} \in L_2(\Omega)$.

Будемо припускати справедливість наступних збіжностей:

$$\begin{gathered} g^{\varepsilon} \xrightarrow{w} g^0, \quad \varphi_0^{\varepsilon} \xrightarrow{w} \varphi_0^0, \quad \varphi_1^{\varepsilon} \xrightarrow{w} \varphi_1^0, \quad q_0^{\varepsilon} \xrightarrow{w} q_0^0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \\ a^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{G} a^0(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \end{gathered} \tag{5}$$

де поняття G-збіжності матриць вводиться з дотриманням [6].

Означення [6, с. 154]. *Послідовність матриць a^{ε} G-збігається до матриці a^0 в області Ω ($a^{\varepsilon} \xrightarrow{G} a^0$), якщо при будь-якому $f \in H^{-1}(\Omega)$ для розв'язків задачі Діріхле*

$$\operatorname{div}(a^{\varepsilon} \overrightarrow{\nabla} u^{\varepsilon}) = f, \quad u^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega),$$

мають місце співвідношення

$$u^{\varepsilon} \xrightarrow{w} u^0 \ \textit{в} \ H_0^1(\Omega),$$

$$p^{\varepsilon} = a^{\varepsilon} \overrightarrow{\nabla} u^{\varepsilon} \xrightarrow{w} p^0 = a^0 \overrightarrow{\nabla} u^0 \quad \textit{в} \quad L_2(\Omega),$$

де u^0 — розв'язок задачі Діріхле

$$\operatorname{div}(a^0 \overrightarrow{\nabla} u^0) = f, \quad u^0 \in H_0^1(\Omega).$$

Тому далі будемо вважати, що задачу оптимального керування (1), (3), (4) задано при $\varepsilon \in [0, 1)$ (при $\varepsilon = 0$ отримуємо „усереднену задачу").

Мета даної роботи, у випадку виходу керування на обмеження, полягає в отриманні точної формули синтезованого оптимального керування $u^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}[t, y^{\varepsilon}]$ задачі (1), (3), (4) (тобто керування в формі зворотного зв'язку $u^{\varepsilon}[t, y^{\varepsilon}]$, яке б при підстановці його в (1) замість $v(t)$ мінімізувало заданий критерій якості) і, при заміні в цій формулі всіх нескінченних рядів на їх часткові суми з усередненими коефіцієнтами, доведенні близькості отриманого керування $u_N^{\varepsilon} = u_N^{\varepsilon}[t, y_N^{\varepsilon}]$ до точного $u^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}[t, y^{\varepsilon}]$, а також близькості значень $I(u^{\varepsilon})$ і $I(u_N^{\varepsilon})$.

3. Побудова оптимального керування в формі зворотного зв'язку. Відомо, що при кожному фіксованому керуванні $v \in U$ задача (1) має єдиний розв'язок в класі $C([t_0, T]; H_0^1)$ [7, с. 77], (теорема 4.1). Крім того, задача оптимального керування (1), (3), (4) має єдиний розв'язок $u^{\varepsilon}(\cdot) \in U$ [8, с. 16] (теорема 1.2).

Розглянемо при $\varepsilon \in [0, 1)$ спектральну задачу

$$
\begin{aligned}
&A^\varepsilon X^\varepsilon + (\lambda^\varepsilon)^2 X^\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \\
&X^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Нехай $0 \le (\lambda_1^\varepsilon)^2 \le (\lambda_2^\varepsilon)^2 \le \ldots, (\lambda_k^\varepsilon)^2 \to \infty$ при $k \to \infty$, — власні числа спектральної задачі (6), причому будемо вважати, що власні числа спектральної задачі (6) з усередненим оператором (при $\varepsilon = 0$) є простими:

$$
0 < (\lambda_1^0)^2 < (\lambda_2^\varepsilon)^2 < \cdots < (\lambda_k^0)^2 < (\lambda_{k+1}^0)^2 < \ldots, \quad (\lambda_k^0)^2 \to \infty;
$$

$\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$ — відповідні власні функції, що утворюють ортонормований базис в $L_2(\Omega)$. Тоді мають місце наступні збіжності [6, с. 299] (теорема 3):

$$
\lambda_k^\varepsilon \to \lambda_k^0, \quad \|X_k^\varepsilon - X_k^0\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}
$$

