УДК 517.9

О. М. Станжицький (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ ДИХОТОМІЇ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІТО ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ

For linear stochastic systems, we obtain sufficient conditions of the exponential dichotomy in mean square sense in terms of the Lyapunov functions which are quadratic forms.

Для лінійних стохастичних систем отримано достатні умови експоненціальної дихотомії в середньому квадратичному в термінах функцій Ляпунова, які є квадратичними формами.

Розглянемо систему лінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx = A(t)xdt + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x\,dW_i(t). \tag{1}$$

Тут $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$, $B_i(t)$ — детерміновані, неперервні і обмежені матриці, $W_i(t)$, $i = 1,\ldots, m$, — незалежні в сукупності вінерівські процеси, задані на деякому ймовірнісному просторі (Ω, F, P). При даних умовах, як випливає, наприклад, із [1, с. 596; 2, с. 230], система (1) має єдиний сильний розв'язок $x(t, x_0)$ задачі Коші $x(0, x_0) = x_0$ для довільного $x_0 \in \mathbb{R}^n$, визначений при $t \geq 0$ і такий, що при заданих t має скінченний другий момент.

Означення. *Систему* (1) *назвемо експоненціально дихотомічною в середньому квадратичному на півосі* $t \geq 0$, *якщо простір* $\mathbb{R}^n$ *можна зобразити у вигляді прямої суми двох підпросторів* $\mathbb{R}^+$ *і* $\mathbb{R}^-$ *так, що довільний розв'язок* $x(t, x_0)$ *системи* (1) *при* $x_0 \in \mathbb{R}^-$ *задовольняє нерівність*

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \leq K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}\mathrm{M}|x(\tau, x_0)|^2 \tag{2}$$

при $t \geq \tau \geq 0$, *а довільний розв'язок* $x(t, x_0)$ *системи* (1) *при* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *задовольняє нерівність*

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \geq K_1\exp\{\gamma_1(t-\tau)\}\mathrm{M}|x(\tau, x_0)|^2 \tag{3}$$

при $t \geq \tau \geq 0$ *для довільного* $\tau \geq 0$, *де* K, γ, K_1, γ_1 — *деякі додатні, не залежні від* τ, x_0 *сталі.*

Відмітимо, що якщо система (1) є експоненціально стійкою в середньому квадратичному, то вона є експоненціально дихотомічною в середньому квадратичному. Дійсно, в цьому випадку $\mathbb{R}^+ = \{0\}$, а $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^n$.

На відміну від звичайних диференціальних рівнянь, де умови експоненціальної дихотомії добре вивчені (див., наприклад [3, с. 230; 4]), для стохастичних систем ці питання залишаються відкритими. Автору відомі лише результати із [2, с. 296], де одержано умови експоненціальної дихотомії в середньому квадратичному для систем типу (1) та стохастичних систем із запізненням у випадку, коли матриці $A(t)$ та $B_i(t)$ сталі або періодичні. Однак у вказаній роботі результати отримані за допомогою (і в термінах) системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь для других моментів розв'язку системи (1), або системи матричних лінійних рівнянь для кореляційної матриці розв'язків. Це зумовлює необхідність аналізу систем розмірності значно вищої, ніж розмірність системи (1). (Так, розмірність системи для других моментів є $n(n+1)/2$.)

Тому доцільно вивчати умови експоненціальної дихотомії в середньому квадратичному для систем (1), коли матриці $A(t)$ та $B_i(t)$ не обов'язково сталі чи періодичні, а самі умови отримуються в термінах вихідної системи, без аналізу допоміжних систем для матриць других моментів.

Одним з можливих підходів до такого дослідження є застосування знакозмінних квадратичних форм $(S(t)x, x)$, де $S(t)$ — симетрична, обмежена при $t \geq 0$ матриця.

Наведена нижче відповідна теорема є узагальненням відомого результату із [4, с. 3] для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 1. *Нехай існує симетрична, неперервно диференційовна і обмежена при* $t \geq 0$ *матриця* $S(t)$ *така, що матриця*

$$S^* = \frac{dS}{dt} + A^T S + SA + \sum_{i=1}^{m} B_i^T S B_i$$

є від'ємно визначеною при $t \geq 0$. *Тоді система* (1) — *експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному.*

