УДК 517.53

Э. О. Аликулов, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О СВЯЗНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВ

Приведены условия, при которых график некоторых многозначных отображений, возникающих в различных дифференциальных процессах, связен.

Наведені умови, за яких графік деяких многозначних відображень, що виникають у різних диференціальних процесах, зв'язний.

Известно [1, с. 138], что график точной производной вещественной функции $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, связен. Приведем обобщения этого результата. Сначала докажем теорему, схема доказательства которой используется и в дальнейшем.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^p$ и $f: D \to \mathbb{R}^q$ — функция первого класса Бэра такая, что $f(\partial U) \subset \overline{f(U)}$ для любого открытого шара $U \subset D$, где $\overline{U} \subset D$. Пусть $\mathcal{Y} = f(D)$. Тогда $\mathcal{Y}$ связно.*

Доказательство . Пусть F — открыто-замкнутое подмножество $\mathcal{Y}$ и $\varnothing \neq F \neq \mathcal{Y}$. Положим $A = f^{-1}(F)$. Из связности D следует $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{D \setminus A} = \varnothing$. Так как f — функция первого класса, то сужение $f / \mathrm{Fr}(A)$ имеет точку непрерывности a. Поскольку F и $\mathcal{Y} \setminus F$, а следовательно, A и $D \setminus A$ удовлетворяют тем же предположениям, можно считать, что $a \in A$, и потому $a \in A \cap \overline{D \setminus A}$.

Множество $A = f^{-1}(F)$ содержит окрестность точки a относительно множества $\mathrm{Fr}(A)$, так как функция $f / \mathrm{Fr}(A)$ непрерывна в точке a и F — окрестность $f(a)$. Поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $x \in \mathrm{Fr}(A)$ и $\rho(x, a) < \varepsilon$ следует, что $x \in A$. Пусть b — точка множества $D \setminus A$ такая, что $\rho(a, b) < \varepsilon$ (в соответствии с условием $a \in \overline{D \setminus A}$). Следовательно, $b \notin \mathrm{Fr}(A)$, откуда $b \in D \setminus \overline{A}$. Соединим точки a и b отрезком $[a, b]$ и возьмем открытый шар U с центром в точке b, принадлежащий $D \setminus \overline{A}$. Перемещаем U вдоль отрезка $[a, b]$ до первой точки его касания своей границей к множеству $\mathrm{Fr}(A)$. Точку касания обозначим через c. Ясно, что $c \in \mathrm{Fr}(A)$, из этого следует, что $c \in A$, а поэтому $f(c) \in F$. Но это противоречит формуле

$$f(c) \in \overline{f(U)} \subset \overline{f(D \setminus A)} = \overline{f f^{-1}(\mathcal{Y} \setminus F)} = \mathcal{Y} \setminus F.$$

Пусть D — область в $\mathbb{R}^p$. Для непрерывной вещественной функции $f: D \to \mathbb{R}^1$ рассмотрим следующее построение. Обозначим точку $x \in D$, $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = (x_i, y)$ и рассмотрим множества

$$\mathfrak{m}_x^i = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{m_\varepsilon(f; x_i)},$$

где

$$m_\varepsilon(f; x_i) = \left\{ \tfrac{1}{\Delta x_i}\big(f(x_i + \Delta x_i, y) - f(x_i, y)\big), \, 0 < |\Delta x_i| \le \varepsilon \right\}.$$

Определение. *Число d называется частным производным числом по x_i непрерывной функции f в точке x, если существует последовательность вещественных чисел $\{h_n\}$, $h_n \to 0$, для которой*

$$\tfrac{1}{h_n}\big(f(x_i + h_n, y) - f(x_i, y)\big) \to d.$$

Легко показать, что $\mathfrak{m}_x^{(i)}(f)$ совпадает с совокупностью всех частных производных чисел по x_i функции f в данной точке x, и состоит, вообще говоря, из двух компонент: множества $\mathfrak{m}_x^{(i)+}(f)$ правых (т. е. для $h_n > 0$) и множества $\mathfrak{m}_x^{(i)-}(f)$ левых частных производных чисел.

