УДК 519.21

А. Я. Дороговцев, д-р. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ОЦЕНОК МНК БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ПАРАМЕТРА

Изучаются асимптотические свойства оценок бесконечномерного параметра.

Вивчаються асимптотичні властивості оцінок нескінченновимірного параметру.

Настоящая статья посвящена изучению асимптотических свойств оценок параметра нелинейной регрессии в том случае, когда параметр принадлежит подмножеству бесконечномерного пространства. В качестве оценок используются оценки метода наименьших квадратов (МНК). Оценки конечномерных параметров линейной и нелинейной регрессии являются объектом исследования многих авторов из-за широкого практического приложения таких моделей (см. [1 – 3] и имеющуюся там библиографию). Однако практический интерес представляет также и случай, когда параметр принадлежит бесконечномерному множеству. Таковы, например, задачи оценки передаточной функции или интенсивности неоднородного пуассоновского процесса. Чтобы объяснить усложнения, связанные с попыткой перенесения обычной процедуры исследования асимптотических свойств оценок конечномерного параметра на бесконечномерный случай, напомним классический подход. Этот подход, используемый для изучения асимптотических свойств как оценок метода наибольшего правдоподобия, так и оценок МНК, состоит в рассмотрении случайного функционала $Q_n(\theta)$, определенного для значений θ из параметрического множества Θ по n наблюдениям. Если предположить, что множество Θ компактно (или является объединением счетного числа компактов), а функционал Q_n с вероятностью 1 непрерывен на Θ, то оценка $\hat{\theta}_n$ определяется в случае МНК соотношением

$$\min_{\theta\in\Theta} Q_n(\theta) = Q_n(\hat{\theta}_n). \tag{1}$$

При некотором естественном дополнительном предположении о том, что средние $\mathbf{M}\,Q_n(\theta)$, $n \geq 1$, принимают различные значения параметра на Θ, оказывается, что оценка $\hat{\theta}_n$ состоятельна. Если дополнительно предположить, что неизвестное значение параметра θ_0 является внутренней точкой и функционал Q_n — достаточно гладкая функция по θ, то с учетом состоятельности получаем соотношение

$$\operatorname{grad} Q_n(\hat{\theta}_n) = 0, \tag{2}$$

которое выполняется с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. С помощью соотношения (2) получается асимптотическая нормальность. (Более подробно см. [4] для оценок метода максимального правдоподобия и [1] для оценок МНК.)

Если предполагать бесконечномерное множество компактным, а функционал $Q_n(\theta)$ непрерывным, то аналогично конечномерному случаю доказывается, что соотношение (1) определяет оценку, и эта оценка состоятельна при определенных условиях (см. [2]). Однако в бесконечномерном случае компакт не содержит внутренних точек, и потому из соотношения (1) не следует уравнение типа (2). Предпринятая при предположении компактности попытка [5, 6] относится к случаю специального выпуклого компакта в гильбертовом пространстве. Из условия выпуклости получают вместо соотношения (2) неравенство, которое затем удается использовать для получения асимптотической нормальности.

Поскольку в бесконечномерном пространстве компакты являются „бедными" множествами, то желательно рассмотреть и другие возможности. В данной статье рассматривается ситуация, в которой множество возможных значений параметра является выпуклым, замкнутым и ограниченным подмножеством сепарабельного рефлексивного банахова пространства, а функционал Q_n удовлетворяет более сильному условию непрерывности, чем непрерывность по норме. При этом для оценок МНК доказана состоятельность функционалов от оценок, асимптотическая нормальность некоторых функционалов и слабая сходимость нормированных оценок к гауссовскому распределению.

Отметим также, что мы не касались вопросов реальной вычислительной процедуры определения оценок (методы такого вычисления изложены в [7]).

1. Предположения и вспомогательные утверждения. Пусть $(H, (\cdot, \cdot))$ — действительное сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и с нулевым элементом $\overline{0}$, а Θ — выпуклое замкнутое ограниченное множество в действительном сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве $(B, |||\cdot|||)$. Далее полагаем выполненными условия:

(i). Для каждого $n \in \mathbf{N}$, функция $f_n \colon \Theta \to H$ слабо непрерывна на Θ, т.е.

$$\|f_n(\theta_m) - f_n(\theta)\| \to 0,\; m \to \infty,$$

если $\theta_m \rightharpoonup \theta,\; m \to \infty$ слабо.