Зауваження. Від'ємна визначеність матриці $S^*(t)$ тут означає існування такої сталої $N > 0$, що квадратична форма $\left(S^*(t)x, x\right)$ задовольняє для всіх $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ нерівність

$$\left(S^*(t)x, x\right) \leq -N|x|^2.$$

Доведення. Позначимо через Ω_τ^t матрицант системи (1) ($\Omega_\tau^\tau = E$ — одинична матриця). Як випливає із [2, с. 230], такий матрицант завжди існує при $t \geq \tau$, має другий момент, його визначник з імовірністю 1 відмінний від нуля і розв'язок системи (1) $x(t, x_0)$ можна подати у вигляді

$$x(t, x_0) = \Omega_\tau^t x(\tau, x_0). \tag{4}$$

Розглянемо квадратичну форму

$$(S_t x, x) = \mathrm{M}(S(t)x(t, x), x(t, x)) = \mathrm{M}\left(S(t)\Omega_0^t x, \Omega_0^t x\right) = \mathrm{M}\left(\left(\Omega_0^t\right)^T S(t)\Omega_0^t x, x\right). \tag{5}$$

Тут $x(t, x)$ — розв'язок системи (1) з початковою умовою $x(0, x) = x$ (x — невипадковий вектор). Формула (5) має зміст, оскільки другі моменти розв'язків системи (1) існують.

Виражаючи для довільних $t \geq \tau \geq 0$ різницю

$$(S(t)x(t, x), x(t, x)) - (S(\tau)x(\tau, x), x(\tau, x))$$

за формулою Іто, одержуємо

$$(S(t)x(t, x), x(t, x)) - (S(\tau)x(\tau, x), x(\tau, x)) =$$

$$= \int_\tau^t LV(s, x(s, x))\,ds + \sum_{i=1}^{m} \int_\tau^t \left(B_i(s)x, \frac{\partial V(s, x(s, x))}{\partial x}\right) dW_i(s), \tag{6}$$

де $V(t, x(t, x)) = (S(t)x(t, x), x(t, x))$, а L — твірний оператор марковського процесу для системи (1), який згідно з [5, с. 109] має вигляд

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(A(t)x, \frac{\partial}{\partial x}\right)V + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \left(B_i(t)x, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)V.$$

Із його зображення і умов теореми випливає, що LV є від'ємно визначеною квадратичною формою.

Відмітимо, що внаслідок [5, с. 205] точка $x = 0$ є недосяжною для процесу $x(t, x)$ при $x \neq 0$, а тому, взявши в останній формулі від обох частин математичне сподівання, на підставі умов теореми одержимо

$$(S_t x, x) < (S_\tau x, x) \quad \forall t > \tau \geq 0, \quad x \neq 0. \tag{7}$$

Покажемо тепер, що для точок $x \in \mathbb{R}^n$ таких, що $(S_t x, x) \geq 0$, при $t \geq 0$ виконується оцінка (2), а для точок $x \in \mathbb{R}^n$ таких, що $(S_t x, x) \leq 0$, при $t \geq 0$ має місце оцінка (3).

Для одержання оцінки (2) покладемо

$$V_\varepsilon(t) = (S_t x, x) + \varepsilon \mathrm{M} |x(t, x)|^2,$$

вважаючи ε досить малою додатною сталою. Із (6) можна одержати рівність

$$\mathrm{M}(S(t)x(t, x), x(t, x)) - \mathrm{M}(S(\tau)x(\tau, x), x(\tau, x)) = \int_\tau^t \mathrm{M} LV(s, x(s, x))\, ds.$$

Диференціюючи її по t, знаходимо

$$\frac{d}{dt}(S_t x, x) = \mathrm{M} L(S(t)x(t, x), x(t, x)) \leq -N\mathrm{M}|x(t, x)|^2. \tag{8}$$

Тут N — деяка додатна стала. Остання нерівність випливає з того, що квадратична форма $L(S(t)x, x)$ є від'ємно визначеною.

Очевидно, що

$$L|x|^2 = 2(A(t)x, x) + \frac{1}{2}\sum_{i, j=1}^{m, n} \left(b_{j1}^{(i)} x_1 + \ldots + b_{jn}^{(i)} x_n\right)^2$$

є квадратичною формою з деякою обмеженою матрицею $C(t)$, що виражається через матриці $A(t)$, $B_i(t)$ та транспоновані до них. (Індекс *(i)* зверху означає належність елемента матриці B_i.) А тому

$$\left| L|x|^2 \right| = |(C(t)x, x)| \leq D|x|^2, \tag{9}$$

де $D = \max_{t \geq 0} \| C(t) \|$.

