УДК 512.57

О. В. Юревич (Вінниц. пед. ун-т)

КРИТЕРІЇ ОБОРОТНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ В АСОЦІАТАХ

We continue the study of invertible elements in associates, i.e., in $(n+1)$-ary groupoids which are (i, j)-associative for all $i \equiv j \pmod{s}$, where s is a divisor of a number n. For $s = 1$, an arbitrary associate is a semigroup. We establish two new criteria of element invertibility generalizing the previous results and formulate corollaries for $(n+1)$-groups and polyagroups, i.e., quasigroup associates.

Продовжується вивчення оборотних елементів в асоціатах, тобто в $(n+1)$-арних групоїдах, які є (i, j)-асоціативними для всіх $i \equiv j \pmod{s}$, де s — дільник числа n. При $s = 1$ довільний асоціат є напівгрупою. Встановлено два нових критерії оборотності елементів, чим узагальнено раніше одержані результати, наведено наслідки для $(n+1)$-груп і поліагруп, тобто квазігрупових асоціатів.

Вступ. Інтерес до вивчення алгебр з однією n-арною операцією, яка має властивість, що узагальнює асоціативність бінарних операцій, виникав і виникає в багатьох науковців, серед яких можна назвати А. Л. Сушкевича [1], Поста [2], Л. М. Глускіна [3], В. Д. Бєлоусова [4], С. А. Русакова [5].

У працях Л. М. Глускіна та його учнів вивчались $n\pi$-оперативи, які узагальнюють поняття групи і купи одночасно; в працях В. Д. Бєлоусова, С. А. Русакова та їхніх учнів — n-арні групи та (i, j)-асоціативні квазігрупи. Виявилось, що вивчення і $n\pi$-оперативів і (i, j)-асоціативних групоїдів з оборотними елементами зводиться до вивчення асоціатів.

Нагадаємо, що визначальна властивість асоціативності як бінарних, так і n-арних операцій одна і та ж: *результат дворазового застосування операції до однієї і тієї ж послідовності елементів не залежить від розташування дужок.* Проте, на відміну від бінарного випадку, асоціативність операцій арності більшої за два визначається не однією тотожністю, а всіма тотожностями (i, j)-асоціативності, кожна з яких стверджує, що результат не зміниться, якщо дужки пересувати з i-го місця на j-те. Залежність між тотожностями (i, j)-асоціативності вивчалась багатьма авторами.

Зокрема, Ф. М. Сохацький [6] встановив залежність між тотожностями (i, j)-асоціативності при різних параметрах i, j у випадку існування оборотного елемента і довів, що в цьому випадку операцію можна подати як композицію асоціативної операції, її автоморфізму і деякого зсуву. Звідси випливає, що вивчення таких групоїдів зводиться до вивчення асоціатів. Асоціати, в яких кожний елемент є оборотним, називаються поліагрупою. Вивчення поліагруп проводилось в [7]. У роботі [8] описано правила розташування дужок при багатократному застосуванні операції.

У роботі [9] доведено, що для оборотності елемента досить, щоб він був початково і кінцево оборотним, а в цій праці встановлено, що досить внутрішньої оборотності. Встановлено також ряд інших критеріїв на мові тотожностей.

1. Допоміжні твердження. Нагадаємо означення з [7], якими ми будемо користуватися.

Асоціатом сорту (s, n), де s є дільником числа n, називається групоїд (Q, f) арності $n+1$, в якому для всіх i, j таких, що $i \equiv j \pmod{s}$, виконується тотожність

$$f\big(x_0, \dots, x_{i-1}, f\big(x_i, \dots, x_{i+n}\big), x_{i+n+1}, \dots, x_{2n}\big) =$$
$$= f\big(x_0, \dots, x_{j-1}, f\big(x_j, \dots, x_{j+n}\big), x_{j+n+1}, \dots, x_{2n}\big).$$

Слово ω деякої сигнатури називається *безповторним*, якщо кожна предметна змінна входить в його запис не більше одного разу. Якщо в запис безповторних слів ω_1, ω_2 входять одні й ті ж предметні змінні, то формула $\omega_1 = \omega_2$ називається *врівноваженою*, а якщо ж і послідовності предметних змінних в цих словах однакові, то кажуть, що вона є тотожністю першого роду.

