УДК 517.95

Р. О. Попович, І. А. Єгорченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РІВНЯНЬ ЕЙКОНАЛА

By using a new approach to group classification, we perform the symmetry analysis of equations of the form $u_a u_a = F(t, u, u_t)$ which generalize the well- known eikonal and Hamilton – Jacobi equations.

Використовуючи новий підхід до групової класифікації, проведено симетрійний аналіз рівнянь вигляду $u_a u_a = F(t, u, u_t)$, що узагальнюють відомі рівняння ейконала та Гамільтона – Якобі.

1. Вступ. Математичні моделі, зокрема диференціальні рівняння математичної фізики, часто містять параметри (числові або функціональні), які визначаються експериментально, а тому не є строго фіксованими. Теоретичний відбір математичних моделей можна виконувати на основі симетрійного принципу: серед усіх можливих значень параметрів вибирати ті, для яких математична модель має групу симетрії з наперед заданими властивостями або найширшу групу симетрії.

Проблема групової класифікації диференціальних рівнянь вперше поставлена С. Лі і частково розв'язана ним же для звичайних диференціальних рівнянь. Л. В. Овсянніков [1] ввів необхідні поняття і дав теоретичне обгрунтування для задач групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними. Широке коло таких задач для конкретних класів рівнянь розглянуто в роботах Л. В. Овсяннікова, Н. Х. Ібрагімова, В. І. Фущича та їхніх учнів (див., наприклад, [1–3]).

До останнього часу єдиним методом розв'язання задач групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними було інтегрування визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора ліївської симетрії з перебором усіх можливих випадків, що виникають. Це значно звужувало коло розв'язних задач групової класифікації. Р. З. Жданов і В. І. Лагно [4] запропонували новий підхід до групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними, який узагальнює підхід С. Лі до класифікації звичайних диференціальних рівнянь, базується на класифікації абстрактних алгебр Лі низької розмірності і особливо ефективний у випадку рівнянь з двома незалежними змінними. В роботі [5] для класифікації систем нелінійних рівнянь Лапласа було застосовано комбінований метод, в якому кількість випадків, що розглядаються при інтегруванні визначальних рівнянь, суттєво зменшується за рахунок вивчення можливої структури алгебри симетрії. В даній статті комбінований метод використовується для групової класифікації узагальнень рівнянь ейконала та Гамільтона – Якобі.

2. Постановка задачі. Розглянемо рівняння вигляду

$$u_a u_a = F(t, u, u_t) \tag{1}$$

для однієї дійсної функції $u = u(t, x)$ від $n+1$ незалежних змінних $t = x_0$ і $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$. Тут і надалі нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною. Індекси a і b змінюються від 1 до n. За індексами, що повторюються, ведеться підсумовування. Клас рівнянь (1) включає як частинні випадки деякі відомі рівняння:

$F = 2mu_t$ — рівняння Гамільтона – Якобі для вільної частинки;

$F = u_t^2 - 1$ — релятивістське рівняння Гамільтона;

$F = u_t^2$ — рівняння ейконала.

Симетрійні властивості цих рівнянь та зв'язок між ними вивчено в роботах [3, 6, 7].

Виконаємо групову класифікацію рівнянь вигляду (1) за довільним елементом — гладкою функцією $F=F(t,u,u_t)\not\equiv 0$. (Тут і надалі гладкість означає неперервну диференційовність.)

3. Ядро основних груп і група еквівалентності. Нехай інфінітезимальний оператор

$$Q = \xi^0(t,x,u)\partial_t + \xi^a(t,x,u)\partial_a + \eta(t,x,u)\partial_u$$

породжує однопараметричну групу симетрії рівняння (1). Тоді з інфінітезимального критерію інваріантності [1, 8] після переходу на багатовид, заданий рівнянням (1) в продовженому просторі, та розщеплення за незв'язними змінними отримаємо такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^a_b + \xi^b_a = 0, \qquad \xi^a_a = \xi^b_b, \quad a\neq b \tag{2}$$