Отже,

$$V_\varepsilon(t) - V_\varepsilon(\tau) = \int_\tau^t \left(\mathrm{M} LV(s, x(s, x)) + \varepsilon \mathrm{M} L |x(s, x)|^2 \right) ds.$$

Звідси маємо

$$\frac{dV_\varepsilon(t)}{dt} \leq -(N - \varepsilon D)\mathrm{M}|x(t, x)|^2 = -N_1 \mathrm{M}|x(t, x)|^2. \tag{10}$$

Оскільки

$$V_\varepsilon(t) \leq (C_1 + \varepsilon)\mathrm{M}|x(t, x)|^2, \tag{11}$$

де $C_1 = \max_{t \geq 0} \| S(t) \|$, а

$$\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \le \frac{(S_t x, x) + \varepsilon \mathrm{M}|x(t,x)|^2}{\varepsilon} = \frac{V_\varepsilon(t)}{\varepsilon}, \tag{12}$$

то із нерівності (10) одержуємо

$$\frac{dV_\varepsilon(t)}{dt} \le -N_1 \mathrm{M}|x(t,x)|^2 \le \frac{-N_1}{C_1+\varepsilon} V_\varepsilon(t) = -\gamma V_\varepsilon(t).$$

Інтегруючи останню нерівність в межах $[\tau, t]$, отримуємо

$$V_\varepsilon(t) \le V_\varepsilon(\tau)\exp\{-\gamma(t-\tau)\}$$

при $t \ge \tau$, або, з урахуванням нерівностей (11), (12), маємо

$$\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \le \frac{V_\varepsilon(t)}{\varepsilon} \le V_\varepsilon(\tau)\exp\{-\gamma(t-\tau)\} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{C_1}{\varepsilon}\right)\exp\{-\gamma(t-\tau)\}\mathrm{M}|x(\tau,x)|^2.$$

Остання нерівність і є потрібною нерівністю (2), де $K = 1 + \dfrac{C_1}{\varepsilon}$.

Нехай тепер $x \in \mathbb{R}^n$ таке, що $(S_t x, x) \le 0$ при $t \ge 0$. Покажемо, що для цих x має місце нерівність (3).

Для цього розглянемо функцію

$$V_\varepsilon^1(t) = -(S_t x, x) + \varepsilon \mathrm{M}|x(t,x)|^2,$$

вважаючи знову ε достатньо малим додатним числом.

Оскільки на підставі умов теореми квадратична форма $L(S(t)x, x)$ є додатно визначеною, то аналогічно попередньому одержуємо

$$\frac{dV_\varepsilon^1(t)}{dt} \ge N\mathrm{M}|x(t,x)|^2 + \varepsilon \mathrm{M}(C(t)x, x) \ge$$

$$\ge (N - \varepsilon D)\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \ge \frac{N_1}{C_1+\varepsilon} V_\varepsilon^1(t) = \gamma V_\varepsilon^1(t).$$

Інтегруючи останню нерівність, отримуємо оцінку

$$V_\varepsilon^1(t) \ge V_\varepsilon^1(\tau)\exp\{\gamma(t-\tau)\}$$

при $t \ge \tau$, з якої з урахуванням нерівності

$$V_\varepsilon^1(t) \ge \varepsilon \mathrm{M}|x(t,x)|^2$$

і (11) остаточно знаходимо

$$\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \ge \frac{V_\varepsilon^1(t)}{C_1+\varepsilon} \ge \frac{V_\varepsilon^1(\tau)}{C_1+\varepsilon}\exp\{\gamma(t-\tau)\} \ge$$

$$\ge \frac{\mathrm{M}|x(\tau,x)|^2}{C_1+\varepsilon}\exp\{\gamma(t-\tau)\} = \frac{1}{C_1/\varepsilon+1}\mathrm{M}|x(\tau,x)|^2\exp\{\gamma(t-\tau)\} =$$

$$= K_1\exp\{\gamma(t-\tau)\}\mathrm{M}|x(\tau,x)|^2$$

при $t \ge \tau \ge 0$.

Останнє співвідношення і є потрібною нерівністю (3), що фігурує в означенні експоненціальної дихотомії.

Покажемо нарешті, що простір $\mathbb{R}^n$ розбивається в пряму суму підпросторів $\mathbb{R}^-$ і $\mathbb{R}^+$. Як $\mathbb{R}^-$ розглянемо множину всіх початкових значень $x \in \mathbb{R}^n$ розв'язків системи (1) таких, що $\mathrm{M}|x(t,x)|^2$ обмежений при $t \geq 0$. Враховуючи зображення (4) розв'язку системи (1), легко переконатися, що дана множина є лінійним підпростором в $\mathbb{R}^n$. Для всіх точок цього підпростору має місце нерівність $(S_t x, x) \geq 0$. Дійсно, в противному разі існувала б точка $t_0 > 0$ така, що $(S_{t_0} x, x) < 0$. Тоді з нерівності (7) випливала б оцінка

$$(S_t x, x) < 0 \tag{13}$$

при $t \geq t_0$. З неї на підставі доведеного вище випливала б нерівність

$$\mathrm{M}|x(t,x)|^2 \geq K_1 \exp\{\gamma(t-t_0)\}\mathrm{M}|x(t_0,x)|^2,$$

що має місце для всіх $t \geq t_0$. Остання нерівність суперечить обмеженості на півосі розв'язків, що починаються на $\mathbb{R}^-$.