Заметим, что в случае бесконечномерного пространства B условие (i) является более сильным, чем условие непрерывности функций $\{f_n\}$ на множестве Θ.

(ii). Равномерно по $(\alpha, \beta) \in \Theta^2$ существует предел

$$Q(\alpha, \beta) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (f_n(\alpha), f_n(\beta)).$$

Пусть

$$\Phi(\theta, \theta_0) := Q(\theta, \theta) - 2Q(\theta, \theta_0) + Q(\theta_0, \theta_0), \quad (\theta, \theta_0) \in \Theta^2.$$

(iii). $$\Phi(\theta, \theta_0) > 0, \quad \theta \neq \theta_0.$$

(iv). $\{\xi_n \colon n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных H-значных случайных элементов, заданных на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ и таких, что $\sigma^2 := \mathbf{M}\|\xi_1\|^2 < \infty$, $\mathbf{M}\xi_1 = \overline{0}$.

Рассматривается модель, в которой на основании наблюдений

$$y_n = f_n(\theta_0) + \xi_n,\; 1 \leq n \leq N, \tag{3}$$

оценивается неизвестный параметр θ_0.

Для элементов $y_1, y_2, \ldots, y_N$ из (3) положим

$$Q_N(\theta) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|y_n - f_n(\theta)\|^2, \quad \theta \in \Theta,\; N \geq 1. \tag{4}$$

Лемма 1. *При выполнении условия* (i) *для каждого* $N \geq 1$ *существует* B*-значный случайный элемент* $\hat{\theta}_n$, *удовлетворяющий соотношению*

$$Q_N(\hat{\theta}_N) = \min_{\theta \in \Theta} Q_N(\theta)$$

с вероятностью 1.

Доказательство. В рефлексивном банаховом пространстве замкнутые шары слабо компактны [8], а в силу теоремы Хана – Банаха замкнутое выпуклое множество Θ слабо замкнуто. Следовательно, множество Θ слабо компактно. Поэтому при условии (i) для каждого $\omega \in \Omega$ минимум в соотношении (4) достигается на некотором элементе $\hat{\theta}_N(\omega) \in \Theta$. В силу теорем об измеримом выборе [9, 10] существует случайный элемент $\hat{\theta}_N$, удовлетворяющий утверждению леммы 1.

Назовем элемент $\hat{\theta}_N$ из леммы 1 оценкой МНК для параметра θ_0, полученной на основании наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_N$, $N \geq 1$. Вообще говоря, $\hat{\theta}_N$ определяется не обязательно единственным образом, далее рассматривается какой-нибудь из них.

Пусть

$$\zeta_N(\theta) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n(\theta), \xi_n), \quad \theta \in \Theta, \ N \geq 1.$$

Лемма 2. *Предположим, что условия* (i), (ii) *и* (iv) *выполнены. Тогда*

$$\mathbf{P}\{ \lim_{N\to\infty} \max_{\theta\in\Theta} \left| \xi_N(\theta) \right| = 0\} = 1.$$

Доказательство леммы 2 приведено в [11].

2. Состоятельность.

Теорема 1. *Предположим, что условия* (i) – (iv) *выполнены. Тогда последовательность оценок* $\{\hat{\theta}_N : N \geq 1\}$ *строго состоятельна в следующем смысле*:

$$\forall\, g \in B^*: \ \mathbf{P}\{ \lim_{N\to\infty} \langle g, \hat{\theta}_N \rangle = \langle g, \theta_0 \rangle\} = 1.$$

Кроме того, для величины $\sigma_N^2 := Q_N(\hat{\theta}_N)$ *имеем*

$$\mathbf{P}\{ \lim_{N\to\infty} \sigma_N^2 = \sigma^2\} = 1.$$

Доказательство леммы 2 приведено в [11].

***Замечание* 1.** Согласно [12] вместо предположения о рефлексивности пространства B можно предполагать, что B является сопряженным к некоторому банаховому пространству.

***Замечание* 2.** В работе [11] приведен пример, который показывает, что сходимость $\| \hat{\theta}_N - \theta_0 \| \to 0$, $N \to \infty$, с вероятностью 1 не обязательна.

3. Асимптотическая нормальность. Далее предположим, что B — действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $((\cdot, \cdot))$ и соответствующей ему нормой $|||\cdot|||$. Вместо условия (iv) потребуется более сильное.

(v). $\{\xi_n : n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных H-значных случайных элементов таких, что $\mathbf{M}\| \xi_1 \|^8 < +\infty$, $\mathrm{M}\,\xi_1 = \overline{0}$.