тут і далі $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Далі, при кожному $\varepsilon \in [0, 1)$ згідно з методом Фур'є, розкладаючи всі коефіцієнти задачі оптимального керування (1), (3), (4) в ряди Фур'є за системою $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$, отримуємо деяку розщеплену нескінченновимірну задачу оптимального керування, що допускає зведення до еквівалентної двовимірної задачі

$$
\begin{aligned}
&\dot{a}_i^\varepsilon(t) = b_i^\varepsilon(t) v(t), \quad i = 1, 2, \\
&a_i^\varepsilon(t_0) = \Phi_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2, \\
&J(v) = \alpha(a_1^\varepsilon(T) - \psi_0)^2 + \gamma \int_{t_0}^{T} v^2(t)\,dt \to \inf,
\end{aligned} \tag{8}
$$

де

$$
\begin{aligned}
a_1^\varepsilon(t) &= \sum_{i=1}^\infty q_i^{0\varepsilon} y_i^\varepsilon(t) \cos\lambda_i^\varepsilon(T-t) + \sum_{i=1}^\infty \frac{q_i^{0\varepsilon}}{\lambda_i^\varepsilon} \dot{y}_i^\varepsilon(t) \sin\lambda_i^\varepsilon(T-t), \\
a_2^\varepsilon(t) &= -\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\varepsilon q_i^{1\varepsilon} y_i^\varepsilon(t) \sin\lambda_i^\varepsilon(T-t) + \sum_{i=1}^\infty q_i^{1\varepsilon} \dot{y}_i^\varepsilon(t) \cos\lambda_i^\varepsilon(T-t), \\
b_1^\varepsilon(t) &= \sum_{i=1}^\infty \frac{q_i^{0\varepsilon}}{\lambda_i^\varepsilon} g_i^\varepsilon \sin\lambda_i^\varepsilon(T-t), \qquad b_2^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^\infty q_i^{1\varepsilon} g_i^\varepsilon \cos\lambda_i^\varepsilon(T-t), \\
\Phi_1^\varepsilon &= \sum_{i=1}^\infty q_i^{0\varepsilon} \varphi_i^{0\varepsilon} \cos\lambda_i^\varepsilon(T-t_0) + \sum_{i=1}^\infty \frac{q_i^{0\varepsilon}}{\lambda_i^\varepsilon} \varphi_i^{1\varepsilon} \sin\lambda_i^\varepsilon(T-t_0), \\
\Phi_2^\varepsilon &= -\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\varepsilon q_i^{1\varepsilon} \varphi_i^{0\varepsilon} \sin\lambda_i^\varepsilon(T-t_0) + \sum_{i=1}^\infty q_i^{1\varepsilon} \varphi_i^{1\varepsilon} \cos\lambda_i^\varepsilon(T-t_0),
\end{aligned} \tag{9}
$$

причому всі ряди в (9) збігаються рівномірно по $t \in [t_0, T]$ і допускають почленне інтегрування та диференціювання.

Крім того, для коефіцієнтів Фур'є розв'язку крайової задачі (1) справедливими є оцінки

$$\begin{aligned} &(y_i^\varepsilon(t))^2 \leq 3\left((\varphi_i^{0\varepsilon})^2 + \frac{(\varphi_i^{1\varepsilon})^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^2} + \frac{4(g_i^\varepsilon)^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^4}\xi^2\right), \\ &(\dot{y}_i^\varepsilon(t))^2 \leq 3\left((\lambda_i^\varepsilon)^2(\varphi_i^{0\varepsilon})^2 + (\varphi_i^{1\varepsilon})^2 + \frac{4(g_i^\varepsilon)^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^2}\xi^2\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Для побудови програмного оптимального керування задачі (8) скористаємося принципом максимуму Понтрягіна [9, с. 186] (теорема 8.1), після чого за допомогою граничного переходу Красовського отримаємо синтезоване оптимальне керування.

Розглянемо випадок, коли оптимальне керування задачі (8) (а отже, і вихідної задачі оптимального керування (1), (3), (4)) виходить на обмеження і має єдину точку перемикання, тому далі будемо вважати виконаним наступне припущення.

