УДК 517.95

М. М. Бокало, В. М. Дмитрів (Львів. нац. ун-т)

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ РІЗНОКОМПОНЕНТНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ З ФУНКЦІОНАЛАМИ

We investigate the well-posedness of a problem without initial conditions for a system of functional-differential equations of various types. Each of equations consists of two parts, the first of which has the same structure as a parabolic equation or an ordinary differential equation with parameters and the second contains functionals defined on a space of functions continuous in space arguments.

Досліджено коректність задачі без початкових умов для системи диференціально-функціональних рівнянь різних типів. Кожне рівняння складається з двох частин, перша з яких має структуру параболічного рівняння або звичайного диференціального рівняння, залежного від параметрів, а друга містить фунціонали, які визначені на просторі неперервних за просторовими змінними функцій.

1. Вступ. У природі існують процеси, що описуються різнокомпонентними системами рівнянь, тобто системами, до складу яких входять підсистеми рівнянь різних типів, наприклад підсистеми рівнянь параболічного типу та звичайних диференціальних рівнянь [1, 2]. Більше того, деякі з цих процесів описуються функціонально-диференціальними рівняннями, що містять похідні та певний функціонал від шуканої функції. Гранично-початкові задачі для різноманітних систем рівнянь дифузії з функціоналами вивчались, наприклад, у роботах [3 – 5]. У даній роботі досліджується коректність задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для таких систем. Зауважимо, що така задача для рівнянь та систем параболічного типу розглядалась у багатьох роботах (див., наприклад, [6, 7]).

Введемо позначення і поняття, які будуть тут використовуватись. Нехай D — область у просторі $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Через $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, де α — число з проміжку $[0,1]$, позначатимемо простори функцій, які разом з відповідними похідними є неперервними на $\overline{D}$, якщо $\alpha = 0$, і неперервними за Гельдером на $\overline{D}$ з показником α, якщо $\alpha > 0$ (означення див. у [8, с. 16]), а норми в цих просторах — відповідно через $\|\cdot\|^{D}_{\alpha,\alpha/2}$, $\|\cdot\|^{D}_{\alpha,1+\alpha/2}$, $\|\cdot\|^{D}_{2+\alpha,1+\alpha/2}$. Під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{D})$ $\left(C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{D}), C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{D})\right)$, якщо D — необмежена область, розумітимемо простір функцій, які визначені на $\overline{D}$ і їх звуження на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D належать простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$ $\left(C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'}), C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})\right)$, де $\alpha \in [0,1]$. Домовимось, що $C(\overline{D}) \overset{\mathrm{df}}{=} C^{0,0}(\overline{D})$, $C_{\mathrm{loc}}(\overline{D}) \overset{\mathrm{df}}{=} C^{0,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{D})$. Якщо Q — об'єднання області D з частиною своєї межі, то через $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ $\left(C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q), C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)\right)$ позначатимемо простір функцій, звуження яких на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D такої, що $\overline{D'} \subset Q$, належать $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$ $\left(C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'}), C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})\right)$, де $\alpha \in [0,1]$.

Будемо говорити, що межа $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ належить класу $C^{2+\alpha}$, якщо її можна покрити скінченною кількістю поверхонь, кожна з яких задається рівнянням $x_i = h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ для деякого $i \in \{1, \ldots, n\}$, де $h \in C^{2+\alpha}(\overline{K})$, K — область у просторі відповідних змінних.

Якщо W — деякий простір, то через $[W]^m$, $m \in \mathbb{N}$, позначимо декартів степінь простору W (декартів добуток самого на себе m разів). Запис $w \in [W]^m$

означатиме, що $w = \mathrm{col}\,(w_1, \dots, w_m)$— вектор-стовпець з компонентами $w_i \in W$, $i = 1, \dots, m$ $([\mathbb{R}]^m = \mathbb{R}^m)$. Введемо позначення: $|w| = \max_{1 \le i \le m} |w_i|$ для довільного вектора $w = \mathrm{col}\,(w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m$. Домовимось писати $u < v$ для u, $v \in \mathbb{R}^m$, якщо $u_i < v_i$, $i = 1, \dots, m$, а нерівність $u \le v$ означатиме, що $u_i \le v_i$, $i = 1, \dots, m$.

2. Постановка задачі і формулювання основних результатів. Нехай $Q = \Omega \times (-\infty, T]$, де $0 < T < +\infty$ і Ω — обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n_x$ з гладкою межею $\partial\Omega$, $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T]$.