Докажем следующую теорему, обобщающую результат [2] для случая, когда $D = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ и функция f непрерывна на интервале (α, β).

Теорема 2. *Пусть f — непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^p$ и в каждой точке $x \in D$, $\mathfrak{m}_x^{(i)}(f) = \mathfrak{m}_x^{(i)+} \cup \mathfrak{m}_x^{(i)-}$ связно. Тогда график многозначного отображения*

$$\Phi_f : x \to \mathfrak{m}_x^{(i)}(f)$$

связен, т.е.

$$W_\Phi = \left\{ (x, \xi) : x \in D, \xi \in \mathfrak{m}_x^{(i)}(f) \right\}$$

— связное подмножество $\mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^1$.

Доказательство проведем для случая $p = 2$, т.е. когда f — функция двух вещественных переменных $z = (x, y) \in D$. Нетрудно убедиться в том, что в общем случае доказательство незначительно отличается от приводимого ниже.

Пусть F — открыто-замкнутое подмножество W и $\varnothing \neq F \neq W$. Отметим, что оно состоит из целых множеств $\mathfrak{m}_z^x(f)$. Положим $A = \Phi_f^{-1}(F)$. Из связности D следует, что $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{D \setminus A} \neq \varnothing$, и сужение $\Phi_f / \mathrm{Fr}(A)$ имеет точку полунепрерывности сверху z_0 [2]. Поскольку F и $W \setminus F$, а следовательно, A и $D \setminus A$ удовлетворяют тем же предположениям, можно считать, что $z_0 \in A$, и потому $z_0 \in A \cap \overline{D \setminus A}$. Множество $A = \Phi_f^{-1}(F)$ содержит окрестность точки z_0 относительно множества $\mathrm{Fr}(A)$, так как функция Φ_f полунепрерывна сверху в точке z_0 и F — окрестность $\Phi(z_0) = \mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $\rho(z_0, z) < \varepsilon$ и $z \in \mathrm{Fr}(A)$ следует, что $z \in A$. Пусть z_1 — точка множества $D \setminus A$ такая, что $\rho(z_0, z_1) < \varepsilon$ (в соответствии с условием $z_0 \in \overline{D \setminus A}$). Следовательно, $z_1 \notin \mathrm{Fr}(A)$, откуда $z_1 \in D \setminus \overline{A}$. Проектируем множество $\mathrm{Fr}(A)$ на ось Oy. Возможны два случая: 1) проекция $\mathrm{Fr}(A)$ на ось Oy содержит отрезок $[z_0, z_1]$; 2) эта проекция нульмерна.

В первом случае легко найти отрезок $[z_0, z_1]$, лежащий на некоторой прямой (параллельной оси Ox и пересекающей множество $\mathrm{Fr}(A)$ в точке z_0) и соединяющий точки z_0 и z_1, такой, что все его точки, кроме z_0, принадлежат $D \setminus A$, а $z_0 \in A$. Применяя обобщенную теорему Лагранжа [2] к этому отрезку (что возможно, так как функция f на прямой $y = y_0 = y_1$ ведет себя как функция одной переменной x) и пользуясь связностью $\mathfrak{m}_z^{(x)}(f)$, получаем

$$\frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0} \in \mathfrak{m}_z^{(c)}(f),$$

где c принадлежит отрезку $[x_0, x_1]$, лежащему на прямой $y = y_0$. Отсюда следует, что для точек z близких к z_0 множество $\mathfrak{m}_z^{(c)}(f)$ можно сделать сколь угодно близким к множеству $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$(в смысле обычного расстояния между множествами). Это противоречит открытости выбранного выше множества F.