Пусть S — корреляционный оператор элемента ξ_1.

Следующие далее условия касаются гладкости функций $\{f_n\}$ и являются заменой условий регулярности классической ситуации.

(vi). Для каждого $n \in \mathbf{N}$ функция f_n на некотором открытом множестве, содержащем множество Θ, имеет непрерывные производные Фреше f_n' и f_n''. Здесь и далее используются обычные обозначения, связанные с этими производными [13]. Предположим, что

$$C_1^2 := \sup_{N\geq 1} \max_{(\theta,\theta')\subset\Theta} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| f_n(\theta) - f_n(\theta')\|^2 < +\infty,$$

и существуют положительный $V_1 \in \mathfrak{L}(B)$ и неотрицательный $V_2 \in \mathfrak{L}(B)$ операторы, для которых, начиная с некоторого N, справедливы соотношения

1) $\forall\theta \in \Theta\ \forall\eta \in B:\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \| f_n'(\theta)\cdot\eta\|^2 \geq ((V_1\eta, \eta))$;

2) $\forall\theta \in \Theta\ \forall\eta \in B:\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \| f_n''(\theta)\cdot(\eta, \eta)\|^2 \leq ((V_2\eta, \eta))$;

3) для некоторого числа a_1, удовлетворяющего неравенству $a_1 > \sqrt{2(C_1^2+\sigma^2)}$, оператор $V_1 - a_1 V_2$ положительно определен.

Пусть a —такое число, что $a_1 > a > \sqrt{2(C_1^2+\sigma^2)}$, и $V := V_1 - a V_2$ — положительный оператор. Далее оператор V фиксирован.

4) $C_2^2 := \sup\limits_{N\geq 1}\sup\limits_{\theta\in\Theta} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \left\| f_n'(\theta)V^{-1/2}\right\|^2 < +\infty.$

Заметим, что требование 1) в случае бесконечномерного пространства B может быть выполнено только тогда, когда H бесконечномерно.

(vii). Для каждой точки $\theta\in\Theta$ существует положительный оператор $W(\theta) \in \mathfrak{L}(B)$, к которому сходятся операторы

$$W_N(\theta) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n'^{*}(\theta) f_n'(\theta), \quad N \geq 1,$$

из $\mathfrak{L}(B)$ в таком смысле:

$$\Delta_N := \sup_{\theta\in\Theta} ||| V^{-1/2}(W_N(\theta) - W(\theta)) ||| \to 0, \quad N\to\infty.$$

Для каждой внутренней точки θ множества Θ операторы

$$T_N(\theta) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n'^{*}(\theta) S f_n'(\theta), \quad N \geq 1,$$

сходятся к некоторому положительному оператору $T(\theta)$ в следующем смысле: для любого элемента $\eta\in B$ при $N\to\infty$

$$((T_N(\theta)\eta, \eta)) \to ((T(\theta)\eta, \eta)).$$

(viii). Для некоторого $\delta > 0$

$$C_3 := \sup_{N\geq 1}\sup_{\theta\in\Theta} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| f_n'(\theta)\|^{2+\delta} < +\infty,$$

$$C_4^2 := \sup_{N\geq 1}\sup_{\theta\in\Theta} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\| V^{-1/2} f_n''(\theta) V^{-1/2}\right\|^{2+\delta} < +\infty.$$

Заметим, что нормы в определениях величин C_2^2, C_3 и C_4^2 есть соответственно нормы операторов и трехлинейной формы.

Теорема 2. *Предположим, что условия* (i) – (iii), (v) – (viii) *выполнены, точка* θ_0 — *внутренняя точка множества* Θ *и* $\eta\in B$ — *произвольный эле-*

мент с $|||\eta||| \neq 0$. *Тогда распределение случайной величины* $\sqrt{N}((\eta, W(\theta_0)(\hat{\theta}_N - \theta_0)))$ *слабо сходится при* $N \to \infty$ *к гауссовскому распределению со средним* 0 *и дисперсией* $((T(\theta_0)\eta, \eta))$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1, *и, кроме того, оператор* $V^{1/2}$ *и для всякой внутренней точки* θ *множества* Θ *оператор*

$$R(\theta) := VW(\theta)^{-1} T(\theta) W(\theta)^{-1} V$$

являются ядерными. Тогда распределение случайного элемента в B $\sqrt{N}\, V(\hat{\theta}_N - \theta_0)$ *слабо сходится при* $N \to \infty$ *к гауссовскому распределению в* B *с нулевым средним и корреляционным оператором* $R(\theta_0)$.