Для запису врівноважених формул першого роду користуються такою композицією [4]:

$$\left(f \overset{i}{+} g\right)\left(x_0, \ldots, x_{n+m}\right) = f\left(x_0, \ldots, x_{i-1}, g\left(x_i, \ldots, x_{i+m}\right), x_{i+m+1}, \ldots, x_{n+m}\right). \quad (1)$$

Надалі будемо опускати ліве розташування дужок, тобто вираз

$$f \overset{i_1}{+} f_1 \overset{i_2}{+} f_2 \overset{i_3}{+} \ldots \overset{i_n}{+} f_n, \quad i_1 \le i_2 \le i_3 \le \ldots \le i_n,$$

означатиме запис вигляду

$$\left(\ldots\left(\left(f \overset{i_1}{+} f_1\right) \overset{i_2}{+} f_2\right) \overset{i_3}{+} \ldots\right) \overset{i_n}{+} f_n.$$

Зауважимо, що при цьому число i_m збігається з кількістю предметних змінних в слові ω, які розташовані ліворуч від функціонального символу f_m, $m = 1, 2, \ldots, n$, і називається *координатою символу* f_m в слові ω.

Правило пересування дужок в асоціаті сформульовано в такій теоремі.

Теорема 1 ([8], теорема 3). *Нехай* $(Q; f)$ — *асоціат сорту* (s, n). *Тоді врівноважена формула першого роду* $\omega_1 = \omega_2$ *є тотожністю в цьому групоїді, якщо між входженнями символу* f *в слова* ω_1 *та* ω_2 *можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій відповідні координати конгруентні за модулем* s.

Перетворення $\lambda_{i,a}(x)$ множини Q, яке задається рівністю

$$\lambda_{i,a}(x) := f\left(\overset{i}{a}, x, \overset{n-i}{a}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

називається i-м зсувом групоїда $(Q; f)$, що визначається елементом a. Тут і надалі запис $\overset{i}{a}$ позначає $a, \ldots, a$ (i разів).

Елемент $a \in Q$ називається:

1) *i-оборотним*, якщо ним визначений i-й зсув є підстановкою множини Q, $i \in \{0, \ldots, n\}$; 2) *внутрішньо оборотним*, якщо він є i-оборотним для деякого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$; 3) *початково (кінцево) оборотним*, якщо він є 0-оборотним (n-оборотним); 4) *оборотним*, якщо він є i-оборотним для всіх $i \in \{0, \ldots, n\}$.

У групоїді $(Q; f)$ *i-й косий* до елемента a позначається через $\overline{a}^i$ та визначається рівністю

$$f\left(\overset{i}{a}, \overline{a}^i, \overset{n-i}{a}\right) = a. \qquad (3)$$

Очевидно, що коли елемент a багатомісного групоїда є i-оборотним, то i-й косий єдиний і збігається з $\lambda_{i,a}^{-1}(a)$.

При доведенні нових критеріїв оборотності елемента в асоціатах будемо користуватися такими теоремами.

Теорема 2 ([6], теорема 5). *Елемент* $a \in Q$ *є оборотним в асоціаті* $(Q; f)$ *сорту* (s, n) *тоді і тільки тоді, коли існують елементи* $\overline{a}$, $\tilde{a} \in Q$ *такі, що рівності*

$$f\left(\overline{a}, \overset{n-1}{a}, x\right) = x, \qquad f\left(x, \overset{n-1}{a}, \tilde{a}\right) = x \qquad (4)$$

мають місце для всіх x *з* Q.