Отже, для будь-якого $x \in \mathbb{R}^-$ виконується нерівність $(S_t x, x) \geq 0$ при $t \geq 0$, а тому з доведеного вище випливає, що для $x \in \mathbb{R}^-$ має місце оцінка (2).

Нехай $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}^-)^\perp$ — ортогональне доповнення до $\mathbb{R}^-$. Для всіх $x \in \mathbb{R}^+$ виконується нерівність $(S_t x, x) \leq 0$ при $t \geq t(x)$. Дійсно, в противному разі для деякого ненульового $x \in \mathbb{R}^+$ вираз $(S_t x, x)$ був би додатним для всіх $t \geq 0$. З цієї умови випливає виконання для розв'язку $x(t,x)$ $(x(0,x) = x \in \mathbb{R}^+)$ оцінки (2), звідки випливає обмеженість $\mathrm{M}|x(t,x)|^2$. Останнє означає, що $x \in \mathbb{R}^-$. Але перетином підпросторів $\mathbb{R}^-$ і $\mathbb{R}^+$ є лише нульовий вектор. Отримана суперечність і доводить, що для кожного $x \in \mathbb{R}^+$ існує скінченний момент часу $t(x)$ такий, що при $t \geq t(x)$ $(S_t x, x) \leq 0$. А тому, як було показано вище, при $t \geq \tau \geq$ $\geq t(x)$ для $x \in \mathbb{R}^+$ виконується оцінка (3). Покажемо її виконання і для $0 \leq \tau \leq$ $\leq t \leq t(x)$.

Для цього спочатку доведемо, що момент $t(x)$ можна вибрати єдиним для всіх $x \in \mathbb{R}^+$.

Припустимо, що це не так. Тоді можна вказати послідовність чисел $t_n \to \infty$ і послідовність $x_n \in \mathbb{R}^+$ такі, що $(S_{t_n} x_n, x_n) > 0$.

Розглянемо послідовність $y_n = x_n / \|x_n\|$. Очевидно, що $(S_{t_n} y_n, y_n) > 0$, а $|y_n| = 1$. З того, що $\mathbb{R}^+$ — підпростір, випливає, що $y_n \in \mathbb{R}^+$ для довільного натурального n.

З послідовності y_n виділимо збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності можна вважати, що сама y_n є збіжною. Позначимо $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Із замкнутості підпростору $\mathbb{R}^+$ випливає, що $y_0 \in \mathbb{R}^+$. За викладеним вище, для y_0 існує скінченний момент $T > 0$ такий, що $(S_{t_0} y_0, y_0) \leq 0$ при $t \geq T$. А тому для розв'язку $x(t, y_0)$ системи (1) при $t \geq T$ має місце оцінка

$$\mathrm{M}|x(t,y_0)|^2 \geq K_1 \exp\{\gamma(t-T)\}\mathrm{M}|x(T,y_0)|^2. \tag{14}$$

Виберемо t_1 з умови

$$K_1 \exp\{\gamma(t_1 - T_0)\} = 2.$$

Із неперервної залежності в середньому квадратичному від початкових даних і того, що $y_n \to y_0$, $n \to \infty$, для довільного $\varepsilon > 0$ на відрізку $[0, t_1]$ можна вказати такий номер p, що при $n \ge p$ виконана нерівність

$$\sup_{t \in [0, t_1]} \mathrm{M}|x(t, y_0) - x(t, y_n)|^2 < \varepsilon. \tag{15}$$

Будемо вважати p таким великим, що $t_n > t_1$ при $n \ge p$. Останнє означає, що $(S_{t_1} y_n, y_n) > 0$ при $n \ge p$. А тому при $T \le t \le t_1$ для розв'язку $x(t, y_n)$ виконується оцінка

$$\mathrm{M}|x(t, y_n)|^2 \le K \exp\{-\gamma(t - T)\} \mathrm{M}|x(T, y_n)|^2. \tag{16}$$

Зауважимо, що $K_1 = 1/K$.