Припущення. *При кожному* $\varepsilon \in [0, 1)$ *функція* $b_1^\varepsilon(t)$ *є додатною і монотонно спадає на* $[t_0, T)$, *крім того, виконуються нерівності*

$$-\frac{\alpha(\Phi_1^\varepsilon - \psi_0)}{\gamma + \alpha\displaystyle\int_{t_0}^T (b_1^\varepsilon(s))^2 ds} b_1^\varepsilon(t_0) > \xi, \tag{11}$$

$$\xi \int_{t_0}^T b_1^\varepsilon(s) ds < \psi_0 - \Phi_1^\varepsilon. \tag{12}$$

***Зауваження* 1.** З визначення $b_1^\varepsilon(t)$ в (9) випливає $b_1^\varepsilon(T) = 0$.

Тоді, повертаючись до вихідної задачі оптимального керування хвильовим процесом (1), (3), (4), знаходимо, що оптимальний синтез при умові виходу керування на обмеження має вигляд

$$u^\varepsilon[t, y^\varepsilon(x,t)] = \begin{cases} \xi, \quad t \in [t_0, \tau^\varepsilon], \\ -\dfrac{\alpha\left((R_{11}^\varepsilon(\cdot,t), y^\varepsilon(\cdot,t)) + (R_{12}^\varepsilon(\cdot,t), y_t^\varepsilon(\cdot,t)) - \psi_0\right)}{\gamma + \alpha\displaystyle\int_t^T (b_1^\varepsilon(s))^2 ds} b_1^\varepsilon(t), \\ \qquad t \in [\tau^\varepsilon, T], \end{cases} \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned} R_{11}^\varepsilon(x,t) &= \sum_{i=1}^\infty q_i^{0\varepsilon} X_i^\varepsilon(x) \cos\lambda_i^\varepsilon(T-t), \\ R_{12}^\varepsilon(x,t) &= \sum_{i=1}^\infty \frac{q_i^{0\varepsilon}}{\lambda_i^\varepsilon} X_i^\varepsilon(x) \sin\lambda_i^\varepsilon(T-t), \end{aligned} \tag{14}$$

точка перемикання τ^ε визначається з рівняння

$$-\frac{\alpha\left(\Phi_1^\varepsilon - \psi_0 + \xi\displaystyle\int_{t_0}^{\tau^\varepsilon} b_1^\varepsilon(s) ds\right)}{\gamma + \alpha\displaystyle\int_{\tau^\varepsilon}^T (b_1^\varepsilon(s))^2 ds} b_1^\varepsilon(\tau^\varepsilon) = \xi, \tag{15}$$

а $y^\varepsilon(x,t)$ — розв'язок крайової задачі (1) з керуванням (13).

***Зауваження* 2.** За умови виконання припущення рівняння для точки перемикання (15) має єдиний розв'язок, і оптимальне керування (13) є неперервним у точці $t = \tau^\varepsilon$.

З огляду на збіжності (5) та (7) неважко довести наведені нижче твердження.

Лема 1. *Мають місце наступні збіжності при* $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{gathered} \Phi_1^\varepsilon \to \Phi_1^0, \qquad b_1^\varepsilon(t) \to b_1^0(t), \\ \left\| R_{11}^\varepsilon(\cdot,t) - R_{11}^0(\cdot,t) \right\| \to 0, \qquad \left\| R_{12}^\varepsilon(\cdot,t) - R_{12}^0(\cdot,t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \end{gathered} \tag{16}$$

рівномірно щодо $t \in [t_0, T]$.

Лема 2. *Має місце збіжність* $\tau^\varepsilon \to \tau^0$, $\varepsilon \to 0$, *розв'язків рівняння* (15).

Таким чином, при виконанні припущення для кожного $\varepsilon \in [0,1)$ ми побудували оптимальне керування для задачі (1), (3), (4) у формі зворотного зв'язку (13), де точка перемикання τ^ε визначається з рівняння (15), а $y^\varepsilon(x,t)$ — розв'язок крайової задачі (1) з керуванням (13). Проте отримане керування внаслідок запису через нескінченні ряди і нерегулярної залежності від малого параметра не є зручним для практичного застосування, тому далі побудуємо і обґрунтуємо закон наближеного усередненого синтезу, що буде забезпечувати мінімум критерію якості (4).