Теорема 3 ([6], теорема 4). *Нехай* $(Q; f)$ *є довільним асоціатом сорту* (s, n) *і* $s < n$. *Тоді для будь-якого оборотного елемента* $a \in Q$ *існує єдина трійка операцій* $(\cdot, \varphi, b)$ *арності* 2, 1, 0 *відповідно таких, що* $(Q; \cdot)$ *є моноїдом з нейтральним елементом* a, *оборотним елементом* b, *автоморфізмом* φ, *і виконуються такі умови:*

$$\varphi^n(x)\cdot b = b\cdot x, \quad \varphi^s(x) = b, \tag{5}$$

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0\cdot\varphi(x_1)\cdot\varphi^2(x_2)\cdot\ldots\cdot\varphi^n(x_n)\cdot b. \tag{6}$$

І навпаки, якщо ендоморфізм φ *і елемент* a *напівгрупи* $(Q; \cdot)$ *пов'язані залежностями* (5), *то визначений рівністю* (6) *групоїд* $(Q; f)$ *є асоціатом сорту* (s, n). *До того ж*

$$b^{-1} = \overline{a}, \tag{7}$$

де $\overline{a}$ *є нульовим косим до елемента* a.

2. Перший критерій оборотності. Для доведення основної теореми встановимо такі леми.

Лема 1. *Нехай* $(Q; f)$ *є асоціатом сорту* (s, n) *і* $a \in Q$. *Якщо для деяких* $\hat{a}$, $\check{a}$ *з* Q *та* $i, j \in \{s, \ldots, n-1\}$ *виконуються рівності*

$$f\Big(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, x\Big) = x, \tag{8}$$

$$f\Big(x, \overset{n-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\Big) = x \tag{9}$$

для всіх $x \in Q$, *то існують елементи* $\mathring{a}$, $\bar{\bar{a}}$ *з* Q *такі, що мають місце співвідношення*

$$f\Big(\overset{i-s}{a}, \mathring{a}, \overset{n-(i-s)-1}{a}, x\Big) = x, \tag{10}$$

$$f\Big(x, \overset{n-(j-s)-1}{a}, \bar{\bar{a}}, \overset{j-s}{a}\Big) = x. \tag{11}$$

Доведення. Нехай виконуються умови леми. Визначимо елементи $\mathring{a}$, $\bar{\bar{a}}$ з Q рівностями

$$\mathring{a} := f\Big(\overset{s}{a}, \hat{a}, \overset{n-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j-s}{a}\Big), \quad \bar{\bar{a}} := f\Big(\overset{i-s}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \check{a}, \overset{s}{a}\Big). \tag{12}$$

Операція f в обох випадках визначена, оскільки $n-j-1 \geq 0$, $j-s \geq 0$, $i-s \geq 0$, тому що за умовою леми $i, j \in \{s, \ldots, n-1\}$. Тепер доведемо співвідношення (10) та (11):

$$f\Big(\overset{i-s}{a}, \mathring{a}, \overset{n-(i-s)-1}{a}, x\Big) \overset{(12)}{=} f\Big(\overset{i-s}{a}, f\Big(\overset{s}{a}, \hat{a}, \overset{n-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j-s}{a}\Big), \overset{s+n-i-1}{a}, x\Big) \overset{\mathrm{T1}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{T1}}{=} f\Big(\overset{i}{a}, f\Big(\hat{a}, \overset{n-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\Big), \overset{n-i-1}{a}, x\Big) \overset{(9)}{=} f\Big(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, x\Big) \overset{(8)}{=} x,$$

$$f\Big(x, \overset{n-(j-s)-1}{a}, \bar{\bar{a}}, \overset{j-s}{a}\Big) \overset{(12)}{=} f\Big(x, \overset{n-j-1+s}{a}, f\Big(\overset{i-s}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \check{a}, \overset{s}{a}\Big), \overset{j-s}{a}\Big) \overset{\mathrm{T1}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{T1}}{=} f\Big(x, \overset{n-j-1}{a}, f\Big(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \check{a}\Big), \overset{j}{a}\Big) \overset{(8)}{=} f\Big(x, \overset{n-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\Big) \overset{(9)}{=} x.$$