Розглянемо задачу Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь дифузії з функціоналами

$$P_i w(x,t) \equiv \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t) \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t) \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k} +$$

$$+ a_i(x,t) u_i(x,t) - f_i(x, t, w(x,t), l_i(t, w(\cdot, t))) = \hat{f}_i(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$G_j w(x,t) \equiv \frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} + c_j(x,t) v_j(x,t) - g_j\big(x, t, w(x,t), l_{M+j}(t, w(\cdot, t))\big) =$$

$$= \hat{g}_j(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j = 1, \dots, L, \tag{2}$$

$$u_i(x,t) = h_i(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i = 1, \dots, M. \tag{3}$$

Тут M, L — довільні натуральні числа; $w = \mathrm{col}\,(u, v)$, $u = \mathrm{col}\,(u_1, \dots, u_M)$, $v = \mathrm{col}\,(v_1, \dots, v_L)$; $l_k(t, \cdot) : \left[C(\overline{\Omega}) \right]^{M+L} \to \mathbb{R}$ — сім'я $(t \in (-\infty, T])$ функціоналів $(k = 1, \dots, M + L)$; для кожного $i = 1, \dots, M$ $(j = 1, \dots, L)$ $f_i(x, t, \xi, \eta)$ $(g_i(x, t, \xi, \eta))$ — функція, яка визначена для $(x,t) \in Q$ $(\overline{Q})$, $\xi \in \mathbb{R}^{m+L}$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1) – (3) *називається вектор-функція* $w = \mathrm{col}\,(u, v)$, *де* $u = \mathrm{col}\,(u_1, \dots, u_M) \in \left[C^{2,1}_{\mathrm{loc}}(Q) \cap C_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \right]^M$, $v = \mathrm{col}\,(v_1, \dots, v_L) \in \left[C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \right]^L$, *яка задовольняє рівняння системи* (1), (2) *та граничну умову* (3).

На вихідні дані накладаємо такі умови:

A1) функції $a_{i,kl}$, $a_{i,k}$, a_i неперервні на Q, а функція c_j — на $\overline{Q}$, $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, L$; $k, l = 1, \dots, n$;

A2) для кожного $i = \{1, \dots, M\}$ $a_{i,kl} \equiv a_{i,lk}$, $k, l = 1, \dots, n$, і в кожній точці $(x,t) \in Q$ для всіх $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t) \xi_k \xi_l \ge \mu_i(t) \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2,$$

де μ_i — невід'ємна на $(-\infty, T]$ функція;

A3) для кожного $i = \{1, \dots, M\}$, $j = \{1, \dots, L\}$, функція $f_i(x, t, \xi, \eta)$ $\big(g_j(x, t, \xi, \eta)\big)$ неперервна на $Q \times \mathbb{R}^{M+L}$ $\left(\overline{Q} \times \mathbb{R}^{M+L}\right)$ та диференційовна там по ξ та η, причому частинні похідні $\partial f_i / \partial \xi_1, \dots, \partial f_i / \partial \xi_{M+L}$, $\partial f_i / \partial \eta$ $\big(\partial g_j / \partial \xi_1, \dots, \partial g_j / \partial \xi_{M+L}, \partial g_j / \partial \eta\big)$ обмежені за змінними ξ і η для кожної (фіксованої) точки $(x, t) \in Q$ $((x, t) \in (\overline{Q}))$; крім цього, $\partial f_i/\partial\xi_1 \geq 0, \ldots, \partial f_i/\partial\xi_{M+L} \geq 0$, $\partial f_i/\partial\eta \geq 0$ $\left(\partial g_j/\partial\xi_1 \geq 0, \ldots, \partial g_j/\partial\xi_{M+L} \geq 0, \partial g_j/\partial\eta \geq 0\right)$; $f_i(x, t, 0, 0) = 0$, $(x, t) \in Q$ $\left(g_j(x, t, 0, 0) = 0,\ (x, t) \in \overline{Q}\right)$;