4. Наближений усереднений синтез задачі (1), (3), (4). Нехай тепер для $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered} b_1^{0N}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i^0} q_{0i}^0 g_i^0 \sin \lambda_i^0 (T-t), \\ \Phi_0^{0N}(t) = \sum_{i=1}^{N} q_{0i}^0 \varphi_{0i}^0 \cos \lambda_i^0 (T-t_0) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i^0}\, q_{0i}^0 \varphi_{0i}^0 \sin \lambda_i^0 (T-t_0), \\ R_{11}^{0N}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} q_{0i}^0 \cos \lambda_i^0 (T-t) X_i^0(x), \\ R_{12}^{0N}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i^0}\, q_{0i}^0 \sin \lambda_i^0 (T-t) X_i^0(x). \end{gathered} \tag{17}$$

Побудуємо наближений усереднений синтез за законом

$$u_N^0[t, z_{0N}^\varepsilon(x,t)] =$$

$$= \begin{cases} \xi, & t \in [t_0, \tau^{0N}], \\ -\dfrac{\alpha\left((R_{11}^{0N}(\cdot,t), z_{0N}^\varepsilon(\cdot,t)) + (R_{12}^{0N}(\cdot,t), z_{0Nt}^\varepsilon(\cdot,t)) - \psi_0\right)}{\gamma + \alpha \displaystyle\int_t^T (b_1^{0N}(s))^2 ds} b_1^{0N}(t), & \\ & t \in [\tau^{0N}, T], \end{cases} \tag{18}$$

де точка перемикання τ^{0N} визначається з рівняння

$$-\frac{\alpha\left(\Phi_1^{0N}-\psi_0+\xi\displaystyle\int_{t_0}^{\tau^{0N}} b_1^{0N}(s)ds\right)}{\gamma+\alpha\displaystyle\int_{\tau^{0N}}^{T}(b_1^{0N}(s))^2ds}\; b_1^{0N}(\tau^{0N})=\xi, \tag{19}$$

а $z_{0N}^{\varepsilon}(x,t)$ — розв'язок крайової задачі (1) при $v(t)=u_N^0\big[t,z_{0N}^{\varepsilon}(x,t)\big]$.

***Зауваження* 3.** Хоча оптимальний синтез (13), (15) при $\varepsilon\in[0,1)$ і неперервний в точці $t=\tau^{\varepsilon}$, наближений синтез (18), (19) може не мати цієї властивості.

Має місце наступна лема.

Лема 3. *$\tau^{0N}\to\tau^0$, $N\to\infty$, де τ^0 — розв'язок рівняння* (15) *при $\varepsilon=0$.*

Обґрунтування усередненого наближеного синтезу (18), (19) випливає з наступної теореми.

Теорема. *Нехай φ_1^{ε}, $q_0^{\varepsilon}\in L_2(\Omega)$, $g^{\varepsilon},\varphi_0^{\varepsilon}\in H_0^1(\Omega)$, мають місце збіжності* (5) *та виконується припущення. Тоді справджуються наступні оцінки близькості між оптимальним керуванням* (13) *і побудованим усередненим наближеним керуванням* (18)*: для довільного малого $\eta>0$ існують $N_0\geq 1$ і $\varepsilon_0>0$ такі, що для будь-яких $N\geq N_0$ та $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ виконується*

$$\left\|u_N^0[\cdot,z_N^{\varepsilon}]-u^{\varepsilon}[\cdot,y^{\varepsilon}]\right\|_{L_2([t_0,T])}<\eta, \tag{20}$$

$$\left|I(u_N^0[t,z_N^{\varepsilon}])-I(u^{\varepsilon}[t,y^{\varepsilon}])\right|<\eta. \tag{21}$$

Доведення. 1. Покажемо, що $u_N^0[t,z_{0N}^{\varepsilon}(x,t)]\to v^0[t,z^{\varepsilon}(x,t)]$ в $L_2([t_0,T])$ при $N\to\infty$, де

$$v^0[t,z^{\varepsilon}(x,t)]=$$

$$=\begin{cases}\xi, & t\in[t_0,\tau^0],\\[2mm] -\dfrac{\alpha\left((R_{11}^0(\cdot,t),z^{\varepsilon}(\cdot,t))+(R_{12}^0(\cdot,t),z_t^{\varepsilon}(\cdot,t))-\psi_0\right)}{\gamma+\alpha\displaystyle\int_t^T(b_1^0(s))^2ds}\; b_1^0(t), & t\in[\tau^0,T],\end{cases} \tag{22}$$

точка перемикання τ^0 визначається з рівняння (15) при $\varepsilon=0$, а $z^{\varepsilon}(x,t)$ — розв'язок крайової задачі (1) з керуванням (22).