В основе доказательства теорем 2 и 3 лежит следующий факт, представляющий и самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Предположим, что условия* (i) – (iii), (v) – (vii) *выполнены и* $\hat{\theta}_N$ *— оценка МНК для параметра* θ_0. *Тогда*

$$\sup_{N \geq 1} \mathbf{M}\ |||\sqrt{N}\ V^{1/2}(\hat{\theta}_N - \theta_0)|||^2 < \infty.$$

Доказательство леммы. Из соотношения (4) и выпуклости множества Θ с вероятностью 1

$$Q_N'(\hat{\theta}_N)\cdot(\theta_0 - \hat{\theta}_N) \geq 0. \qquad (5)$$

С помощью формулы Тейлора из неравенства (5) получаем

$$Q_N'(\theta_0)\cdot(\hat{\theta}_N - \theta_0) + \int_0^1 Q_N''(\theta_0 + t(\hat{\theta}_N - \theta_0))\cdot(\hat{\theta}_N - \theta_0, \hat{\theta}_N - \theta_0)\, dt \leq 0. \qquad (6)$$

Поскольку

$$Q_N'(\theta_0)\cdot\eta = -\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}(\xi_n, f_n'(\theta_0)\cdot\eta),$$

$$Q_N''(\theta)\cdot(\eta,\eta) = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\|f_n'(\theta)\cdot\eta\|^2 - \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n - f_n(\theta), f_n''(\theta)\cdot(\eta,\eta)),\ \eta \in B,$$

то, положив

$$\eta_N := \sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta_0), \quad \theta_N(t) := \theta_0 + t(\hat{\theta}_N - \theta_0),$$

из неравенства (6) будем иметь

$$\frac{1}{N}\int_0^1 \sum_{n=1}^{N}\|f_n'(\theta_N(t))\cdot\eta_N\|^2\, dt \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}(\xi_n, f_n'(\theta_0)\cdot\eta_N) +$$
$$+ \frac{1}{N}\int_0^1 \sum_{n=1}^{N}(y_n - f_n(\theta_N(t)), f_n''(\theta_N(t))\cdot(\eta_N, \eta_N))\, dt.$$

Использовав теперь условие (vi) и неравенство Коши, получим, что с вероятностью 1

$$((V_1\eta_N, \eta_N)) \leq ((\zeta_N, \eta_N)) + \alpha_N((V_2\eta_N, \eta_N)), \qquad (7)$$

где

$$\zeta_N := \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}(\xi_n, f_n'(\theta_0))$$

— случайный элемент в B, а

$$\alpha_N := \left(2C_2^1 + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} \| \xi_N \|^2 \right)^{1/2}$$

— действительная случайная величина. Перейдем теперь в неравенстве (7) к математическим ожиданиям

$$\mathbf{M}((V_1\eta_N, \eta_N)) \le \left(\mathbf{M} ||| V^{-1/2}\zeta_N |||^2 \mathbf{M} ||| V^{1/2}\eta_N |||^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \mathbf{M}(\alpha_N((V_2\eta_N, \eta_N)) \mathbf{1}_{(\alpha_N < a)}) + \mathbf{M}(\alpha_N((V_2\eta_N, \eta_N)) \mathbf{1}_{(\alpha_N \ge a)}). \quad (8)$$

В силу условий (v) и (vi) имеем

$$\mathbf{M} ||| V^{-1/2}\zeta_N |||^2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{M} ||| (\xi_n, f_n'(\theta_0)V^{-1/2}) |||^2 \le C_2^2 \sigma^2, \quad (9)$$

а согласно условию (vi) с вероятностью 1

$$((V_2\eta_N, \eta_N)) = N((V_2(\hat\theta_N - \theta_0), \hat\theta_N - \theta_0)) \le 4 C_5^2 N, \quad (10)$$

где $C_5 := \sup_{\theta\in\Theta} ||| V_2^{1/2} \theta ||| < +\infty$. Кроме того,

$$\mathbf{P}(\alpha_N \ge a) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\| \xi_n \|^2 - \sigma^2 \right) \ge \varepsilon \right) \le \varepsilon^{-4} \mathbf{M} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\| \xi_n \|^2 - \sigma^2 \right) \right)^4 =$$

$$= 3N^{-2}\varepsilon^{-4}\mathbf{M}\left(\| \xi_1 \|^2 - \sigma^2\right)^2 + N^{-3}\varepsilon^{-4}\mathbf{M}\left(\left(\| \xi_1 \|^2 - \sigma^2\right)^4 - 3\mathbf{M}\left(\| \xi_1 \|^2 - \sigma^2\right)^2 \right), \quad (11)$$