Во втором случае на оси Oy рассмотрим такой интервал смежности (y', y'') к проекции множества $\mathrm{Fr}(A)$, чтобы полоса $y' < y < y''$ содержала точки $D \setminus A$. Пусть z_0 — точка множества $\mathrm{Fr}(A)$ — находится на прямой $y = y'$. Легко видеть, что перпендикуляр $z_0 z_1$ для достаточно близких z_0 и z_1 принадлежит $D \setminus A$, за исключением точки z_0. Покажем, что и в этом случае в $D \setminus A$ функция f имеет частные производные числа, сколь угодно близкие к $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$.

Рассмотрим множества $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$ и $\mathfrak{m}_{z'}^{(x_0)}$ производных чисел f соответственно в точках (x_0, y_0) и (x_0, y_1). Если они пересекаются, то утверждение очевидно. Пусть они не пересекаются и для определенности все значения $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$ меньше значений $\mathfrak{m}_{z'}^{(x_0)}(f)$; B — вещественное число такое, что

$$\tfrac{1}{h}\big(f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)\big) < B < \tfrac{1}{h}\big(f(x_0+h, y_1) - f(x_0, y_1)\big).$$

Так как функция $\frac{1}{h}\big(f(x+h, y) - f(x, y)\big)$ непрерывна при фиксированном h на отрезке $[x_0, y_1]$, то найдется такая точка $z'' = (x_0, y_2) \in D \setminus A$, что

$$\tfrac{1}{h}\big(f(x_0+h, y_2) - f(x_0, y_2)\big) = B.$$

Применяя обобщенную теорему Лагранжа к отрезку $[x_0, x_0+h]$, лежащему на прямой $y = y_2$, получаем

$$\tfrac{1}{h}\big(f(x_0+h, y_2) - f(x_0, y_2)\big) \in \mathfrak{m}_z^{(c)}(f),$$

где $c \in [x_0, x_0+h]$ на прямой $y = y_2$. Отсюда, как и в первом случае, для точек $z = (x, y)$, близких к точке $z_0 = (x_0, y_0)$, множество $\mathfrak{m}_z^{(x)}(f)$ можно сделать сколь угодно близким к множеству $\mathfrak{m}_{z_0}^{(x_0)}(f)$, что противоречит открытости выбранного множества F.

Следствие. *Если производная df/dx_n конечна для любого $x \in D$, то множество $W = \left\{(x, \xi)\colon x \in D,\ \xi = df/dx_n\right\}$ связно.*

Пусть в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$ задана непрерывная функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Для каждой точки $z \in D$ рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_z(f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{M_\varepsilon(f; z)},$$

где

$$M_\varepsilon(f; z) = \left\{\tfrac{1}{\Delta z}\big(f(z+\Delta z) - f(z)\big),\ 0 < |\Delta z| \le \varepsilon\right\},$$

которое называется множеством многогенности [3] функции f в точке z. Как в вещественном случае, легко показать, что $\mathfrak{M}_z(f)$ совпадает с множеством производных чисел (определение этих чисел — то же, что в вещественном случае) функции f в той же точке z.

Так как $M_\varepsilon(f; z)$ — непрерывный образ проколотой ε-окрестности z, то это множество связно, а потому M_ε и $\mathfrak{M}_z(f)$ являются континуумами; и наоборот, $\mathfrak{M}_z(f)$ в конкретной точке z может быть любым наперед заданным континуумом. Если функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ дифференцируема в точке z, то [3, с. 21] $\mathfrak{M}_z(f)$ — окружность (в частности, точка) с параметрическими представлениями

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{\arg z = \alpha} = f_z + f_{\bar z} e^{-2i\alpha},\ \alpha \in [0, 2\pi],$$

где

$$f_z = (\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)/2 + i\,(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/2,$$

$$f_{\bar z} = (\partial u/\partial x - \partial v/\partial y)/2 + i\,(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)/2.$$