Очевидно, що при $N\to\infty$

$$b_1^{0N}(t)\to b_1^0(t),\quad \left\|R_{11}^{0N}(\cdot,t)-R_{11}^0(\cdot,t)\right\|\to 0,\quad \left\|R_{12}^{0N}(\cdot,t)-R_{12}^0(\cdot,t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0$$

рівномірно щодо $t\in[t_0,T]$.

Розглянемо

$$I=\int\limits_{t_0}^{T}\left|u_N^0\Big[t,z_{0N}^{\varepsilon}(x,t)\Big]-v^0[t,z^{\varepsilon}(x,t)]\right|dt.$$

З лем 2, 3 можемо вибрати $N_1\in\mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $N\geq N_1$ $|\tau^{0N}-\tau^0|<$ $<\dfrac{\eta^2}{144\xi^2}$. Тоді

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \int\limits_{t_0}^{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}} \left| u_N^0\left[t, z_{0N}^\varepsilon(x,t)\right] - v^0\left[t, z^\varepsilon(x,t)\right] \right|^2 dt = 0,$$

$$I_2 = \int\limits_{\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}} \left| u_N^0\left[t, z_{0N}^\varepsilon(x,t)\right] - v^0\left[t, z^\varepsilon(x,t)\right] \right|^2 dt \le (2\xi)^2 \cdot 2 \cdot \frac{\eta^2}{144\xi^2} \le \frac{\eta^2}{18},$$

$$I_3 = \int\limits_{\tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}}^{T} \left| u_N^0\left[t, z_{0N}^\varepsilon(x,t)\right] - v^0\left[t, z^\varepsilon(x,t)\right] \right|^2 dt.$$

На проміжку $\left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}, T\right]$ обидва керування (18) і (22) задаються нижнім рядком, а функції $z_{0N}^\varepsilon(x,t)$ і $z^\varepsilon(x,t)$ є розв'язками крайової задачі (1) з керуваннями (18) і (22) відповідно.

Запишемо спочатку деякі оцінки для $z^\varepsilon(x,t)$. З (1) і [7, с. 71] (лема 3.2) маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 + \|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) = (g^\varepsilon v^0, z_t^\varepsilon(\cdot,t)) \le \|g^\varepsilon\| \cdot \|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\| \cdot |v^0|,$$

а з (22) оцінюємо

$$|v^0| \le c_1 + c_2\left(\left\|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2 + \left\|z^\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right), \tag{23}$$

де c_1, c_2 не залежать від ε.

Отже, для $t \ge \tau^0$ (для таких t має місце (23)) отримуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 + \|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \le \widetilde{c}\left(c_1 + c_2\left(\|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 + \|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\right) \tag{24}$$

($\widetilde{c} \equiv \mathrm{const}$ не залежить від ε), звідки

$$\left\|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2 + \left\|z^\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \left\|z_t^\varepsilon(\cdot,\tau^0)\right\|^2 + \left\|z^\varepsilon(\cdot,\tau^0)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + k\widetilde{c}c_1, \tag{25}$$

де стала k не залежить від ε.

Більш того, на підставі оцінок (10) маємо

$$\left\|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2 + \left\|z^\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le c \tag{26}$$

для $t \in [\tau^0, T]$, де стала c не залежить від ε.

Зауважимо також, що аналогічні оцінки можна отримати і для $z_{0N}^\varepsilon(x,t)$.