(підсумовування по a і b тут не ведеться),

$$(\xi^a_t + \xi^a_u u_t)F_{u_t} - 2\xi^a_u F + 2\eta_a - 2u_t\xi^0_a = 0, \tag{3}$$

$$\xi^0 F_t + \eta F_u + \left(\eta_t + (\eta_u - \xi^0_t)u_t - \xi^0_u u_t^2\right)F_{u_t} = 2(\eta_u - \xi^1_1 - \xi^0_u u_t)F. \tag{4}$$

Якщо не фіксувати функцію F, то розщеплюючи в (3) та (4) за „змінними" $F, F_t, F_u, F_{u_t}, u_t$, отримаємо $\eta=\xi^0=0$, $\xi^1_1=0$, $\xi^a_t=\xi^a_u=0$, звідки з урахуванням (2) маємо наступне твердження.

Твердження. *Перетином максимальних груп локальних симетрій рівнянь вигляду* (1) *є група Евкліда* $E(n)$, *алгебра Лі якої*

$$A^{\ker} = e(n) = \langle \partial_a, J_{ab}=x_a\partial_b - x_b\partial_a\rangle.$$

Максимальна група еквівалентності рівнянь (1) (тобто множина локальних перетворень в просторі „змінних" t,x,u,F, що не виводять з класу рівнянь (1), причому перетворення по t,x і u не залежать від F [1]) збігається з групою, породженою сукупністю однопараметричних груп локальних симетрій системи

$$u_a u_a = F, \quad w = u_t, \quad F_a = 0, \tag{5}$$

інфінітезимальні оператори яких мають вигляд

$$\hat{Q} = \hat{\xi}^0(t,x,u)\partial_t + \hat{\xi}^a(t,x,u)\partial_a + \hat{\eta}(t,x,u)\partial_u +$$
$$+\hat{\theta}(t,x,u,w)\partial_w + \hat{\chi}(t,x,u,w,F)\partial_F.$$

З інфінітезимального критерію інваріантності для системи (5) після розщеплення за незв'язаними змінними отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора $\hat{Q}$, з яких випливає, що інфінітезимальний оператор будь-якої однопараметричної групи еквівалентності рівняння (1) є лінійною комбінацією операторів

$$\partial_a, \quad J_{ab}, \quad x_a\partial_a - 2F\partial_F, \quad \overline{\xi}\partial_t + \overline{\eta}\partial_u + 2(\overline{\eta}_u - \overline{\xi}_u u_t)F\partial_F, \tag{6}$$

де $\overline{\xi}$ і $\overline{\eta}$ — довільні гладкі функції змінних t і u. Отже, перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на параметр F, мають вигляд

$$\tilde{t} = \zeta(t,u), \quad \tilde{u} = \varphi(t,u), \quad \tilde{x} = \delta x,$$

$$\tilde{F} = \delta^{-2}(\varphi_u - \zeta_u\tilde{u}_{\tilde{t}})^2 F = \delta^{-2}\left(\frac{\zeta_t\varphi_u - \zeta_u\varphi_t}{\zeta_t + \zeta_u u_t}\right)^2 F, \tag{7}$$

де δ — ненульова стала, ζ та φ — довільні гладкі функції змінних t і u, причому $\zeta_t\varphi_u - \zeta_u\varphi_t \neq 0$.

Якщо обмежити клас рівнянь (1), наклавши додаткову умову $F_t = 0$ (цей підклас виділяється при класифікації), то для обчислення відповідної групи еквівалентності цю умову необхідно приєднати до системи (5). В результаті група еквівалентності звужується: інфінітезимальний оператор будь-якої однопараметричної групи еквівалентності рівняння (1) з $F = F(u, u_t)$ є лінійною комбінацією оператора $t\partial_t$ та операторів (6), де функції $\overline{\xi}$ і $\overline{\eta}$ тепер залежать лише від змінної u, а тому перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на параметр F, мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \hat{\partial} t + \zeta(u), \quad \tilde{u} = \varphi(u), \quad \tilde{x} = \delta x, \\ \tilde{F} &= \delta^{-2}(\varphi_u - \zeta_u \tilde{u}_{\tilde{t}})^2 F = \delta^{-2}\left(\frac{\hat{\delta}\varphi_u}{\hat{\delta} + \zeta_u u_t}\right)^2 F, \end{aligned} \tag{8}$$

де δ, $\hat{\delta}$ — ненульові сталі, ζ та φ — довільні гладкі функції змінної u, причому $\varphi_u \neq 0$.