где $\varepsilon := a^2/2 - C_1^2 - \sigma^2 > 0$ согласно условию (vi). С учетом неравенств (9) – – (11) из (8) находим

$$\mathbf{M}((V_1\eta_N, \eta_N)) \le C_2 \sigma (\mathbf{M} ||| V^{1/2}\eta_N |||^2)^{1/2} + a\mathbf{M}((V_2\eta_N, \eta_N)) +$$

$$+ 4 C_5^2 N (\mathbf{M} \alpha_N^2 P(\alpha_N \ge a))^{1/2},$$

следовательно,

$$\mathbf{M}((V\eta_N, \eta_N)) \le C_2 \sigma (\mathbf{M} ||| V^{1/2}\eta_N |||^2)^{1/2} + C,$$

где

$$C := 4 C_5^2 \varepsilon^{-2} \sqrt{2(C_1^2 + \sigma^2)} (\mathbf{M}(\| \xi_1 \|^2 - \sigma^2)^4 + 6\mathbf{M}(\| \xi_1 \|^2 - \sigma^2)^2)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\mathbf{M} ||| V^{1/2}\eta_N |||^2 \le 2C + C_2^2\sigma, \ N \ge 1.$$

Лемма 3 доказана.

Следствие. *При условиях леммы 3 для любого элемента* $\eta \in V^{1/2}B$

$$\mathbf{M} |((\eta, \hat\theta_N - \theta_0))| \le C_6/\sqrt{N}, \ N \ge 1,$$

где $C_6 := ||| V^{-1/2}\eta ||| \sqrt{2C + C_2^2\sigma^2}$.

Доказательство теоремы 2. Поскольку θ_0 — внутренняя точка множества Θ, то для всех ε с достаточно малым $|\varepsilon|$ элемент $\theta_0 - \varepsilon\eta$ принадлежит Θ. Отсюда с учетом определения оценки $\hat\theta_N$ и выпуклости множества Θ имеем неравенство

$$Q_N'(\hat\theta_N) \cdot (\theta_0 - \varepsilon\eta - \hat\theta_N) \ge 0.$$

Поэтому

$$Q_N'(\theta_0)\cdot(\hat\theta_N-\theta_0+\varepsilon\eta)+\int_0^1 Q_N''(\hat\theta_N(t))\cdot(\hat\theta_N-\theta_0+\varepsilon\eta,\ \hat\theta_N-\theta_0)\,dt\le 0,$$

где

$$\hat\theta_N(t):=\theta_0+t\,(\hat\theta_N-\theta_0),\quad t\in[0,1].$$

Отсюда следует

$$\varepsilon\,((W(\theta_0)\eta,\ \hat\theta_N-\theta_0))+(\varepsilon/2)\,Q_N'(\theta_0)\cdot\eta\le I_N^1+I_N^2+I_N^3,$$

где

$$I_N^1:=-(1/2)\,Q_N'(\theta_0)\cdot(\hat\theta_N-\theta_0),$$

$$I_N^2:=(1/2)\int_0^1 Q_N''(\hat\theta_N(t))\cdot(\hat\theta_N-\theta_0,\ \hat\theta_N-\theta_0)\,dt,$$

$$I_N^3:=\int_0^1(((1/2)Q_N''(\hat\theta_N(t))-W(\theta_0))\eta,\ \hat\theta_N-\theta_0))\,dt.$$

Таким образом, поскольку знак ε может быть произвольным,

$$|((W(\theta_0)\eta,\eta_N))+(1/2)\sqrt N\,Q_N'(\theta_0)\cdot\eta|\le$$

$$\le(1/|\varepsilon|)\sqrt N\,(|I_N^1|+|I_N^2|+|I_N^3|),\tag{12}$$

при этом считаем, что $|\varepsilon|\le 1$. Далее число ε фиксировано.