Розглянемо тепер $d_N^\varepsilon(x,t) = z_{0N}^\varepsilon(x,t) - z^\varepsilon(x,t)$. Функція $d_N^\varepsilon(x,t)$ при $t \in \left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}, T\right]$ є розв'язком крайової задачі

$$d^\varepsilon_{Ntt} = A^\varepsilon d^\varepsilon_N + g^\varepsilon(u^0_N\left[t, z^\varepsilon_{0N}(x,t)\right] - v^0[t, z^\varepsilon(x,t)]),$$
$$d^\varepsilon_N|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$d^\varepsilon_N\left(x, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) = z^\varepsilon_{0N}\left(x, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) - z^\varepsilon\left(x, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right),$$
$$d^\varepsilon_{Nt}\left(x, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) = z^\varepsilon_{0Nt}\left(x, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) - z^\varepsilon_t\left(x, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right).$$

Для цих t, використовуючи (18), (22) і (26), оцінюємо

$$\left|u^0_N\left[t, z^\varepsilon_{0N}(x,t)\right] - v^0\left[t, z^\varepsilon(x,t)\right]\right| \le \alpha_N + \beta\left(\left\|d^\varepsilon_{Nt}(\cdot,t)\right\|^2 + \left\|d^\varepsilon_N(\cdot,t)\right\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right),$$

причому $\alpha_N \to 0$, $N \to \infty$, $\{\alpha_N\}_{N=1}^\infty$, β не залежать від ε.

Отже, ми отримали оцінку типу (23) і, використовуючи попередні міркування, аналогічно до (25) маємо

$$\left\|d^\varepsilon_{Nt}(\cdot,t)\right\|^2 + \left\|d^\varepsilon_N(\cdot,t)\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le$$
$$\le \left\|d^\varepsilon_{Nt}\left(\cdot, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right)\right\|^2 + \left\|d^\varepsilon_N\left(\cdot, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right)\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \alpha_N k.$$

Покажемо тепер, що

$$\left\|d^\varepsilon_N\left(\cdot, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right)\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \to 0, \qquad \left\|d^\varepsilon_{Nt}\left(\cdot, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right)\right\|^2 \to 0, \quad N \to \infty.$$

Зауважимо, що

$$d^\varepsilon_{Nt}\left(x, \tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) = d^\varepsilon_N\left(x, \tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) = 0.$$

На проміжку часу $t \in \left[\tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right]$ d^ε_N є розв'язком крайової задачі

$$d^\varepsilon_{Ntt} = A^\varepsilon d^\varepsilon_N + g^\varepsilon\Big(u^0_N\left[t, z^\varepsilon_{0N}(x,t)\right] - v^0\left[t, z^\varepsilon(x,t)\right]\Big),$$
$$d^\varepsilon_N|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$d^\varepsilon_N\left(x, \tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) = d^\varepsilon_{Nt}\left(x, \tau^0 - \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right) = 0.$$

Звідси отримуємо

$$\left\|d^\varepsilon_{Nt}\left(\cdot, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right)\right\|^2 + \left\|d^\varepsilon_N\left(\cdot, \tau^0 + \frac{\eta^2}{144\xi^2}\right)\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le L\eta^2, \quad L = \mathrm{const} > 0.$$

Тому

$$\left\|z^\varepsilon_{0N}(\cdot,t) - z^\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \left\|z^\varepsilon_{0Nt}(\cdot,t) - z^\varepsilon_t(\cdot,t)\right\|^2 \le L\eta^2 + \alpha_N k \quad \forall t \in [t_0, T], \tag{27}$$

де $\alpha_N \to 0$, $N \to \infty$.

Отже, для достатньо великих N при $\alpha_N \to 0$ дістаємо

$$\left|u_N^0\big[t, z_{0N}^\varepsilon(x,t)\big] - v^0\big[t, z^\varepsilon(x,t)\big]\right| \le \alpha_N + \beta(L\eta^2 + \alpha_N k) \le (\beta L + 1)\eta^2.$$

Таким чином, ми довели рівномірну збіжність керувань на проміжку $t \in$ $\in \left[\tau^0 + \dfrac{\eta^2}{144\xi^2}, T\right]$, а тому, очевидно, $I_3 \le (T - t_0)(\beta L + 1)\eta^2$. Покладаючи в попередніх міркуваннях $\eta = \min\left\{\dfrac{\eta}{\sqrt{18(T-t_0)(\beta L+1)}},\ \eta\right\}$, отримуємо $I_3 \le \dfrac{\eta^2}{18}$ і

$$\exists N_2 \ge N_1 \quad \forall N \ge N_2\colon \qquad \left(\int_{t_0}^{T}\left|u_N^0\big[t, z_{0N}^\varepsilon(x,t)\big] - v^0\big[t, z^\varepsilon(x,t)\big]\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\eta}{3} \tag{28}$$

рівномірно по $\varepsilon \in (0,1)$.