Подальше обмеження класу рівнянь (1) може приводити до появи перетворень еквівалентності вигляду (7), відмінних від (8) (див. доведення).

4. Результат класифікації. Всі можливі випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності рівнянь (1) з точністю до перетворень еквівалентності (7) вичерпуються випадками, наведеними в таблиці.

Випадок	F	Базисні оператори симетрії
0	$F(t, u, u_t)$	$\partial_a,\ J_{ab}$
1	$e^{\delta t} f(u, u_t),\ \delta \in \{0; 1\}$	$\partial_a,\ J_{ab},\ 2\partial_t - \delta x_a\partial_a$
2	$e^u h(u_t)$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ 2\partial_u - x_a\partial_a$
3	$\lvert u\rvert^{2-\delta} h(u_t),\ \delta \neq 2$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ 2t\partial_t + 2u\partial_u + \delta x_a\partial_a$
4	$h(u_t)$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \partial_u,\ D$
5	e^{u_t}	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \partial_u,\ D,\ x_a\partial_a - 2t\partial_u$
6	$\lvert u_t\rvert^\beta,\ \beta \neq 0, 1, 2$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \partial_u,\ D,\ (\beta-2)x_a\partial_a - 2u\partial_u$
7	u_t^2	$2g_{\mu\nu}c^\mu(u)x_\nu x_\kappa\partial_\kappa - c^\kappa(u)g_{\mu\nu}x_\nu x_\kappa\partial_\kappa + g_{\mu\nu}b^{\mu\kappa}(u)x_\nu\partial_\kappa +$ $+ d(u)x_\kappa\partial_\kappa + a^\kappa(u)\partial_\kappa + \eta(u)\partial_u$
8	$\varepsilon_2 u_t^2 + \varepsilon_1$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \partial_u, D,\ J_{ua} = u\partial_a + \varepsilon_1 x_a\partial_u,\ J_{ta} = t\partial_a + \varepsilon_2 x_a\partial_t,$ $J_{ut} = u\partial_t - \varepsilon_1\varepsilon_2 t\partial_u,\ K_a = 2x_aD - s^2\partial_a,\ K_u = 2uD +$ $+ \varepsilon_1 s^2\partial_u,\ K_t = 2tD + \varepsilon_2 s^2\partial_t$, де $s^2 = x_ax_a - \varepsilon_1 u^2 - \varepsilon_2 t^2$
9	$\varepsilon_2 e^u u_t^2 + \varepsilon_1$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ t\partial_t + 2\partial_u,\ (t^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2 e^u)\partial_t + 4t\partial_u$
10	$\cos^{-2} u\, u_t^2 + 1$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \cos t \operatorname{tg} u\,\partial_t - \sin t\,\partial_u,\ \sin t \operatorname{tg} u\,\partial_t + \cos t\,\partial_u$
11	$\pm(\cos^{-2} u\, u_t^2 - 1)$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \operatorname{ch} t \operatorname{tg} u\,\partial_t + \operatorname{sh} t\,\partial_u,\ \operatorname{sh} t \operatorname{tg} u\,\partial_t + \operatorname{ch} t\,\partial_u$
12	$\operatorname{ch}^{-2} u\, u_t^2 + 1$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \operatorname{ch} t \operatorname{th} u\,\partial_t - \operatorname{sh} t\,\partial_u,\ \operatorname{sh} t \operatorname{th} u\,\partial_t - \operatorname{ch} t\,\partial_u$

У таблиці $F=F(t,u,u_t)$, $f=f(u,u_t)$, $h=h(u_t)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, δ — стала, $\varepsilon_1,\varepsilon_2=\pm 1$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\neq(-1,-1)$, $J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a$, $D=t\partial_t+u\partial_u+x_a\partial_a$.