Лема 2. *Нехай* $(Q; f)$ *є асоціатом сорту* (s, n), *в якому для деяких елементів* $a, \hat{a} \in Q$ *і для всіх* $x \in Q$ *виконується рівність* (8) *при* $i \le s$. *Тоді існує елемент* $\tilde{a} \in Q$ *такий, що має місце співвідношення*

$$f\left(\overset{i+s}{a}, \tilde{a}, \overset{n-(i+s)-1}{a}, x\right) = x. \tag{13}$$

Доведення. Перш за все доведемо, що для будь-якого натурального числа m виконується рівність

$$\left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \ldots \overset{mi}{+} f\right)\left(\overset{(m+1)i}{a}, \hat{a}, \underbrace{\overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \ldots, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}}_{m+1 \text{ разів}}\right) = \hat{a}. \tag{14}$$

Доведемо рівність (14) методом математичної індукції. При $m = 1$ отримуємо

$$\left(f \overset{i}{+} f\right)\left(\overset{2i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} f\left(\overset{i}{a}, f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}\right), \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}\right) \overset{(8)}{=} f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}\right) \overset{(8)}{=} \hat{a}.$$

Припустимо, що співвідношення (14) істинне для m, тобто має місце рівність (14), і доведемо її для $m + 1$:

$$\left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \ldots \overset{(m+1)i}{+} f\right)\left(\overset{(m+2)i}{a}, \hat{a}, \underbrace{\overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \ldots, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}}_{m+2 \text{ разів}}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \ldots \overset{mi}{+} f\right)\left(\overset{(m+1)i}{a}, f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}\right), \underbrace{\overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \ldots, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}}_{m+1 \text{ разів}}\right) \overset{(8)}{=}$$

$$\overset{(8)}{=} \left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \ldots \overset{mi}{+} f\right)\left(\overset{(m+1)i}{a}, \hat{a}, \underbrace{\overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \ldots, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}}_{m+1 \text{ разів}}\right) \overset{(14)}{=} \hat{a}.$$

Перейдемо тепер безпосередньо до доведення співвідношення (13). Поділимо s на i з остачею:

$$s = iq + i_0, \quad 0 \le i_0 < i, \quad q \in N,$$

і визначимо елемент $\tilde{a}$ рівністю

$$\tilde{a} := \left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \ldots \overset{qi}{+} f\right)\left(\overset{(q+1)i-s}{a}, \hat{a}, \underbrace{\overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \ldots, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}}_{q+1 \text{ разів}}, \overset{s}{a}\right). \tag{15}$$

Розглянемо тепер такий ланцюжок перетворень:

$$f\left(\overset{i+s}{a}, \tilde{a}, \overset{n-(i+s)-1}{a}, x\right) \overset{(15)}{=}$$

$$\overset{(15)}{=} f\left(\overset{i+s}{a}, \left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \ldots \overset{qi}{+} f\right)\left(\overset{(q+1)i-s}{a}, \hat{a}, \underbrace{\overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \ldots, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}}_{q+1 \text{ разів}}, \overset{s}{a}\right), \overset{n-(i+s)-1}{a}, x\right) \overset{\mathrm{T1}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{T1}}{=} f\left(\overset{i}{a}, \left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \ldots \overset{qi}{+} f\right)\left(\overset{(q+1)i}{a}, \hat{a}, \underbrace{\overset{n-i-1}{a}, \hat{a}, \ldots, \overset{n-i-1}{a}, \hat{a}}_{q+1 \text{ разів}}\right), \overset{n-i-1}{a}, x\right).$$