Ввівши норму

$$\|x(t, y_0)\|_2 = \left(\mathrm{M}|x(t, y_0)|^2\right)^{1/2},$$

з (15) отримуємо

$$\|x(t_1, y_0) - x(t_1, y_n)\|_2 < \varepsilon^{1/2}. \tag{17}$$

Але

$$\|x(t, y_0) - x(t_1, y_n)\|_2 \ge \|x(t_1, y_0)\|_2 - \|x(t_1, y_n)\|_2 \ge$$

$$\ge K_1^{1/2} \exp\left\{\frac{\gamma}{2}(t_1 - T)\right\} \|x(T, y_0)\|_2 - K^{1/2} \exp\left\{-\frac{\gamma}{2}(t_1 - T)\right\} \|x(T, y_n)\|_2 \ge$$

$$\ge 2^{1/2} \|x(T, y_0)\|_2 - \frac{1}{2^{1/2}} \|x(T, y_n)\|_2 \ge$$

$$\ge 2^{1/2} \|x(T, y_0)\|_2 - \frac{1}{2^{1/2}} \|x(T, y_0)\|_2 - \frac{\varepsilon^{1/2}}{2^{1/2}}.$$

Остання нерівність суперечить (17). Це доводить існування скінченного моменту $T_0 > 0$ такого, що при $t \ge T_0$ виконується нерівність

$$(S_t x, x) \le 0 \tag{18}$$

для $x \in \mathbb{R}^+$, з якої випливає виконання нерівності (3) при $\tau \ge T_0$. Доведемо її виконання для всіх $\tau \ge 0$. Дійсно, як зазначалося вище, довільний розв'язок системи (1) можна подати у вигляді $x(t, x_0) = \Omega_0^t x_0$, де Ω_0^t — матрицант системи (1), невироджений з імовірністю 1 для всіх $t \ge 0$. Отже, $\left(\Omega_0^t\right)^{-1}$ існує, є неперервною з імовірністю 1, оскільки вектор-стовпці матриці $\left(\Omega_0^t\right)$ — лінійно незалежні розв'язки системи (1). Звідси та з нерівності

$$\frac{1}{\left\|\left(\Omega_0^t\right)^{-1}\right\|} \le \left\|\Omega_0^t\right\|$$

випливає існування при $t \in [0, T_0]$ $\mathrm{M}\left(1 / \left\|\left(\Omega_0^t x_0\right)^{-1}\right\|^2\right)$. А тому з неперервності за параметром інтеграла Лебега маємо

$$\mathrm{M}\frac{1}{\left\|(\Omega_0^t x_0)^{-1}\right\|^2} \geq A$$

при $t \in [0, T_0]$ ($A \geq 0$ — деяка стала). Тоді

$$|x(t, x_0)| = \left|\Omega_0^t x_0\right| = \frac{\left\|(\Omega_0^t)^{-1}\right\|\left|\Omega_0^t x_0\right|}{\left\|(\Omega_0^t)^{-1}\right\|} \geq \frac{|x_0|}{\left\|(\Omega_0^t)^{-1}\right\|}.$$

Отже,

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \geq A|x_0|^2,$$

а тому

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \geq A|x_0|^2 \frac{\exp\{\gamma t\}}{\exp\{\gamma t\}} \geq A|x_0|^2 \frac{\exp\{\gamma t\}}{\exp\{\gamma T_0\}} = B|x_0|^2 \exp\{\gamma t_0\} \quad (19)$$

при $t \in [0, T_0]$.

Із лінійності системи (1), використовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана, при $\tau \geq 0$ отримуємо оцінку

$$\mathrm{M}|x(\tau, x_0)|^2 \leq A_1 \exp\{\alpha\tau\}|x_0|^2,$$

де $\alpha > 0$, $A_1 > 0$ — константи, не залежні від τ, x_0, з якої, використовуючи нерівність (19), легко одержуємо нерівність типу (3). Таким чином, нерівність (3) встановлено і при $\tau \leq T_0$. Враховуючи її використання і при $\tau \geq T_0$, можна гарантувати існування константи $K_2 > 0$, не залежної від τ, x_0, такої, що при $t \geq \tau \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \geq K_2 \exp\{\gamma_1(t-\tau)\}\mathrm{M}|x(\tau, x_0)|^2,$$

яка й доводить теорему.