У випадку 7 $g_{\mu\nu}$ — метричний тензор простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,n}$, тобто $g_{00}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=1$, $g_{\mu\nu}=0$, $\mu\neq\nu$; c^{μ}, $b^{\mu\kappa}$, d, a^{κ}, η — довільні гладкі функції змінної u (для того щоб оператори такого вигляду утворювали алгебру, необхідно вимагати, щоб ці функції були нескінченно диференційовними або дійсно-аналітичними); індекси μ,ν,κ змінюються від 0 до 3; ε_2 можна покласти рівним 1.

Зауважимо, що відомі рівняння (рівняння Гамільтона–Якобі й ейконала та релятивістське рівняння Гамільтона) виділяються в класі рівнянь (1) як представники класів еквівалентних рівнянь, що мають найширшу симетрію.

5. Доведення. Максимальну в сенсі Лі алгебру інваріантності рівняння (1) позначимо як $A^{\max}$. При дослідженні визначальних рівнянь (2)–(4) виникають два суттєво різних випадки: $F_{u_tu_tu_t}\neq 0$ і $F_{u_tu_tu_t}=0$.

Якщо $F_{u_tu_tu_t}\neq 0$, то з (3) і (4) випливає $\eta_a=\xi^0_a=\xi^a_t=\xi^a_u=0$, $\xi^1_{1a}=0$, отже, $A^{\max}=A^{\ker}+A^{\rm ext}$, причому $A^{\rm ext}\subset\langle\delta x_a\partial_a+\xi^0(t,u)\partial_t+\eta(t,u)\partial_u\rangle$, де δ — довільна стала, ξ і η — довільні гладкі функції змінних t і u. $A^{\ker}$ є ідеалом, а $A^{\rm ext}$ — підалгеброю алгебри $A^{\max}$, і $\forall Q\in A^{\rm ext}(Q\neq 0)\colon(\xi^0,\eta)\neq(0,0)$. Розмірність $A^{\rm ext}$ визначає розмірність розширення алгебри $A^{\max}$.

Якщо $\dim A^{\rm ext}>0$, то виберемо будь-який ненульовий оператор Q з $A^{\rm ext}$. Перетвореннями еквівалентності (7) його завжди можна звести до вигляду $Q=2\partial_t-\delta x_a\partial_a$, де $\delta\in\{0;1\}$, після чого, розв'язавши рівняння (4) з $\xi^0=2$, $\xi^a=-\delta x_a$, $\eta=0$ відносно F, отримаємо перший випадок розширення алгебри $A^{\max}$.

Нехай $\dim A^{\rm ext}>1$. Тоді $A^{\rm ext}$ обов'язково містить оператор Q з $\delta=0$. Перетвореннями еквівалентності (7) зведемо Q до оператора ∂_t. Надалі вважаємо, що $\partial_t\in A^{\rm ext}$, звідки $F_t=0$, тобто $F=F(u,u_t)$, і будемо говорити, що існує додаткове розширення симетрії, коли для такого F справджується співвідношення $\dim A^{\max}>\dim A^{\ker}+1$.

Припустимо, що $\dim A^{\rm ext}=2$, причому

$$A^{\rm ext}=\langle Q^1=\partial_t, Q^2=\delta x_a\partial_a+\xi^0(t,u)\partial_t+\eta(t,u)\partial_u\rangle \quad \text{і} \quad \eta\neq 0.$$

Якщо алгебра $A^{\rm ext}$ комутативна, то $\xi^0=0$, $\eta_t=0$, і перетворенням (8) оператор Q^2 зводиться до вигляду $\tilde{Q}^2=2\partial_u-\tilde{\delta}x_a\partial_a$, де $\tilde{\delta}\in\{0;1\}$ (оператор Q^1 при цьому не змінюється). Підставимо коефіцієнти оператора $\tilde{Q}^2$ в рівняння (4) і проінтегруємо його відносно F: $F=e^{\tilde{\delta}u}h(u_t)$, де h — гладка функція змінної u_t. Якщо $\tilde{\delta}=1$, а h не спеціалізується, то алгебра $A^{\rm ext}$ дійсно двовимірна (другий випадок розширення).