A4) для кожного $k \in \{1, \ldots, M+L\}$ і $t \in (-\infty; T]$ функціонал $l_k(t, \cdot)$ лінійний, неперервний та неспадний; для будь-якого елемента $v \in C(\overline{\Omega})$ і $k \in \{1, \ldots, M+L\}$ функція $l_k(t, v)$, $t \in (-\infty; T]$, неперервна; для довільного $k \in \{1, \ldots, M+L\}$ і будь-яких $v \in C(\overline{\Omega})$ $|l_k(t, v)| \leq l(t)\|v\|_{C(\overline{\Omega})}$, $t \in (-\infty; T]$, де функція $l(t)$, $t \in (-\infty; T]$, обмежена на обмежених підмножинах з $t \in (-\infty; T]$;

A5) $$\inf_{(x,t)\in Q}\left(a_i(x, t) - f_i^*(x, t)\right) = a_0 > -\infty, \quad i = 1, \ldots, M,$$

$$\inf_{(x,t)\in \overline{Q}}\left(c_j(x, t) - g_j^*(x, t)\right) = a_0 > -\infty, \quad j = 1, \ldots, L,$$

де

$$f_i^*(x, t) \overset{\text{df}}{=} \sup_{(\xi,\eta)\in R^{M+L+1}}\left[\sum_{k=1}^{M+L}\frac{\partial f_i(x, t, \xi, \eta)}{\partial \xi_k} + l_i(t, \theta)\frac{\partial f_i(x, t, \xi, \eta)}{\partial \eta}\right], \quad (x, t) \in Q,$$

$$g_j^*(x, t) \overset{\text{df}}{=} \sup_{(\xi,\eta)\in R^{M+L+1}}\left[\sum_{k=1}^{M+L}\frac{\partial g_j(x, t, \xi, \eta)}{\partial \xi_k} + l_{M+j}(t, \theta)\frac{\partial g_j(x, t, \xi, \eta)}{\partial \eta}\right], \ (x, t) \in \overline{Q},$$

а

$$\theta \overset{\text{df}}{=} \operatorname{col}(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{M+L}, \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, L;$$

A6) $$\hat{f} = \operatorname{col}\left(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_M\right) \in \left[C_{\text{loc}}(Q)\right]^M, \qquad \hat{g} = \operatorname{col}(\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_L) \in \left[C_{\text{loc}}(\overline{Q})\right]^L,$$

$$h = \operatorname{col}(h_1, \ldots, h_M) \in \left[C_{\text{loc}}(\Sigma)\right]^M.$$

***Зауваження* 1.** Важливим прикладом функціоналів l_k, $k = 1, \ldots, M + L$, які задовольняють умову A4), є функціонали

$$l_k(t, w(\cdot, t)) = \sum_{m=1}^{M}\int_\Omega K_{k,m}(y, t)u_m(y, t)\,dy + \sum_{l=1}^{L}\int_\Omega K_{k,M+l}(y, t)v_l(y, t)\,dy,$$

$$k = 1, \ldots, M+L,$$

де $K_{m,l} \in C(\overline{Q})$ і $K_{m,l} \geq 0$, $m, l = 1, \ldots, M+L$. Якщо $f_i(x, t, \xi, \eta) = b_i(x, t)\eta$ та $g_j(x, t, \xi, \eta) = d_j(x, t)\eta$, де $b_i \in C_{\text{loc}}(Q)$, $d_j \in C(\overline{Q})$ — невід'ємні функції, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, L$, то умова A5) буде мати вигляд

$$\inf_{(x,t)\in Q}\left(a_i(x, t) - b_i(x, t)\int_\Omega\sum_{k=1}^{M+L}K_{i,k}(y, t)\,dy\right) = a_0 > -\infty, \quad i = 1, \ldots, M,$$

$$\inf_{(x,t)\in \overline{Q}}\left(c_j(x, t) - d_j(x, t)\int_\Omega\sum_{k=1}^{M+L}K_{M+j,k}(y, t)\,dy\right) = a_0 > -\infty, \quad j = 1, \ldots, L.$$

Іншим прикладом функціоналів, які задовольняють умову A4), є

$$l_k(t, w(\cdot, t)) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{\nu=1}^{p} K_{k,m}^{\nu}(t) u_m(x^{\nu}, t) + \sum_{l=1}^{L} \sum_{\nu=1}^{p} K_{k,M+l}^{\nu}(t) v_l(x^{\nu}, t),$$

$$k = 1, \dots, M+L,$$

де $p \in \mathbb{N}$, $x^{\nu} \in \Omega$, $\nu = 1, \dots, p$, $K_{k,m}^{\nu} \in C((-\infty; T])$, $K_{k,m}^{\nu} \geq 0$, $k, m = 1, \dots, M + L$, $\nu = 1, \dots, p$.