Із доведеної теореми випливає, що розв'язки системи, які починаються на $\mathbb{R}^-$, спадають в середньому квадратичному з експоненціальним характером затухання, а розв'язки, які починаються на $\mathbb{R}^+$, зростають в середньому квадратичному з експоненціальним характером росту. Виникає питання про поведінку розв'язків $x(t, x_0)$ таких, що $x_0 \notin \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$. Відповідь на це питання дає наступний наслідок з теореми 1.

Наслідок. *Якщо $x_0 \notin \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$, то розв'язок $x(t, x_0)$ системи* (1) *має властивість*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 = \infty. \quad (20)$$

Доведення. Нехай $x_0 \notin \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$. Із розкладу простору $\mathbb{R}^n$ в пряму суму $\mathbb{R}^-$ і $\mathbb{R}^+$ випливає зображення $x_0 = x_0' + x_0''$, де $x_0' \in \mathbb{R}^-$, а $x_0'' \in \mathbb{R}^+$. Тоді маємо

$$x(t, x_0) = \Omega_0^t x_0 = \Omega_0^t x_0' + \Omega_0^t x_0'',$$

звідки одержуємо

$$\|x(t, x_0)\|_2 \geq \left\|\Omega_0^t x_0''\right\|_2 - \left\|\Omega_0^t x_0'\right\|_2 \geq K_2^{1/2}\exp\left\{\frac{\gamma}{2}t\right\}|x_0''| - K^{1/2}\exp\left\{-\frac{\gamma}{2}t\right\}|x_0'|,$$

що й доводить наслідок.

Використовуючи метод, запропонований в [6], можна описати не тільки поведінку других моментів розв'язків системи (1), що починаються на $\mathbb{R}^-$, а й поведінку траєкторій цих розв'язків. А саме, має місце така теорема.

Теорема 2. *Якщо система* (1) *експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному, то для розв'язків* $x(t, x_0)$ *таких, що* $x(0, x_0) = x_0 \in \mathbb{R}^-$, *з імовірністю* 1 *має місце оцінка*

$$|x(t, x_0)| \le Q(\omega)\exp\{-\alpha t\}|x_0| \tag{21}$$

для деякого $\alpha > 0$. *При цьому випадкова величина* $Q(\omega)$ *з імовірністю* 1 *скінченна.*

Доведення. Нехай $x(t, x_0)$ — розв'язок системи (1) з початковими даними з підпростору $\mathbb{R}^-$. Тоді з означення для нього випливає оцінка

$$\mathrm{M}|x(t, x_0)|^2 \le K\exp\{-\gamma t\}|x_0|^2. \tag{22}$$

Для довільних натуральних $n < n_1$ і для $\varepsilon_n > 0$ має місце оцінка

$$\mathrm{P}\Big\{\sup_{t\in[n, n_1]}|x(t, x_0)| \ge \varepsilon_n\Big\} \le \mathrm{P}\Big\{\sup_{t\in[n, n_1]}|x(t, x_0) - x(n, x_0)| \ge \frac{\varepsilon_n}{2}\Big\} +$$

$$+ \mathrm{P}\Big\{|x(n, x_0)| \ge \frac{\varepsilon_n}{2}\Big\}. \tag{23}$$

Оцінимо кожний з доданків в (23). Із нерівності Чебишева і (22) маємо

$$\mathrm{P}\Big\{|x(n, x_0)| \ge \frac{\varepsilon_n}{2}\Big\} \le \frac{4}{\varepsilon_n^2}\mathrm{M}|x(n, x_0)|^2 \le \frac{4}{\varepsilon_n^2}K\exp\{-\gamma n\}|x_0|^2. \tag{24}$$

Перший доданок справа в (23) оцінимо, використовуючи властивості стохастичного інтеграла Іто. Оскільки

$$x(t, x_0) = x(n, x_0) + \int_n^t A(s)x(s, x_0)\,ds + \sum_{i=1}^m \int_n^t B_i(s)x(s, x_0)\,dW_i(s),$$

то

$$\mathrm{P}\Big\{\sup_{t\in[n, n_1]}|x(t, x_0) - x(n, x_0)| \ge \frac{\varepsilon_n}{2}\Big\} \le \mathrm{P}\Big\{\sup_{t\in[n, n_1]}\Big|\int_n^t A(s)x(s, x_0)\,ds\Big| \ge \frac{\varepsilon_n}{4}\Big\} +$$

$$+ \mathrm{P}\Big\{\sup_{t\in[n, n_1]}\Big|\sum_{i=1}^m \int_n^t B_i(s)x(s, x_0)\,dW_i(s)\Big| \ge \frac{\varepsilon_n}{4}\Big\}. \tag{25}$$