Ми використали теорему 1 на підставі того, що між входженням символу f в два останні вирази можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій відповідні координати конгруентні за модулем s, а саме:

$$f_0 \to f_0, \quad f_{i+s} \to f_i, \quad f_{2i+s} \to f_{2i}, \ldots, \; f_{(q+1)i+s} \to f_{(q+1)i},$$

нижній індекс позначає координату символу f в цьому виразі. Застосовуючи до (16) рівність (14), отримуємо вираз $f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, x\right)$, який згідно з (8) дорівнює x, тобто

$$f\left(\overset{i+s}{a}, \tilde{a}, \overset{n-(i+s)-1}{a}, x\right) = x.$$

Лема 3. *Нехай* $(Q; f)$ *є асоціатом сорту* (s, n), *в якому для деяких* a, $\check{a} \in Q$, $j \le s$, *і довільного* $x \in Q$ *виконується рівність* (9). *Тоді існує елемент* $\breve{a} \in Q$ *такий, що має місце співвідношення*

$$f\left(x, \overset{n-(j+s)-1}{a}, \breve{a}, \overset{j+s}{a}\right) = x.$$

Доведення даної леми аналогічне доведенню леми 2, тому ми не будемо повторювати міркування, а лише зауважимо, що шуканий елемент $\breve{a}$ знаходиться за формулою

$$\breve{a} := \left(f \overset{n-j}{+} f \overset{2(n-j)}{+} \ldots \overset{k(n-j)}{+} f\right)\left(\overset{s}{a}, \underbrace{\check{a}, \overset{n-j-1}{a}, \ldots, \check{a}, \overset{n-j-1}{a}}_{k+1 \text{ разів}}, \check{a}, \overset{(k+1)j-s}{a}\right).$$

Доведені леми дають можливість встановити критерій оборотності елемента в асоціаті, а саме має місце така теорема.

Теорема 4. *Елемент* $a \in Q$ *буде оборотним в асоціаті* $(Q; f)$ *сорту* (s, n) *тоді і тільки тоді, коли існують елементи* $\hat{a}$ *та* $\check{a}$ *з* Q *та числа* i, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ *такі, що для довільного* $x \in Q$ *мають місце рівності* (8) *і* (9).

Доведення. Нехай a — будь-який оборотний елемент асоціату $(Q; f)$ сорту (s, n). Тоді за теоремою 3 існує моноїд $(Q; \cdot)$ з нейтральним елементом a, оборотним елементом b і автоморфізмом φ.

Покладемо

$$\hat{a} := \varphi^{-i}(\overline{a}), \qquad \check{a} := \varphi^{-(n-j)}(\overline{a}), \tag{16}$$

де $\overline{a}$ є нульовим косим до елемента a. Скориставшись теоремою 3, одержимо

$$f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, x\right) \overset{\text{T3}}{=} \varphi^i(\hat{a})\cdot\varphi^n(x)\cdot b \overset{(16)}{=} \varphi^i\left(\varphi^{-i}(\overline{a})\right)\cdot b\cdot x\cdot b^{-1}b =$$

$$= \overline{a}\cdot b\cdot x \overset{(7)}{=} b^{-1}\cdot b\cdot x = x,$$

$$f\left(x, \overset{n-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\right) \overset{\text{T3}}{=} x\cdot\varphi^{n-j}(\check{a})\cdot b \overset{(16)}{=} x\cdot\varphi^{n-j}\left(\varphi^{-(n-j)}(\overline{a})\right)\cdot b =$$

$$= x\cdot\overline{a}\cdot b \overset{(7)}{=} x\cdot b^{-1}\cdot b = x.$$

Зауважимо, що елементи $\hat{a}$ та $\check{a}$ збігаються з i-м та $(n-j)$-м косим до елемента a відповідно. Теорему в один бік доведено.