Рассмотрим сначала предельное поведение величины

$$-(1/2)\sqrt N\,Q_N'(\theta_0)\cdot\eta=(1/\sqrt N)\sum_{n=1}^N\big(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\cdot\eta\big),\tag{13}$$

в которой составляющие ее случайные величины $\big(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\cdot\eta\big)$, $n\ge 1$, независимы, и для каждого $n\ge 1$

$$\mathbf M\big(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\cdot\eta\big)=0,$$

$$\mathbf M\big(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\cdot\eta\big)^2=\Big(\Big(f_n'^{*}(\theta_0)\,S f_n'(\theta_0)\eta,\eta\Big)\Big).$$

Условия (v) – (viii) позволяют применить к правой части (13) центральную предельную теорему при условии Ляпунова. Таким образом, распределение величины $-(1/2)\sqrt N\,Q_N'(\theta_0)\cdot\eta$ слабо сходится при $N\to\infty$ к гауссовскому распределению со средним 0 и дисперсией $((T(\theta_0)\eta,\eta))$.

Докажем теперь, что правая часть неравенства (12) сходится к 0 по вероятности при $N\to\infty$. Имеем

$$\mathbf M(\sqrt N\,|I_N^1|)=(1/2)\,\mathbf M\,|\,(1/N)\sum_{n=1}^N\big(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\cdot\eta_N\big)\,|\le$$

$$\le(1/2)\,\mathbf M\,(\|\,(1/N)\sum_{n=1}^N\big(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\ V^{-1/2}\big)\|\ |||\,V^{1/2}\eta_N\,|||)\le$$

$$\le(1/2)\,(\mathbf M\,\|\,(1/N)\sum_{n=1}^N(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\ V^{-1/2}\|^2\,\mathbf M\,|||\,V^{1/2}\eta_N\,|||^2)^{1/2}=$$

$$=(1/2\sqrt N)\big(\mathbf M\,|||\,V^{1/2}\eta_N\,|||^2\big)^{1/2}((1/N)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^N\mathbf M\,\|\,(\xi_n,\ f_n'(\theta_0)\ V^{-1/2})\|^2)^{1/2}\le C/\sqrt N$$

с некоторым не зависящим от N числом C. При этом использована лемма и условие (vi). Следовательно, $\sqrt N\,|I_N^1|\to 0$, $N\to\infty$ по вероятности.

Перейдем теперь к оценке величины $\sqrt N\,I_N^2$. Сначала с помощью условия (vi) получаем, что с вероятностью 1 для всех N, начиная с некоторого,

$$\sqrt{N}\,|I_N^2| \le N^{-3/2}\int_0^1 \sum_{n=1}^N \| f_n'(\theta_N(t))\cdot\eta_N\|^2\,dt\ +$$

$$+\ N^{-3/2}\left|\int_0^1 \sum_{n=1}^N \left(y_n - f_n(\theta_N(t)),\ f_n''(\theta_N(t))\cdot(\eta_N,\eta_N)\right)dt\right| \le \frac{C_2}{\sqrt{N}}|||\,V^{1/2}\eta_N|||^2 +$$

$$+\ \sqrt{\frac{2}{N}}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \|\,\xi_N\|^2 + C_1^2\right)^{1/2}((V_2\eta_N,\eta_N)).$$

Отсюда с учетом леммы 3 и условия (vi) следует сходимость по вероятности $\sqrt{N}\ I_N^2 \to 0,\ N\to\infty$. Заметим теперь, что с вероятностью 1

$$\sqrt{N}\,|I_N^3| \le \int_0^1 \left|\left(\left(V^{-1/2}(W_N(\theta_N(t)) - W(\theta_0))\eta,\ V^{1/2}\eta_N\right)\right)\right| dt\ +$$

$$+\ \frac{1}{N}\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^N \left(y_n - f_n(\theta_N(t)),\ f_n''(\theta_N(t))\cdot(\eta,\eta_N)\right)\right| dt. \tag{14}$$

Для оценки правой части (14) сначала имеем

$$|||\,V^{-1/2}(W_N(\theta_N(t)) - W(\theta_0))||| \le \Delta_N + |||\,V^{-1/2}(W_N(\theta_N(t)) - W_N(\theta_0))|||\,,$$

откуда, как и выше, с использованием условий теоремы 1 получаем неравенство

$$|||\,V^{-1/2}(W_N(\theta_N(t)) - W(\theta_0))||| \le$$

$$\le 2N^{-1/2}C_2C_4\,|||\,\eta\,|||\cdot|||\,V^{1/2}|||\cdot|||\,V^{1/2}\eta_N|||^2. \tag{15}$$