Оскільки існує стала $A_1 > 0$ така, що

$$\sup_{t\ge 0}\|A(t)\| + \sum_{i=1}^m \sup_{t\ge 0}\|B_i(t)\| \le A_1 \tag{26}$$

(матриці $A(t)$, $B_i(t)$ обмежені на півосі за умовою), то

$$\mathrm{P}\Big\{\sup_{t\in[n, n_1]}\Big|\int_n^t A(s)x(s, x_0)\,ds\Big| \ge \frac{\varepsilon_n}{4}\Big\} \le \mathrm{P}\Big\{A_1\int_n^{n_1}|x(s, x_0)|\,ds \ge \frac{\varepsilon_n}{4}\Big\} \le$$

$$\le \frac{4A_1}{\varepsilon_n}\int_n^{n_1}\mathrm{M}|x(s, x_0)|\,ds. \tag{27}$$

Із властивостей стохастичного інтеграла для другого доданка в (25) отримаємо

$$P\left\{\sup_{t\in[n,n_1]}\left|\sum_{i=1}^{m}\int_n^t B_i(s)x(s,x_0)\,dW_i(s)\right|\geq\frac{\varepsilon_n}{4}\right\}\leq$$

$$\leq P\left\{\sum_{i=1}^{m}\sup_{t\in[n,n_1]}\left|\int_n^t B_i(s)x(s,x_0)\,dW_i(s)\right|\geq\frac{\varepsilon_n}{4}\right\}\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}P\left\{\sup_{t\in[n,n_1]}\left|\int_n^t B_i(s)x(s,x_0)\,dW_i(s)\right|\geq\frac{\varepsilon_n}{4m}\right\}\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P\left\{\sup_{t\in[n,n_1]}\left|\int_n^t\left(b_{j1}^i(s)x_1(s,x_0)+\ldots+b_{jn}^i(s)x_n(s,x_0)\right)dW_i(s)\right|\geq\frac{\varepsilon_n}{4}\right\}\leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{16n^2m^2}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n_1}M\left(b_{j1}^i(s)x_1(s,x_0)+\ldots+b_{jn}^i(s)x_n(s,x_0)\right)^2ds\leq$$

$$\leq \frac{4A_2A_1^2}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n_1}M|x(s,x_0)|^2\,ds. \qquad (28)$$

Тут верхній індекс вказує на елемент i-ї матриці $B_i(s)$, а A_2 — стала, залежна лише від розмірностей n і m простору і кількості процесів $W_i(t)$.

Із (27), (28), враховуючи (22) і (24), отримуємо

$$P\left\{\sup_{t\in[n,n_1]}|x(t,x_0)|\geq\varepsilon_n\right\}\leq\frac{4A_1}{\varepsilon_n}\int_n^{n_1}M|x(s,x_0)|\,ds+$$

$$+\frac{A_2A_1^2}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n_1}M|x(s,x_0)|^2\,ds+\frac{4}{\varepsilon_n^2}K\exp\{-\gamma n\}|x_0|^2\leq$$

$$\leq\frac{4A_1}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n_1}K^{1/2}\exp\{-\gamma s/2\}|x_0|\,ds+$$

$$+\frac{A_2A_1^2}{\varepsilon_n^2}\int_n^{n_1}K\exp\{-\gamma s\}|x_0|^2\,ds+\frac{4}{\varepsilon_n^2}K\exp\{-\gamma n\}|x_0|^2.$$

Покладемо в останніх співвідношеннях

$$\varepsilon_n = K\exp\left\{\frac{-\gamma n}{4}\right\}|x_0|$$

і перейдемо до границі при $n_1\to\infty$. Тоді, внаслідок того, що послідовність множин

$$\left\{\sup_{t\in[n,n_1]}|x(t,x_0)|\geq\varepsilon_n\right\}$$

зростаюча, маємо

$$P\left\{\sup_{t\in[n,n_1]}|x(t,x_0)|\geq K\exp\left\{\frac{-\gamma n}{4}\right\}|x_0|\right\}\leq\frac{4A_1K^{1/2}\exp\{-\gamma n/2\}}{K\exp\{-\gamma n/2\}|x_0|\gamma/2}+$$

$$+\frac{A_2\exp\{-\gamma n\}|x_0|^2A_1^2}{K^2\exp\{-\gamma n/2\}|x_0|^2\gamma}+\frac{4}{K}\exp\left\{\frac{-\gamma n}{2}\right\}. \tag{29}$$