Навпаки, нехай існують елементи $\hat{a}$ та $\check{a}$ з Q та числа $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ такі, що для довільного $x \in Q$ мають місце рівності (8) та (9). Доведемо, що елемент a є оборотним. Для цього розглянемо такі чотири випадки:

1. Нехай $i < s$, $j < s$. У цьому випадку визначимо елементи $\overline{a}$, $\tilde{a}$ рівностями

$$\overline{a} \;:=\; f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{s-1}{a}, \hat{a}, \overset{n-s-i}{a}\right), \tag{17}$$

$$\tilde{a} \;:=\; f\left(\overset{n-s-j}{a}, \check{a}, \overset{s-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\right) \tag{18}$$

і доведемо істинність співвідношень (4).

Істинність першого із співвідношень (4) випливає з таких міркувань:

$$f\left(\overline{a}, \overset{n-1}{a}, x\right) \overset{(17)}{=} f\left(f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{s-1}{a}, \hat{a}, \overset{n-s-i}{a}\right), \overset{n-1}{a}, x\right) \overset{\text{T1}}{=}$$

$$\overset{\text{T1}}{=} f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{s-i-1}{a}, f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i}{a}\right), \overset{n-s-1}{a}, x\right) \overset{(8)}{=} f\left(\overset{i}{a}, \hat{a}, \overset{n-i-1}{a}, x\right) \overset{(8)}{=} x.$$

Істинність другого із співвідношень (4) випливає з такого ланцюжка перетворень:

$$f\left(x, \overset{n-1}{a}, \tilde{a}\right) \overset{(18)}{=} f\left(x, \overset{n-1}{a}, f\left(\overset{n-s-j}{a}, \check{a}, \overset{s-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\right)\right) \overset{\text{T1}}{=}$$

$$\overset{\text{T1}}{=} f\left(x, \overset{n-s-1}{a}, f\left(\overset{n-j}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\right), \overset{s-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\right) \overset{(9)}{=} f\left(x, \overset{n-j-1}{a}, \check{a}, \overset{j}{a}\right) \overset{(9)}{=} x.$$

За теоремою 2 елемент a є оборотним.

2. Нехай $i \geq s$, $j \geq s$. Поділимо i та j на s з остачею:

$$i = qs + i_0, \quad 0 \leq i_0 < s, \quad q \in N,$$

$$j = ps + j_0, \quad 0 \leq j_0 < s, \quad p \in N.$$

Застосовуючи лему 1 q разів до співвідношення (8) і p разів до співвідношення (9), для деяких $\grave{a}$, $\acute{a} \in Q$ і довільного $x \in Q$ одержуємо рівності

$$f\left(\overset{i_0}{a}, \grave{a}, \overset{n-i_0-1}{a}, x\right) = x, \qquad f\left(x, \overset{n-j_0-1}{a}, \acute{a}, \overset{j_0}{a}\right) = x.$$

За щойно доведеним випадком 1 елемент a є оборотним.

3. Нехай $i < s$, $j \geq s$. Використовуючи лему 2, маємо

$$f\left(\overset{i+s}{a}, \bar{a}, \overset{n-i-s}{a}, x\right) = x.$$

Оскільки $i + s \geq s$, то за випадком 2 елемент a є оборотним.

4. Нехай $i \geq s$, $j < s$. Використовуючи лему 3, одержуємо істинність рівності

$$f\left(x, \overset{n-j-s-1}{a}, \breve{a}, \overset{j+s}{a}\right) = x.$$

Оскільки $j + s \geq s$, то за випадком 2 елемент a є оборотним.

3. Другий критерій оборотності. Для доведення цього критерію оборотності елемента в асоціаті нам потрібні наступні дві леми.