2. Покажемо, що $v^0\big[t, z^\varepsilon(x,t)\big] \to u^0[t, y^0(x,t)]$, $\varepsilon \to 0$, де $u^0\big[t, y^0(x,t)\big]$ задається формулою (13) при $\varepsilon = 0$ і є оптимальним керуванням задачі (1), (3), (4) (при $\varepsilon = 0$), $y^0(x,t)$ — розв'язок крайової задачі в (1) ($\varepsilon = 0$) при $v = u^0\big[t, y^0(x,t)\big]$.

Зауважимо, що точки перемикання керувань $v^0\big[t, z^\varepsilon(x,t)\big]$ і $u^0\big[t, y^0(x,t)\big]$ збігаються, тому

$$\forall t \in [t_0, \tau^0]\colon \quad v^0\big[t, z^\varepsilon(x,t)\big] \equiv u^0\big[t, y^0(x,t)\big] \equiv \xi.$$

З оцінок (10) маємо, що існує M, не залежне від ε, таке, що

$$\operatorname*{ess\,sup}_{[t_0,T]}\left\{\big\|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|z_t^\varepsilon(\cdot,t)\big\|^2\right\} \le M.$$

Тому з [10, с. 70] (теорема 5.1) випливає існування такої функції $z^0 = z^0(x,t)$, що за підпослідовністю для всіх $t \in [t_0, T]$ виконуються збіжності

$$z^\varepsilon(t) \xrightarrow{w} z^0(t) \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega), \qquad z_t^\varepsilon(t) \xrightarrow{w} z_t^0(t) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega). \tag{29}$$

Далі аналогічно доведенню п. 2 теореми з [5] отримуємо, що $z^0 \equiv y^0$ і збіжності (29) мають місце по всій послідовності, тому $v^0\big[t, z^\varepsilon(x,t)\big] \to u^0\big[t, y^0(x,t)\big]$, $\varepsilon \to 0$, при кожному $t \in [t_0, T]$, а отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, і в $L_2([t_0, T])$.

Таким чином,

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\colon \quad \left(\int_{t_0}^{T}\left|v^0\big[t, z^\varepsilon(x,t)\big] - u^0\big[t, y^0(x,t)\big]\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\eta}{3}. \tag{30}$$

3. Аналогічно п. 2 можна показати, що $u^\varepsilon\big[t, y^\varepsilon(x,t)\big] \to u^0\big[t, y^0(x,t)\big]$, $\varepsilon \to 0$. Але ми скористаємося тим, що обидва керування є оптимальними керуваннями у формі зворотного зв'язку (синтезу) задачі (1), (3), (4) при $\varepsilon > 0$ і $\varepsilon = 0$ відповідно, тому легко переконатися, що для всіх $\varepsilon \in [0, 1)$ вздовж оптимальних траєкторій

$$-\frac{\alpha\left((R_{11}^{\varepsilon}(\cdot,t),y^{\varepsilon}(\cdot,t))+(R_{11}^{\varepsilon}(\cdot,t),y^{\varepsilon}(\cdot,t))-\psi_0\right)}{\gamma+\alpha\displaystyle\int_t^T(b_1^{\varepsilon}(s))^2ds}=$$

$$=-\frac{\alpha\left(\Phi_1^{\varepsilon}+\xi\displaystyle\int_{t_0}^{\tau^{\varepsilon}}b_1^{\varepsilon}(s)ds-\psi_0\right)}{\gamma+\alpha\displaystyle\int_t^T(b_1^{\varepsilon}(s))^2ds}=B^{\varepsilon}\equiv\mathrm{const}\,.$$

Тоді

$$u^{\varepsilon}\big[t,y^{\varepsilon}(x,t)\big]=\begin{cases}\xi, & t\in[t_0,\tau^{\varepsilon}],\\ B^{\varepsilon}b_1^{\varepsilon}(t), & t\in[\tau^{\varepsilon},T],\end{cases}$$

$$u^{0}\big[t,y^{0}(x,t)\big]=\begin{cases}\xi, & t\in[t_0,\tau^{0}],\\ B^{0}b_1^{0}(t), & t\in[\tau^{0},T],\end{cases}$$

і з (16) і леми 2 поточково маємо потрібну збіжність.