Величина, що стоїть справа в (29), є n-м членом збіжного ряду, тому за лемою Бореля – Кантеллі існує таке скінченне число $N(\omega)$, що при $n > N(\omega)$ з імовірністю 1 виконується оцінка

$$\sup_{t\geq n}|x(t,x_0)|\leq K\exp\left\{\frac{-\gamma n}{4}\right\}|x_0|.$$

Звідси легко отримати, що з імовірністю 1

$$|x(t,x_0)|\leq K\exp\left\{\frac{-\gamma(t-1)}{4}\right\}|x_0| \qquad \forall t>N(\omega). \tag{30}$$

Оскільки $x_0\in\mathbb{R}^-$, то існують лінійно незалежні вектори з $\mathbb{R}^-$ $x_0^1,\ldots,x_0^r$, де r — розмірність підпростору, такі, що

$$x_0=\sum_{i=1}^r\alpha_ix_0^i.$$

А тому з лінійності системи (1) і єдиності сильного розв'язку випливає

$$x(t,x_0)=\sum_{i=1}^r\alpha_ix_i\left(t,x_0^i\right), \tag{31}$$

де $x_i\left(0,x_0^i\right)=x_0^i$. Для кожного з розв'язків $x_i\left(t,x_0^i\right)$ має місце оцінка (30) при $t\geq N\left(\omega,x_0^i\right)$. Тому вона виконується для всіх $x_i\left(t,x_0^i\right)$ при $t\geq N_0(\omega)=$ $=\max\left\{N_0\left(\omega,x_0^1\right),\ldots,N_0\left(\omega,x_0^r\right)\right\}$. Звідси і з зображення розв'язку $x_i\left(t,x_0^i\right)=$ $=\Omega_0^t\,x_0^i$, неперервності з імовірністю 1 матриціанта Ω_0^t випливає оцінка (21) для лінійно незалежних розв'язків $x_i\left(t,x_0^i\right)$. Скінченність з імовірністю 1 $Q(\omega)$ з (21) випливає із обмеженості на проміжку $\left[0,N_0(\omega)\right]$ з імовірністю 1 матриціанта системи (1). Оцінка (21) для довільного $x_0\in\mathbb{R}^-$ тепер легко отримується із зображення (31). Теорему доведено.

Розглянемо тепер лінійну детерміновану систему

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{32}$$

з обмеженою на півосі матрицею $A(t)$. Припустимо, що ця система експоненціально дихотомічна при $t\geq 0$. Тоді, як випливає з роботи [7], існує симетрична, гладка, обмежена при $t\geq 0$ матриця $S(t)$ така, що квадратична форма

$$\left(\left(\frac{dS}{dt}(t)+A^T(t)S(t)\right)+S(t)A(t)\right)x,x\Big) \tag{33}$$

є від'ємно визначеною при $t\geq 0$. Застосуємо дану матрицю до дослідження експоненціальної дихотомії в середньому квадратичному стохастичної системи Іто з малим параметром вигляду

$$dx = A(t)x\,dt + \mu \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x\,dW_i(t), \tag{34}$$

де матриці $B_i(t)$ обмежені на додатній півосі. Оскільки форма (33) є від'ємно визначеною, то очевидно, що при досить малих μ форма

$$\left(\left(\frac{dS}{dt}(t) + A^T(t)S(t)) + S(t)A(t) + \mu \sum_{i=1}^{m} B_i^T(t)S(t)B_i(t)\right)x, x\right)$$

є також від'ємно визначеною. Тому, беручи для системи (34) квадратичну форму $(S(t)x, x)$ і використовуючи теорему 1, можна отримати такий результат.

Теорема 3. *Якщо детермінована система* (32) *є експоненціально дихотомічною на півосі* $t \geq 0$, *то існує* $\mu_0 \geq 0$ *таке, що при* $\mu \leq \mu_0$ *стохастична система Іто* (34) *є експоненціально дихотомічною в середньому квадратичному при* $t \geq 0$.

Зауваження. Систему (34) можна розглядати як збурення детермінованої системи випадковими силами типу „білого шуму". При цьому, згідно з теоремою 3, дихотомія системи зберігається. З іншого боку, теорема 3 дає можливість звести дослідження дихотомії системи Іто до дослідження цього питання для детермінованої системи диференціальних рівнянь.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 611 с.
2. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 441 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
6. *Kozin F.* On almost sure asymptotic sample properties of diffusion processes defined by stochastic differential equations // J. Math. Kyoto Univ. – 1965. – **4**, № 3. – P. 515 – 528.
7. *Майзель Ф. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Урал. политехн. ин-та. Сер. мат. – 1954. – **51**. – С. 20 – 50.

Одержано 29.06.2000,
після доопрацювання – 22.12.2000