Далі будемо припускати, що виконуються умови A1) – A6), і часто вживатимемо такі позначення:

$$Pw(x, t) \stackrel{\text{df}}{=} \operatorname{col}(P_1 w(t, x), \dots, P_M w(x, t)), \quad (x, t) \in Q,$$

$$Gw(x, t) \stackrel{\text{df}}{=} \operatorname{col}(G_1 w(t, x), \dots, G_L w(x, t)), \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Тоді задачу (1) – (3) можна компактно записати у вигляді

$$Pw(x, t) = \hat{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad Gw(x, t) = \hat{g}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q};$$

$$u(x, t) = h(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma,$$

де $w = \operatorname{col}(u, v) \in W_{\text{loc}}(Q) \stackrel{\text{df}}{=} \left[C_{\text{loc}}^{2,1}(Q) \cap C_{\text{loc}}(\overline{Q}) \right]^M \times \left[C_{\text{loc}}^{0,1}(\overline{Q}) \right]^L$.

Задачу (1) – (3) нам зручно буде трактувати таким чином: для заданих вектор-функцій $\hat{f}$, $\hat{g}$ і h знайти розв'язок $w = \operatorname{col}(u, v)$ системи рівнянь (1), (2), який задовольняє умову (3). Коротко це записуватимемо $w = RS(\hat{f}, \hat{g}, h)$.

Сформулюємо основні результати. Але спочатку введемо ще один простір функцій. Нехай H — множина, яка дорівнює одній з трьох: Q, $\overline{Q}$ або Σ; s — будь-яке натуральне число; ν — довільне дійсне число. Позначимо $E_{\nu}(H; s) = \{q \in [C_{\text{loc}}(H)]^s$: існує стала $C = C(q) \geq 0$ така, що $|q(x, t)| \leq Ce^{-\nu t}$ для всіх $(x, t) \in H\}$.

Теорема 1 (апріорна оцінка розв'язку). *Нехай для деякого* $\nu < a_0$ $\hat{f} \in E_{\nu}(Q; M)$, $\hat{g} \in E_{\nu}(\overline{Q}; L)$ *і* $h \in E_{\nu}(\Sigma; M)$. *Тоді для вектор-функції* $w = RS(\hat{f}, \hat{g}, h)$ *з класу* $E_{\nu}(\overline{Q}; M + L)$ *справджується оцінка*

$$|w(x, t)| \leq \max \left\{ \sup_{(y,\tau) \in \Sigma} \left| h(y, \tau) e^{\nu\tau} \right|, \sup_{(y,\tau) \in Q} \frac{\left| \hat{f}(y, \tau) e^{\nu\tau} \right|}{a_0 - \nu}, \right.$$

$$\left. \sup_{(y,\tau) \in Q} \frac{\left| \hat{g}(y, \tau) e^{\nu\tau} \right|}{a_0 - \nu} \right\} e^{-\nu t} \equiv M_0 e^{-\nu t} \tag{4}$$

для всіх $(x, t) \in \overline{Q}$.

Теорема 2 (єдиність розв'язку). *Розв'язок задачі* (1) – (3) *в класі* $E_{\nu}(\overline{Q}; M + L)$, *де* $\nu < a_0$, *єдиний.*

Розглянемо для довільних сталих $K_0, K_1 > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, простір функцій $C^{\alpha, \alpha/2, 1, 1}(\overline{Q} \times [-K_0, K_0]^{M+L} \times [-K_1, K_1]) \stackrel{\text{df}}{=} \{ f(x, t, \xi, \eta)$, $(x, t) \in \overline{Q}$, $\xi \in \mathbb{R}^{M+L}$, $\eta \in \mathbb{R}$: існує стала $K > 0$ така, що $|f(x_1, t_1, \xi, \eta) - f(x_2, t_2, \xi, \eta)| \leq K\left[|x_1 - x_2|^{\alpha} + |t_1 - t_2|^{\alpha/2} \right]$ $\forall (x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \overline{Q}$, $(\xi, \eta) \in [-K_0, K_0]^{M+L} \times [-K_1, K_1]$, і функція f та її похідні $\partial f / \partial \xi_k$, $k = 1, \dots, M + L$, $\partial f / \partial \eta$ — неперервні та обмежені на $\overline{Q} \times [-K_0, K_0] \times [-K_1, K_1]\}$.