Соответствие $z \to \mathfrak{M}_z$ определяет многозначное отображение Φ области D на некоторое множество плоскости $\mathbb{C}_\zeta$. Как указано выше, $\mathfrak{M}_z$ — связное множество в конкретной точке z. Однако [2], в общем случае для непрерывной функции $f(z)$, $z \in D \subset \mathbb{C}_z$, график многозначного отображения $\Phi_f: z \to \to \mathfrak{M}_z(f)$ в пространстве $\mathbb{C}^2(z, \zeta)$ может быть и не связен. Тем не менее, докажем следующую теорему, которая является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 3. *Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — непрерывная и $\mathbb{R}$ - дифференцируемая функция в области $D \subset \mathbb{C}_z$. Тогда*

$$W_\Phi = \{ (z, \zeta): z \in D, \zeta \in \mathfrak{M}_z(f) \}$$

— связное подмножество $\mathbb{C}^2(z, \zeta)$.

***Доказательство*.** Пусть F — открыто - замкнутое подмножество W_ϕ и $\varnothing \neq F \neq W_\phi$. Отметим, что оно состоит из целых множеств $\mathfrak{M}_z(f)$. Положим $A = \Phi_f^{-1}(F)$. Из связности D следует $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{D \setminus A} \neq \varnothing$. Так как функции f_z и $f_{\bar z}$ первого класса Бэра, то сужения $f_z / \mathrm{Fr}(A)$ и $f_{\bar z} / \mathrm{Fr}(A)$ всюду имеют множество точек непрерывности второй категории на $\mathrm{Fr}(A)$ [2]. Поэтому найдется точка z_0 их одновременной непрерывности. Поскольку F и $W \setminus F$, а следовательно, A и $D \setminus A$ удовлетворяют тем же предположениям, можно считать, что $z_0 \in A$, и потому $z_0 \in A \cap \overline{D \setminus A}$.

Множество $A = \Phi^{-1}(F)$ содержит окрестность точки z_0 относительно множества $\mathrm{Fr}(A)$, так как $\Phi / \mathrm{Fr}(A)$ непрерывна в точке z_0 и F — окрестность $\Phi(z_0) = \mathfrak{M}_{z_0}(f)$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $z \in \mathrm{Fr}(A)$ и $|z - z_0| < \varepsilon$ следует, что $z \in A$. Пусть z_1 — точка множества $D \setminus A$ такая, что $|z_1 - z_0| < \varepsilon$ (в соответствии с условием $z_0 \in \overline{D \setminus A}$). Следовательно, $z_1 \notin \notin \mathrm{Fr}(A)$, а потому $z_1 \in D \setminus \overline{A}$. Соединим точки z_0 и z_1 отрезком $[z_0, z_1]$. Выберем такой круг K с центром в точке z_1, чтобы $\overline{K} \subset D \setminus \overline{A}$. Переместим K вдоль отрезка $[z_0, z_1]$ до первой точки касания с множеством $\mathrm{Fr}(A)$. Точку касания снова обозначим через z_0.

Из $\mathbb{R}$-дифференцируемости функции f следует, что множество $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ может быть: 1) окружностью; 2) точкой.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ — окружность. Докажем, что расстояние между множествами $\bigcup_{z \in K} \mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ равно нулю, и это будет искомым противоречием.

Предположим, что это расстояние отлично от нуля. Тогда если проектировать множества $\bigcup_{z \in K} \mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ на плоскость $\mathbb{C}_\zeta$, то расстояние между их проекциями будет положительно. Заключим окружность $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ в настолько тонкое круговое кольцо T, чтобы оно не пересекалось с $\bigcup_{z \in K} \mathfrak{M}_z(f)$. Легко видеть, что при любом расположении $\bigcup_{z \in K} \mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, взяв точку $\zeta_0 \in T$ внутри окружности $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, либо вне ее, можно добиться того, чтобы для отображения ψ, осуществляемого функцией $w = f(z) - \zeta_0 z = \psi(z)$, внутри K обязательно существовали точки, знак якобиана $J_\psi(z)$ в которых противоположен знаку якобиана J_ψ в точке z_0. Так как при этом $J_\psi(z)$ внутри K

нигде не обращается в нуль, то отображение ψ является изолированным и открытым в каждой точке K, т. е. является внутренним отображением круга K. По теореме Стоилова [3] всюду в K значения $J_\psi(z)$ постоянны.