Лема 4. *У довільному асоціаті* $(Q; f)$ *сорту* (s, n) *для кожного* i*-оборотного елемента* a, *де* $i \in \{1, \ldots, n-s\}$, *виконуються співвідношення*

$$f\left(x, \overset{i+s-1}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-s-i}{a}\right) = x, \tag{19}$$

$$f\left(\overset{i}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i-1}{a}, x\right) = x. \tag{20}$$

Доведення. Оскільки елемент a є i-оборотним, то має місце співвідношення (3). Для доведення рівності (19) розглянемо таку послідовність перетворень:

$$x = \lambda_{i,a}^{-1}\lambda_{i,a}(x) \overset{(2)}{=} \lambda_{i,a}^{-1} f\left(\overset{i}{a}, x, \overset{n-i}{a}\right) \overset{(3)}{=} \lambda_{i,a}^{-1} f\left(\overset{i}{a}, x, \overset{s-1}{a}, f\left(\overset{i}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i}{a}\right), \overset{n-s-i}{a}\right) \overset{\mathrm{T1}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{T1}}{=} \lambda_{i,a}^{-1} f\left(\overset{i}{a}, f\left(x, \overset{i+s-1}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-s-i}{a}\right), \overset{n-i}{a}\right) \overset{(2)}{=} \lambda_{i,a}^{-1}\lambda_{i,a} f\left(x, \overset{i+s-1}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-s-i}{a}\right) =$$

$$= f\left(x, \overset{i+s-1}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-s-i}{a}\right).$$

Доведемо тепер співвідношення (20):

$$x = \lambda_{i,a}^{-s}\lambda_{i,a}^{s}(x) \overset{(2)}{=} \lambda_{i,a}^{-s} \underbrace{f\left(\overset{i}{a}, f\left(\overset{i}{a}, f\left(\dots f\left(\overset{i}{a}\right.\right.\right.\right.}_{s\ \text{разів}}, x,, \overset{n-i}{a}\right), \dots\right), \overset{n-i}{a}\right), \overset{n-i}{a}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \lambda_{i,a}^{-s}\left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \dots \overset{(s-1)i}{+} f\right)\left(\overset{is}{a}, x, \overset{(n-i)s}{a}\right) \overset{(19)}{=}$$

$$\overset{(19)}{=} \lambda_{i,a}^{-s}\left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \dots \overset{(s-1)i}{+} f\right)\left(\overset{(i-1)s}{a}, f\left(\overset{i+s}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i-s}{a}\right), \overset{s-1}{a}, x, \overset{(n-i)s}{a}\right) \overset{\mathrm{T1}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{T1}}{=} \lambda_{i,a}^{-s}\left(f \overset{i}{+} f \overset{2i}{+} \dots \overset{(s-1)i}{+} f\right)\left(\overset{is}{a}, f\left(\overset{i}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i-1}{a}, x\right), \overset{(n-i)s}{a}\right) \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \lambda_{i,a}^{-s}\lambda_{i,a}^{s} f\left(\overset{i}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i-1}{a}, x\right) = f\left(\overset{i}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i-1}{a}, x\right).$$

Покажемо, що, записуючи цей ланцюжок перетворень, ми правомірно скористалися теоремою 1: між номерами входження символу f в 5- і 6-й вирази можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій відповідні координати конгруентні за модулем s, а саме:

$$f_0 \to f_0, \quad f_i \to f_i, \quad f_{2i} \to f_{2i}, \dots, \ f_{(s-1)i} \to f_{(s-1)i}, \quad f_{(i-1)s} \to f_{is},$$

де індекс при символі вказує на координату відповідного входження символу f.

Лема 5. *У довільному асоціаті* $(Q; f)$ *сорту* (s, n) *для кожного* i*-оборотного елемента* a, *де* $i \in \{s, \dots, n-1\}$, *виконуються співвідношення*

$$f\left(\overset{i-s}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i+s-1}{a}, x\right) = x, \tag{21}$$

$$f\left(x, \overset{i-1}{a}, \overline{a}^{i}, \overset{n-i}{a}\right) = x. \tag{22}$$

Доведення аналогічне доведенню леми 4.

Сформулюємо тепер і доведемо другий критерій оборотності елемента в асоціаті.