Звідси

$$\forall\eta>0\quad\exists\varepsilon_2>0\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)\colon\ \left(\int\limits_{t_0}^{T}\Big|u^{\varepsilon}\big[t,y^{\varepsilon}(x,t)\big]-u^{0}\big[t,y^{0}(x,t)\big]\Big|^2dt\right)^{\frac12}<\frac{\eta}{3}.\tag{31}$$

З (28), (30), (31) маємо

$$\begin{gathered}\forall\eta>0\quad\exists N_2\in\mathbb{N}\quad\exists\widetilde{\varepsilon}=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}>0\quad\forall N\geq N_2\quad\forall\varepsilon\in(0,\widetilde{\varepsilon})\colon\\ \Big\|u^{\varepsilon}\big[t,y^{\varepsilon}(x,t)\big]-u_N^{0}\big[t,z_{0N}^{\varepsilon}(x,t)\big]\Big\|_{L_2([t_0,T])}<\eta.\end{gathered}\tag{32}$$

4. Переконаємось у справедливості (21). Для цього, з урахуванням вигляду функціоналів, припущення і (32), достатньо показати близькість за нормою $L_2(\Omega)$ $z_{0N}^{\varepsilon}(x,T)$ і $y^{\varepsilon}(x,T)$. Зауважимо, що згадані функції є розв'язками однієї і тієї ж крайової задачі (1), тому їх різниця $D_N^{\varepsilon}(x,t)=z_{0N}^{\varepsilon}(x,T)-y^{\varepsilon}(x,T)$ задовольняє крайову задачу

$$\begin{aligned}&D_{N\,tt}^{\varepsilon}=A^{\varepsilon}D_N^{\varepsilon}+g^{\varepsilon}\Big(u_N^0[t,z_{0N}^{\varepsilon}(x,t)]-u^{\varepsilon}\big[t,y^{\varepsilon}(x,t)\big]\Big),\\ &D_N^{\varepsilon}|_{\partial\Omega}=0,\\ &D_N^{\varepsilon}(x,t_0)=D_{N\,t}^{\varepsilon}(x,t_0)=0.\end{aligned}$$

Тепер з оцінок (10) і (32) отримуємо

$$\big\|D_N^{\varepsilon}(\cdot,t)\big\|^2=\big\|z_{0N}^{\varepsilon}(\cdot,T)-y^{\varepsilon}(\cdot,T)\big\|^2\leq\frac{12}{(\lambda_1^{\varepsilon})^2}\|g^{\varepsilon}\|\eta^2\leq D\eta^2,$$

звідки

$$\left| I\big(u^{\varepsilon}\big[t, y^{\varepsilon}(x,t)\big]\big) - I\big(u_N^0\big[t, z_{0N}^{\varepsilon}(x,t)\big]\big) \right| \leq Q\eta.$$

На підставі міркувань, викладених у пп. $1-3$, для $\eta = \min\left\{\eta, \dfrac{\eta}{Q}\right\}$ переконуємось у виконанні (20) і (21) одночасно, що і завершує доведення.

5. Висновки. У роботі для задачі оптимального керування хвильовим процесом у сильно неоднорідному середовищі побудовано оптимальне керування у формі зворотного зв'язку (розглянуто випадок, коли оптимальне керування має єдину точку перемикання), на базі останнього побудовано наближене усереднене керування і обґрунтовано його коректність, тобто доведено, що побудоване керування реалізує мінімум критерію якості і є близьким до оптимального.

1. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 359 с.
2. *Математическая* теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, З. И. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 400 с.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
5. *Капустян О. В., Сукретна А. В.* Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 612–620.
6. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 461 с.
7. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1997. – 643 p.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
9. *Кротов В. Ф.* Основы теории оптимального управления. – М.: Высш. шк., 1990. – 429 с.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

Одержано 28.03.2007