Из предыдущего следует, что можно считать $J_\psi(z)$, $z \in K$, положительными. Тогда в точке z_0 якобиан $J_\psi(z_0)$ отрицателен.

Дифференциал отображения ψ в точке z_0 — линейное отображение с отрицательным определителем. Поэтому у него есть два собственных вектора: один с положительными собственными значениями, другой — с отрицательными. Прямую, содержащую первый (второй) вектор, обозначим через l^+ (l^-). При этом указанное линейное отображение осуществляет косоугольно-зеркальное отображение относительно прямой l, при котором все прямые, параллельные l^-, переходят в себя с противоположными ориентациями.

В силу того что $J_\psi(z_0) \neq 0$, граница ∂K круга K переходит на некоторую кривую w-плоскости при отображении ψ, имеющую определенную касательную l в точке $w_0 = \psi(z_0)$. Возможны два случая: а) l совпадает с l^+; б) l не совпадает с l^+.

В случае а) выберем пару (достаточно тонких) вертикальных углов V с общей вершиной w_0 и с биссектрисой l. Если круг Δ с центром в точке w_0 достаточно мал, то только один из секторов $\Delta \setminus V$ содержит точки образа $\varphi(K)$. Обозначим его через Δ'.

В случае б) вертикальные углы V выберем столь тонкими, чтобы они не пересекались с l^+ (за исключением точки w_0), а в остальном такими же, как в случае а).

Выберем круг k_0 с центром в точке z_0 так, чтобы ψ / k_0 было изолировано, что можно сделать в силу неравенства $J_\psi(z_0) \neq 0$. Указанный выше круг Δ выберем теперь так, чтобы $\Delta \cap \psi(\partial k_0) \neq \varnothing$. Обозначим через δ компоненту прообраза $\psi^{-1}(\Delta)$, содержащую точку z_0, и $\delta' = \delta \cap K$. Область δ' может и не быть нормальной областью, т. е. ее область может не совпадать со всем кругом Δ. Но легко видеть, что $\psi(\delta')$ содержит весь Δ'. В самом деле, образ $\psi(\delta')$ содержит точки круга Δ внутри, причем часть границы $\partial\delta'$ может переходить только в границу $\partial\Delta$, так как при этом дуга $\overline{\delta} \cap \partial K$ (общая граница δ' и K) отображается внутрь углов V. Отсюда следует рассматриваемое утверждение. В Δ' рассмотрим отрезок $[w_0, w']$ радиуса r, не лежащий на l^+. Докажем, что найдется простая дуга, выходящая из точки z_0 и лежащая с концами в δ', такая, что $\psi(\sigma) = [w_0, w_1]$ и ψ / σ — гомеоморфизм.

Схема доказательства этого факта повторяет доказательство леммы Стоилова [4, с. 139] о простой дуге. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$, построим цепи (Δ_n^ν), $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2^{\nu_n}$, замкнутых кругов Δ_n^ν, покрывающих отрезок $[w_0, w']$.

Именно: цепь (Δ_1^ν), $\Delta = 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$, строим следующим образом. Берем произвольный круг $\Delta_1^0 \subset \Delta$ с центром в точке w_0 радиуса $r_0 < 1$ такой, чтобы окружность $\partial \Delta_1^0$ пересекала отрезок $[w_0, w']$ в некоторой точке w''. Отрезок $[w'', w']$ покрываем замкнутыми кругами Δ_1^ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$, так, чтобы: 1) $\Delta_1^\nu \cap V \neq \varnothing$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$; 2) $\Delta_1^\nu \subset \Delta'$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{\nu_1}$.