Якщо алгебра $A^{\rm ext}$ некомутативна, можна вважати, що $[Q^1,Q^2]=2Q^1$, звідки $\xi^0_t=2$, $\eta_t=0$, і перетворенням (8) оператор Q^2 зводиться до вигляду $\tilde{Q}^2=2t\partial_t+2u\partial_u+\delta x_a\partial_a$. Підставимо коефіцієнти оператора $\tilde{Q}^2$ в рівняння (4) і проінтегруємо його відносно F: $F=|x|^{2-\delta}h(u_t)$, де h — гладка функція змінної u_t. Якщо $\delta\neq 2$, а h не спеціалізується, то алгебра A^{ext} дійсно двовимірна (третій випадок розширення).

Припустимо, що $\dim A^{\text{ext}}=3$, причому

$$A^{\text{ext}} = \langle Q^i=\delta_i x_a\partial_a+\xi^{0i}(t,u)\partial_t+\eta^i(t,u)\partial_u,\ i=1,2,\ Q^3=\partial_t\rangle,$$

функції η^1 і η^2 лінійно незалежні, і рівняння $\eta^1\cdot(4.2)-\eta^2\cdot(4.1)$ є тотожністю відносно F (тут $(4.i)$ — рівняння, отримане з (4) підстановкою коефіцієнтів оператора Q^i). Внаслідок останньої умови коефіцієнти операторів Q^1 і Q^2 повинні задовольняти такі рівняння:

$$\eta^1\eta^2_t = \eta^2\eta^1_t,\qquad \eta^1(\eta^2_u-\delta_2) = \eta^2(\eta^1_u-\delta_1),$$
$$\eta^1(\eta^2_u-\xi^{02}_t) = \eta^2(\eta^1_u-\xi^{01}_t),\qquad \eta^1\xi^{02}_u = \eta^2\xi^{01}_u,$$

з яких випливає, що $(\delta_1,\delta_2)\neq(0,0)$, $\eta^i_t=0$, $\xi^{0i}_t=\delta_i$, $i=1,2$, $\eta^1=(\delta_1-\delta_2\varphi)/\varphi_u$, $\eta^2=\varphi\eta^1$ для деякої функції $\varphi=\varphi(u)\neq\text{const}$. Замінимо при необхідності оператори Q^1 і Q^2 їх лінійними комбінаціями $\tilde{Q}^1$ і $\tilde{Q}^2$ таким чином, щоб $\tilde{\delta}_1=1$, $\tilde{\delta}_2=0$. Перетворенням (8) оператори Q^1 і Q^2 зводяться до вигляду $\hat{Q}^1=t\partial_t+u\partial_u+\delta x_a\partial_a$, $\hat{Q}^2=\partial_u$. Після підстановки коефіцієнтів операторів $\hat{Q}^1$ і $\hat{Q}^2$ в рівняння (4) отримаємо одне рівняння на функцію F: $F_u=0$, тобто $F=h(u_t)$, де h — гладка функція змінної u_t. Якщо h не спеціалізується, то алгебра A^{ext} дійсно тривимірна (четвертий випадок розширення).

Лема 1. *В усіх інших випадках, коли* $\dim A^{\text{ext}}>1$, *функція* F *задовольняє рівняння*

$$(Au_t^2+Bu_t+C)F_{u_t} = (2Au_t+D)F, \tag{9}$$

де A,B,C,D *— довільні гладкі функції змінної* u. *Перетворення* (8) *є перетворенням еквівалентності на множині рівнянь вигляду* (9).

При інтегруванні рівняння (9) виникають чотири нееквівалентні випадки, коли $F_{u_tu_tu_t}\neq 0$.

1. $F=\alpha(u)e^{u_t}$, де $\alpha>0$. В цьому випадку додаткове розширення симетрії можливе лише для $\alpha=A|u|^{\nu}e^{\mu u}$, де $A,\nu,\mu=\text{const}$, $A>0$. Масштабними перетвореннями за змінними x_a зробимо $A=1$. Якщо $\nu=0$, то також можна покласти $\mu=0$ (коли це не так, достатньо виконати перетворення $\tilde{t}=e^{\mu t}/\mu$, $\tilde{u}=e^{\mu t}(u+2t-2/\mu)$; тут і надалі змінні x_a не перетворюються, коли це не обумовлено спеціально). В результаті отримаємо п'ятий випадок розширення. Для $\mu\nu\neq 0$ додаткове розширення симетрії існує лише при $\nu=2$, але тоді можна покласти $\mu=0$ (відповідне перетворення еквівалентності $\tilde{t}=e^{\mu t}/\mu$, $\tilde{u}=e^{\mu t}u$). Якщо $\nu\neq 0$ і $\mu=0$, рівняння (1) має таку саму алгебру симетрії, як і в більш загальному третьому випадку розширення.