Аналогично находим

$$\frac{1}{N}\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^N \left(y_n - f_n(\theta_N(t)),\ f_n''(\theta_N(t))\cdot(\eta,\eta_N)\right)\right| dt\ \le$$

$$\le\ \frac{C_4}{\sqrt{N}}\,|||\,V^{1/2}|||\cdot|||\,\eta\,|||\cdot|||\,V^{1/2}\eta_N|||\,\sqrt{2C_1^2 + 2N^{-1}\sum_{n=1}^N \|\xi_n\|^2}\,. \tag{16}$$

Из соотношений (15) и (16) следует, что правая часть неравенства (14) сходится к 0 по вероятности при $N\to\infty$. Таким образом, правая часть неравенства (12) сходится к 0 по вероятности, и теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Воспользуемся теоремой Акосты [14, 15]. Требуемая сходимость на функционалах содержится в теореме 2. Пусть P_m — оператор ортогонального проектирования в B на линейную оболочку первых m векторов базиса, составленного из собственных векторов оператора V. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathbf{P}\,(|||\,V\eta_N - P_mV\eta_N||| \ge \varepsilon) \le \varepsilon^{-1}|||\,V^{1/2} - P_mV^{1/2}|||\ \mathbf{M}|||\,V^{1/2}\eta_N|||\ \le$$

$$\le \varepsilon^{-1}\,(\mathbf{M}|||\,V^{1/2}\eta_N|||^2)^{1/2}\,\mathrm{tr}\,(V^{1/2} - P_mV^{1/2}).$$

Отсюда следует плоская концентрированность допредельных распределений. Теорема 3 доказана.

4. Примеры. Пусть $L_2\,([0,2\pi])$ — пространство действительных интегрируемых с квадратом на отрезке $[0, 2\pi]$ относительно меры Лебега функций с обычным скалярным произведением. Пусть $\Phi \subset \mathbf{C}(\mathbb{R})$ — множество всех периодических с периодом 2π функций таких, что $\forall\ a \in \Phi : a_k \neq 0,\ k \geq 1;\ \sum_{k=1}^{\infty} | a_k | <$ $< +\infty$. Здесь $\{a_k : k \geq 1\}$ — действительные коэффициенты Фурье функции a.

Пусть также Θ — некоторый заданный замкнутый шар в $L_2([0, 2\pi])$ и функция $\theta_0 \in \Theta$, причем θ_0 — внутреняя точка Θ. Пусть $\{\xi_n(t), t \in [0, 2\pi] : n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных и непрерывных в среднем квадратичном случайных процессов таких, что

$$\mathbf{M}\,\xi_1(t) = 0,\ t \in [0, 2\pi];\ \int_0^{2\pi} \mathbf{M} \,|\, \xi_1(t)\,|^{2+\delta}\, dt < \infty$$

с некоторым $\delta > 0$. Одинаковая распределенность означает, что меры распределения процессов $\{\xi_n(t);\ t \in [0, 2\pi]\},\ n \geq 1$, определенные на σ-алгебре борелевских множеств в $L_2([0, 2\pi])$, не зависят от n. Для одинаковой распределенности процессов достаточно, чтобы все конечномерные распределения процессов не зависели от n.

Пример 1. Оценка сигнала по наблюдениям на выходе линейного преобразователя. Имеется приемное устройство, характеризуемое фиксированной функцией $a \in \Phi$ и преобразующее полученный неизвестный сигнал θ_0 в функцию

$$\int_0^{2\pi} a(t-s)\,\theta_0(s)\,ds,\ t \in [0, 2\pi]. \tag{17}$$

При этом функция (17) наблюдается со случайными ошибками, а наблюдения можно повторять. При данных предположениях речь идет об оценке θ_0 на основании наблюдений

$$y_n(t) = \int_0^{2\pi} a(t-s)\,\theta_0(s)\,ds + \xi_n(t),\ t \in [0, 2\pi],\ 1 \leq n \leq N. \tag{18}$$

Оценка МНК в этих условиях является естественной. Чтобы применить полученные выше результаты к данной ситуации, каждой функции $\varphi \in L_2([0, 2\pi])$ сопоставим упорядоченный каким-либо одинаковым для всех функций способом набор ее действительных коэффициентов Фурье $\tilde{\varphi} = \{\varphi_k : k \geq 1\} \in l_2$. Это соответствие есть изоморфизм между $L_2([0, 2\pi])$ и l_2. Пусть $\tilde{\Theta}$ — образ шара Θ. В l_2 наблюдения (18) имеют простой вид $\tilde{y}_n = A\tilde{\theta}_0 + \tilde{\xi}_n,\ 1 \leq n \leq N$, где A — линейный оператор на l_2, который элементу $\tilde{\theta} = \{\theta_k; k \geq 1\}$ ставит в соответствие элемент $A\tilde{\theta} =$ $= \{a_k\theta_k : k \geq 1\}$.