При $n > 1$ цепи (Δ_n^ν) строятся так же, исходя из произвольных кругов Δ_n^0

с центрами в w_0 и радиусами r_n меньше $1/n$, покрывающих соответственно отрезки $[w^{(n+1)}, w']$ с условиями 1 и 2, а также с условиями:

3) $\Delta_n^p \bigcap \Delta_n^q = \emptyset$, если $|p-q| \geq 2$, $p, (q) = 1, 2, \ldots, 2^p, (2^q)$;

4) $\Delta_{n+1}^{\nu} \subset \Delta_n^{\nu}$ если отрезок, заключенный в Δ_{n+1}^{ν}, является частью отрезка $[w_0, w']$, заключенного в Δ_n^{ν}, для любого ν и n;

5) при $n \to \infty$ радиусы $r_n \to 0$.

Каждой цепи (Δ_n^{ν}) поставим в соответствие цепи областей (δ_n^{ν}) таких, чтобы для каждого $\nu > 0$ δ_n^{ν} являлся компонентой прообраза $\psi^{-1}(\Delta_n^{\nu})$. Для этого в δ' сначала Δ_n^0 поставим в соответствие компоненту δ_n^0, содержащую точку z_0 такую, что $\psi(\delta_n^0) \subset \Delta_n^0$. Она может быть и ненормальной областью, но в ней найдется по крайней мере одна точка z_1 такая, что $\psi(z_1) = w_1$, где w_1 — точка отрезка $[w_0, w']$. Множество $\psi^{-1}(w_1)$ замкнуто и компактно в δ_n^0. Окружим каждую $z_1 = \psi^{-1}(w_1)$ кругом γ столь малого радиуса, чтобы $\psi(\gamma)$ находилось внутри Δ_n^1, что возможно, так как w_1 лежит внутри этой области и отображение ψ непрерывно. На основании леммы Бореля – Лебега можно выбрать конечное число кругов γ, покрывающих $\psi^{-1}(w_1)$. Тогда число областей (Δ_n^1, z_1) конечно. В качестве δ_n^1 возьмем любую из (Δ_n^1, z_1) и она будет нормальной, поскольку лежит в δ'.

С каждым δ_n^1 проделаем то же самое, что с δ_n^0, заменив точку z_1 точкой z_2. Таким образом получим конечное число цепей (δ_n^{ν}), каждая из которых имеет указанные выше свойства. Далее, следуя схеме доказательства леммы Стоилова, получаем последовательность цепей (δ_n^1), $(\delta_n^2), \ldots, (\delta_n^{\nu}), \ldots$, каждая из которых заключена во всех предыдущих и содержит все последующие. Множество такой последовательности суть ограниченные континуумы и пересечения σ этих континуумов есть, как известно, континуум, отличный от точки. Так как цепи (Δ_n^{ν}) стремятся к $[w_0, w']$ при $n \to \infty$, то $\psi(\sigma) \subset [w_0, w']$ и, таким образом, $\psi(\sigma) = [w_0, w']$. Докажем теперь, что ψ/σ — гомеоморфизм. Пусть z', $z'' \in \sigma$ и $z' \neq z''$ такие, что $\psi(z') = \psi(z'') = w$. В силу условия 2 две области Δ_n^p, Δ_n^q содержат точку w; если $|p-q| \leq 2$ (для одного и того же n), то области δ_n^{ν}, содержащие z' и z'', либо совпадают, либо соседние. Значит, они всегда образуют континуум c_n и множества последовательности $\{c_n\}$ вложены одно в другое точно так же, как множества последовательности $\{\delta_n^{\nu}\}$. Пересечение $\bigcap_n c_n = c$ является континуумом, так как оно должно содержать точки z' и z'', которые по предположению различны. Но $\psi(c)$ может быть лишь точкой w, так как $\psi(c_n)$ не имеют, кроме w, других общих точек. Это противоречит условию внутреннего отображения о том, что континуумы не отображаются в единственную точку. Но так как, с другой стороны, дифференциал отображения ψ — линейное отображение с отрицательным определителем, то образ части дуги σ вблизи z_0 расположен по другую сторону от l^+, а это невозможно в силу того, что ψ/σ — гомеоморфизм. Полученное противоречие доказывает теорему в случае, когда $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ — окружность.