Теорема 5. *У довільному асоціаті кожний внутрішньо оборотний елемент є оборотним.*

Доведення. Нехай a — внутрішньо оборотний елемент асоціату $(Q; f)$ сорту (s, n). Якщо $i \in \{1, \dots, n-s\}$, то за лемою 4 виконуються рівності (19) і (20), а за теоремою 4 елемент a є оборотним. Коли $i \in \{n-s, \dots, n-1\}$, тоді з леми 5 випливає істинність рівностей (21) і (22), а з теореми 4 — оборотність елемента a.

Доведені тут критерії оборотності дають змогу узагальнити і доповнити наведені в теоремах 1 і 2 з [9] результати.

Теорема 6. *У будь-якому асоціаті* $(Q; f)$ *сорту* (s, n) *для довільного елемента* a *рівносильні такі умови:*

1) *елемент* a *є оборотним;*
2) *елемент* a *є початково і кінцево оборотним;*
3) *елемент* a *є внутрішньо оборотним;*
4) *існують елементи* $\hat{a}$ *та* $\check{a}$ *з* Q *і числа* $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ *такі, що для довільного* $x \in Q$ *мають місце рівності* (8) *та* (9).

Також отримуємо нові аксіоматики поліагруп.

Теорема 7. *У будь-якому асоціаті* $(Q; f)$ *сорту* (s, n) *для довільного елемента* a *рівносильні такі умови:*

1) *асоціат є поліагрупою;*
2) *кожний елемент асоціату є оборотним;*
3) *кожний елемент асоціату є початково і кінцево оборотним;*
4) *кожний елемент асоціату є внутрішньо оборотним;*
5) *для кожного елемента* a *існують елементи* $\hat{a}$ *та* $\check{a}$ *і числа* $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ *такі, що для довільного* $x \in Q$ *мають місце рівності* (8) *та* (9).

При $s = 1$ поліагрупа є $(n+1)$-арною групою, а асоціат сорту $(1, s)$ є $(n+1)$-арною напівгрупою. Таким чином, з теореми 7 одержимо аксіоматику для $(n+1)$-арних груп. Ці результати також випливають з результатів А. М. Гальмака [10] (теорема 2.1, теорема 5.1) і С. А. Русакова [5] (теорема 1.1 і наслідки з неї).

Автор висловлює щиру подяку Ф. М. Сохацькому, під керівництвом якого виконано дану роботу, а також членам Вінницького міського семінару з алгебри та дискретної математики за обговорення результатів під час доповіді на семінарі.

1. *Сушкевич А. Л.* Теория обобщенных групп. – Харьков; Киев: ДНТВУ, 1937. – 176 с.
2. *Post E. L.* Poliadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – **48**, № 2. – P. 208 – 350.
3. *Глускин Л. М.* Позиционные оперативы // Мат. сб. – 1965. – **68**, № 3. – С. 444 – 472.
4. *Белоусов В. Д.* n-Арные квазигруппы. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 227 с.
5. *Русаков С. А.* Алгебраические n-арные системы. – Минск: Навука и тэхніка, 1992. – 264 с.
6. *Сохацкий Ф. Н.* Об ассоциативности многоместных операций // Дискретная математика. – 1992. – **4**, вып. 1. – С. 66 – 84.
7. *Сохацкий Ф. Н.* О полиадических группах // Современная алгебра: Межвуз. сб. науч. тр. – 1997. – Вып. 2 (22). – С. 79 – 94.
8. *Sokhatsky F.* On the associativity of multiplace operations // Quasigroups and Related Systems. – 1997. – № 4. – P. 51 – 56.
9. *Sokhatsky F. M., Yurevych O.* Invertible elements in associates and semigroups // Ibid. – 1999. – **6**. – P. 61 – 70.
10. *Гальмак А. М.* Определения n-арной группы. – Гомель, 1994. – 56 с.

Одержано 15.06.2000,
після доопрацювання — 25.12.2000