Легко проверить, что все условия теорем 2 и 3 выполнены, причем независимо от $\tilde{\theta}$

$$W = V = V_1 = A^*A = A^2,\ V_2 = 0.$$

Кроме того, как следует из доказательства теоремы 2, из-за линейности функций $f_n;\ n \geq 1$, по θ условие о существовании восьмого момента в (v)излишне. Пусть $\hat{\theta}_N$ — оценка МНК для θ_0 и $\partial_N \in l_2$ — ее коэффициенты Фурье. Согласно теореме 2 для любой функции $\varphi \in L_2([0, 2\pi])$, коэффициенты Фурье которой $\tilde{\varphi} = \{\varphi_k : k \geq 1\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-4}\varphi_k^2 < +\infty$, распределение случайной величины

$$\sqrt{N}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\left(\hat{\theta}_N(t) - \theta_0(t)\right) dt$$

слабо сходится при $N \to \infty$ к нормальному распределению со средним 0 и дисперсией

$$((SA\,|A|^{-2}\,\tilde{\varphi},\ A\,|A|^{-2}\,\tilde{\varphi})),$$

где S — корреляционный оператор $\tilde{\xi}_1$. Отсюда получаем также описание предельного поведения коэффициентов оценки. Аналогичным образом можно использовать теорему 3. Из леммы 3 следует

$$\sup_{N \geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\left(\sqrt{N}\,|\,a_k\,|\,(\hat{\theta}_{Nk} - \theta_{0k})\right)^2 < +\infty$$

Пример 2. Оценка передаточной функции преобразователя по наблюдениям — откликам на пробные сигналы. Приемное устройство описывается неизвестной передаточной функцией θ_0. При этом можно получить с ошибками отклик на пробную функцию a. Процедура получения отклика может быть повторена. При этих предположениях приходим к задаче оценки θ_0 на основании наблюдений

$$y_n(t) = \int_0^{2\pi} a_n(t-s)\,\theta_0(s)\,ds + \xi_n(t),\; t \in [0, 2\pi],\; 1 \le n \le N, \tag{19}$$

которые можно представить в более привычной форме

$$y_n(t) = \int_0^{2\pi} \theta_0(t-s)\,a_n(s)\,ds + \xi_n(t),\; t \in [0, 2\pi],\; 1 \le n \le N,$$

продолжив θ_0 периодическим образом. Анализ модели (19) аналогичен рассмотренному в примере 1.

1. *Jennrich R. I.* Asymptotic properties of non-linear squares estimators // Ann. Math. Statist.– 1969.– **98**, № 2.
2. *Дороговцев А. Я.* Теория оценок параметров случайных процессов.– Киев: Выща шк., 1982.– 192 с.
3. *Lauter H.* Note on the strong consistency of the least squares estimator in nonlinear regression // Statistics.–1989.– **20**, №2.– P. 199 – 210.
4. *Крамер Г.* Математические методы статистики.– М: Мир, 1975.– 648 с.
5. Dorogovtsev A.Ya., Zerek N., Kukush A. G. Asymptotic properties of nonlinear regression estimators in Hilbert space // Theor. Probab. and Math. Statist.–1987.–№ 35. – P. 37 – 44 (English transl., AMS, 1987).
6. *Dorogovtsev A.Ya., Zerek N., Kukush A. G.* Weak convergence of an infinite-dimensional parameter to a normal distribution // Ibid.–1988.–№ 37. – P. 45 – 51 (English transl., AMS, 1988).
7. *Aubin J.-P., Ekeland I.* Applied nonlinear analysis. – New York: Wiley, 1984.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 272 с.
9. *Аркин А. И., Евстигнеев И. В.* Вероятностные модели контроля и экономической динамики. – М.: Наука, 1979. – 202 с.
10. *Гильденбранд В.* Ядро и равновесие в большой экономике. – М.: Наука, 1986. – 200 с.
11. *Дороговцев А. Я.* Состоятельность оценки МНК бесконечномерного параметра // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 4. – С. 65 – 69.
12. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
13. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
14. *Araujo A., Gine E.* The central limit theorem for real and Banach valued random variables. – New York: Wiley, 1980. – 234 p.
15. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.

Получено 22. 06. 92