Если же $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ является точкой, далекой от $\bigcup_{z\in K}\mathfrak{M}_z(f)$, вводим вспомогательную функцию $w = f(z) - \varepsilon\bar{z}$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ окружность $\mathfrak{M}_{z_0}(w)$ также будет далеко от $\bigcup_{z\in K}\mathfrak{M}_z(f)$, и все сводится к предыдущему.

Используя теорему 3, докажем более сильное утверждение.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — непрерывная $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в области $D \subset \mathbb{C}_z$ и z_0 — произвольная точка D. Тогда для произвольной точки $\zeta \in \mathfrak{M}_{z_0}(f)$ и произвольного угла S с вершиной в z_0 существует последовательность $\{z_n\} \to z_0$, $z_n \in S$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $\rho(\mathfrak{M}_{z_n}(f), \zeta) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Это означает, что для достаточно близких к z_0 точек имеем $\rho(\mathfrak{M}_z(f), \zeta) > 0$ при $z \in U(z_0) \cap S(z_0)$, где $U(z_0)$ — некоторая окрестность точки z_0.

Ясно, что при любом расположении $\bigcup_{z\in U\cap S}\mathfrak{M}_z(f)$ и $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$, как и выше для некоторой функции вида $w = f(z) - \zeta_0 z = \psi(z)$, можно считать, что якобиан $J_\psi(z)$ положителен внутри S и отрицателен в точке z_0. Тогда ψ осуществляет внутреннее отображение $\operatorname{Int}(S)$.

Дифференциал отображения ψ в точке z_0 — линейное отображение с двумя собственными векторами на прямых l^+ и l^-; он имеет те же свойства, что и в теореме 3.

В силу того что $J_\psi(z_0) \neq 0$, образ угла S есть некоторый криволинейный угол w-плоскости, не равный нулю, имеющий в точке $w_0 = \psi(z_0)$ две полукасательные l_1 и l_2. Возможны два случая: а) l^+ содержит один из лучей l_1, l_2; б) l^+ не содержит лучей l_1, l_2.

В случае а) выберем пару достаточно тонких углов V_1, V_2 с общей вершиной в точке w_0 и биссектрисами соответственно l_1 и l_2 так, чтобы между ними был сектор V, содержащий точки образа $\psi(S)$.

В случае б) выберем углы V_1 и V_2 столь тонкими, чтобы они не пересекались с l^+, за исключением точки w_0, а в остальном такими же как в случае а).

Далее рассмотрим произвольный отрезок $[w_0, w']$ в V, не лежащий на l^+. Легко видеть, что рассуждения из доказательства предыдущей теоремы применимы и здесь; из них следует, что этому отрезку при отображении ψ соответствует простая дуга σ, выходящая из точки z_0 и лежащая в S такая, что ψ/σ — гомеоморфизм. Но это снова, как и выше, приводит к противоречию.

Замечание. Легко видеть, что из теоремы 4 следует связность графика многозначного отображения $\Phi_f : z \to \mathfrak{M}_z(f)$.

1. *Куратовский К.* Топология: В 2 - х ч. – М.: Мир, 1969. – Ч. 2 – 624 с.
2. *Горленко С. И.* О дифференциальных свойствах некоторых вещественных функций / / Укр. мат. журн. – 1977. – 29, № 2. – С. 246 – 249.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия многогенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.
4. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964. – 226 с.

Получено 23. 08. 91