2. $F=\alpha(u)|u_t+\delta|^{\beta(u)}$, де $\delta\in\{0;1\}$, $\alpha>0$. Для додаткового розширення симетрії необхідно, щоб $\beta=\text{const}$ (причому $\beta\notin\{0;1;2\}$, тому що інакше

$F_{u_t u_t u_t} = 0$). Тоді будь-яке рівняння (1) з $\delta = 0$ еквівалентне такому ж рівнянню, в якому додатково $\alpha = 1$ (шостий випадок розширення). До цього ж випадку розширення зводяться також рівняння (1) з $\delta \neq 0$, якщо $(\alpha'\alpha)' = 0$. Дійсно, тоді $\alpha = A e^{\mu u}$ і можна покласти $A = 1$ (на підставі масштабних перетворень за змінними x_a), $\mu = 0$ і $\delta = 0$ (відповідне перетворення еквівалентності при $\mu \neq 0$ має вигляд $\tilde{t} = e^{\mu\delta t/\beta}\beta/(\mu\delta)$, $\tilde{u} = e^{\mu(u+\delta t)/(\beta-2)}(\beta-2)/\mu$, а при $\mu = 0 - \tilde{t} = t$, $\tilde{u} = u + \delta t$). Якщо $\delta \neq 0$ і $(\alpha'\alpha)' \neq 0$, то нових випадків розширення симетрії не отримаємо.

3. $F = \alpha(u)e^{\beta(u)\operatorname{arctg} u_t}$, де $\alpha > 0$, $\beta \not\equiv 0$. Додаткове розширення симетрії існує лише за умов $\beta = \mathrm{const}$ і α — показникова або степенева функція, але воно не більше за розширення для більш загальних випадків $2-4$ з таблиці, тому виокремлювати цей випадок не потрібно.

4. $F = \alpha(u)u_t^2 e^{u_t^{-1}}$, де $\alpha > 0$. Рівняння з такою правою частиною еквівалентне рівнянню з $F = e^{u_t}$. Еквівалентність визначається перетворенням (типу (7)) $\tilde{t} = u$, $\tilde{u} = t + \int \ln\alpha(u)du$.

Випадок $F_{u_t u_t u_t} \neq 0$ розглянуто повністю.

Нехай надалі $F_{u_t u_t u_t} = 0$, тобто

$$F = A(t,u)u_t^2 + B(t,u)u_t + C(t,u), \tag{10}$$

де A, B, C — гладкі функції змінних t і u. Розщеплюючи в рівняннях (3) та (4) за змінною u_t, додатково до (2) отримуємо таку систему визначальних рівнянь:

$$\xi^0_a = A\xi^a_t - \frac{1}{2}B\xi^a_u, \quad \eta_a = C\xi^a_u - \frac{1}{2}B\xi^a_t, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} A_t\xi^0 + A_u\eta + B\xi^0_u = 2A(\xi^0_t - \xi^1_1), \\ C_t\xi^0 + C_u\eta + B\eta_t = 2C(\eta_u - \xi^1_1), \\ B_t\xi^0 + B_u\eta + 2A\eta_t + 2C\xi^0_u = B(\eta_u + \xi^0_t - 2\xi^1_1). \end{gathered} \tag{12}$$

Група еквівалентності множини рівнянь (1) з квадратичними по u_t правими частинами збігається з загальною групою еквівалентності рівнянь (1). Під дією перетворення (7) коефіцієнти A, B, C змінюються таким чином:

$$\begin{gathered} \delta^2\tilde{A} = A\zeta_t^2 - B\zeta_t\zeta_u + C\zeta_u^2, \\ \delta^2\tilde{B} = B(\zeta_t\varphi_u + \zeta_u\varphi_t) - 2A\zeta_t\varphi_t - 2A\zeta_u\varphi_u, \\ \delta^2\tilde{C} = A\varphi_t^2 - B\varphi_t\varphi_u + C\varphi_u^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Умова $B^2 - 4AC = 0$ інваріантна відносно перетворень типу (13), що породжуються перетвореннями еквівалентності (7), тому вона є класифікуючою умовою. Якщо $B^2 - 4AC = 0$, то можна покласти $A = 1$, $B = 0$, звідки $C = 0$ (сьомий випадок розширення). Надалі $B^2 - 4AC \neq 0$.

Лема 2. *За умови* $B^2 - 4AC \neq 0$ *з рівнянь* (2) *і* (11) *випливає, що коефіцієнти будь-якого оператора симетрії рівняння* (1) *мають вигляд*

$$\xi^a = 2\gamma_b x_b x_a - \gamma_a x_b x_b + \sigma_{ab} x_b + \beta x_a + \alpha^a,$$

$$\xi^0 = \frac{1}{2}\left(A\beta_t - \frac{1}{2}B\beta_u\right)x_a x_a + \left(A\alpha_t^a - \frac{1}{2}B\alpha_u^a\right)x_a + \alpha^0, \tag{14}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(C\beta_u - \frac{1}{2}B\beta_t\right)x_a x_a + \left(C\alpha_u^a - \frac{1}{2}B\alpha_t^a\right)x_a + \alpha^4,$$

де γ_a, σ_{ab} — *сталі,* $\beta, \alpha^0, \alpha^a, \alpha^4$ — *гладкі функції змінних* t *і* u.

Підставимо вирази (14) в систему (12) і розщепимо за змінними x_a. В результаті отримаємо $n+2$ системи однакової структури

$$H^1 A_t + H^2 A_u + H_u^1 B = 2(H_t^1 - \lambda)A,$$

$$H^1 C_t + H^2 C_u + H_t^2 B = 2(H_u^2 - \lambda)C, \tag{15}$$

$$H^1 B_t + H^2 B_u + 2H_t^2 A + 2H_u^1 C = (H_t^1 + H_u^2 - 2\lambda)B,$$

де H^1, H^2 і λ набувають таких значень:

$$H^1 = A\beta_t - \frac{1}{2}B\beta_u, \quad H^2 = C\beta_u - \frac{1}{2}B\beta_t, \quad \lambda = 0,$$

$$H^1 = A\alpha_t^a - \frac{1}{2}B\alpha_u^a, \quad H^2 = C\alpha_u^a - \frac{1}{2}B\alpha_t^a, \quad \lambda = 2\gamma_a, \tag{16}$$

$$H^1 = \alpha^0, \quad H^2 = \alpha^4, \quad \lambda = \beta.$$

Досліджуючи системи визначальних рівнянь (15), (16), отримуємо наступні твердження.

Лема 3. *Якщо* $\dim A^{\max} > \dim A^{\ker}$, *то рівняння* (1) *за умови* (10) *еквівалентне такому ж рівнянню, в якому додатково* $A = e^{\delta t}\hat{A}(u)$, $B = e^{\delta t}\hat{B}(u)$, $C = e^{\delta t}\hat{C}(u)$ *і для якого* $A^{\max} \ni 2\partial_t - \delta x_a\partial_a$ (*при цьому якщо функції* $\hat{A}(u)$, $\hat{B}(u)$, $\hat{C}(u)$ *не конкретизуються, то* $A^{\max} = \langle \partial_a, J_{ab}, 2\partial_t - \delta x_a\partial_a \rangle$ — *перший випадок розширення*).

Лема 4. *Якщо* $\dim A^{\max} > \dim A^{\ker} + 1$, *то рівняння* (1) *за умови* (10) *еквівалентне такому ж рівнянню, в якому додатково* $A_t = 0$, $B_t = 0$, $C_t = 0$.

З лем 3 і 4 випливає, що для завершення класифікації достатньо дослідити рівняння (1) з правими частинами вигляду $F = A(u)u_t^2 + B(u)u_t + C(u)$, де A, B, C — гладкі функції змінної u, $B^2 - 4AC \neq 0$. Група еквівалентності множини цих рівнянь збігається з загальною групою еквівалентності рівнянь (1), праві частини яких не залежать від t. Під дією перетворення (8) коефіцієнти A, B, C змінюються таким чином:

$$\delta^2\tilde{A} = A\hat{\delta}^2 - B\hat{\delta}\zeta_u + C\zeta_u^2, \quad \delta^2\tilde{B} = B\hat{\delta}\varphi_u - 2C\zeta_u\varphi_u, \quad \delta^2\tilde{C} = C\varphi_u^2,$$

а тому додатково можна вважати, що $B = 0$, $C = \varepsilon_1 = \pm 1$. Отже, надалі $F = A(u)u_t^2 + \varepsilon_1$, де $A \neq 0$.

Умова $A_u = 0$ дає восьмий випадок розширення симетрії.

Випадок, коли $\exists \mu = \text{const}: (u+\mu)A_u + 2A = 0$, зводиться до випадку $A_u = 0$ з допомогою перетворення еквівалентності $\tilde{t} = u\,\text{sh}\,t$, $\tilde{u} = u\,\text{ch}\,t$, якщо $\varepsilon_1 A < 0$, або $\tilde{t} = u\sin t$, $\tilde{u} = u\cos t$, якщо $\varepsilon_1 A > 0$.

Випадок, коли $\exists\mu, \nu = \text{const}\,(\nu \neq 0, 2): (u+\mu)A_u + \nu A = 0$, зводиться до більш загального випадку 3 з таблиці з допомогою перетворення еквівалентності $\tilde{t} = t$, $\tilde{u} = |u+\mu|^{1-\nu/2}$.

Умова $(A_u/A)_u = 0$, $A_u \neq 0$ дає дев'ятий випадок розширення симетрії.

Нехай функція A задовольняє рівняння $A_u/A = \nu A + \mu$ для деяких ненульових констант μ і ν. Будь-який розв'язок цього рівняння в залежності від значень констант μ і ν еквівалентний (за зсувами та масштабними перетвореннями за змінною u) одній з таких функцій:

$$\frac{\varepsilon_2}{\mathrm{ch}^2 u}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\mathrm{sh}^2 u}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\cos^2 u}, \quad \text{де} \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (-1, -1). \tag{17}$$

Нехай $\varepsilon_0 = 1$ для перших двох функцій та $\varepsilon_0 = -1$ — для третьої.

Лема 5. *Рівняння* (1) *з правими частинами* $A(u)u_t^2 + \varepsilon_1$ *і* $\tilde{A}(u)u_t^2 + \tilde{\varepsilon}_1$, *де* A *і* $\tilde{A}$ *вибрані з набору функцій* (17), *еквівалентні тоді і тільки тоді, коли* $\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2$.

Внаслідок леми 5 випадки 10 – 12 таблиці вичерпують всі можливі нееквівалентні рівняння з цього класу.

Для будь-яких інших функцій $A = A(u)$ розширення симетрії рівняння (1) не існує.

Нееквівалентність випадків розширення, наведених в таблиці, де це не доведено безпосередньо через застосування перетворень еквівалентності, очевидно випливає з неізоморфності відповідних максимальних алгебр симетрії, зокрема їх різної розмірності.

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1989. – **34**. – С. 3–83.
3. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
4. *Zhdanov R. Z., Lahno V. I.* Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.
5. *Попович Р. О., Черніга Р. М.* Повна класифікація симетрій Лі систем нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа // Групові та аналітичні методи в математичній фізиці: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – **36**. – С. 212–221.
6. *Boyer C. P., Penafiel M. N.* Conformal symmetry of the Hamilton–Jacobi equation and quantization // Nuovo cim. B. – 1976. – **31**, № 1. – P. 195–210.
7. *Fushchich W. I., Shtelen W. M.* The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lett. nuovo cim. – 1982. – **34**, № 16. – P. 498.
8. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

Одержано 23.05.2000,
після доопрацювання — 17.11.2000