Теорема 3 (існування розв'язку). *Припустимо, що для деяких* $\alpha \in (0, 1]$ *і* $\nu < a_0$ *вихідні дані задачі* (1) – (3) *додатково задовольняють умови*:

B1) $a_{i,kl},\ a_{i,k},\ a_i,\ c_j \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$; $\partial a_{i,kl}/\partial x_s \in C(\overline{Q})$; $\mu_i(t) \geq \mu_0 \equiv \text{const} > 0$ $\forall t \in (-\infty, T]$, $i = 1, \ldots, M$; $j = 1, \ldots, L$; $k, l, s = 1, \ldots, n$;

B2) $f_i(x, t, \xi e^{-\nu t}, \eta e^{-\nu t})e^{\nu t}$, $g_j(x, t, \xi e^{-\nu t}, \eta e^{-\nu t})e^{\nu t} \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}\big(\overline{Q} \times [-K_0, K_0]^{M+L} \times [-K_1, K_1]\big)$ *для будь-яких сталих* $K_0, K_1 > 0$, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, L$;

B3) *функція* l *з умови* A4) *обмежена; для будь-яких* $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$ *і довільного елемента* $v \in C(\overline{Q}) : |l_k(t_1, v) - l_k(t_2, v)| \leq C_0 \cdot |t_1 - t_2|^{\alpha/2} \|v\|_{C(\overline{\Omega})}$, *де* $C_0 = \text{const} \geq 0$ *не залежить від* t_1, t_2 *і* v, $k = 1, \ldots, M + L$;

B4) $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$;

B5) $\operatorname{col}\big(e^{\nu t}\hat{f}, e^{\nu t}\hat{g}\big) \in \big[C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})\big]^{M+L}$, $e^{\nu t}h \in \big[C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(\overline{Q})\big]^M$.

Тоді існує (єдиний) розв'язок $w = \operatorname{col}(u, v)$ *задачі* (1) – (3) *і він належить простору* $\big[C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(\overline{Q})\big]^M \times \big[C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(\overline{Q})\big]^L \cap E_\nu(\overline{Q}; M + L)$.

Наслідок. *Якщо* $T = +\infty$ *і вихідні дані задачі* (1) – (3) *задовольняють умови теореми* 3 *з* $\nu = 0$ $(a_0 > 0)$ *та є періодичними по* t *з періодом* ω *функціями, то існує единий* ω*-періодичний по* t *розв'язок задачі* (1) – (3).

Нехай для довільного ν Π_ν — простір вектор-функцій $\operatorname{col}\big(\hat{f}, \hat{g}, h\big)$ таких, що $\operatorname{col}\big(e^{\nu t}\hat{f}, e^{\nu t}\hat{g}, e^{\nu t}h\big) \in \big[C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})\big]^{M+L} \times \big[C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Sigma})\big]^M$. Припустимо, що справджуються умови B1) – B4). Тоді для будь-якої вектор-функції $\operatorname{col}\big(\hat{f}, \hat{g}, h\big) \in \Pi_\nu$, де $\nu < a_0$, існує єдина вектор-функція w така, що $w = RS\big(\hat{f}, \hat{g}, h\big)$ і $w \in E_\nu(Q; M + L)$.

Означення 2. *Будемо говорити, що в класі* $E_\nu(Q; M + L)$ $(\nu < a_0)$ *розв'язок задачі* (1) – (3) *неперервно залежить від вихідних даних, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що для будь-яких наборів вихідних даних* $\operatorname{col}\big(\hat{f}^1, \hat{g}^1, h^1\big)$, $\operatorname{col}\big(\hat{f}^2, \hat{g}^2, h^2\big) \in \Pi_\nu$ *з того, що*

$$\sup_{(x,t)\in Q}\big|\hat{f}^1(x,t) - \hat{f}^2(x,t)\big|e^{\nu t} < \delta, \qquad \sup_{(x,t)\in Q}\big|\hat{g}^1(x,t) - \hat{g}^2(x,t)\big|e^{\nu t} < \delta,$$

$$\sup_{(x,t)\in\Sigma}\big|h^1(x,t) - h^2(x,t)\big|e^{\nu t} < \delta,$$

випливає нерівність

$$\sup_{(x,t)\in Q}\big|w^1(x,t) - w^2(x,t)\big|e^{\nu t} < \varepsilon,$$

де $w^i = RS\big(\hat{f}^i, \hat{g}^i, h^i\big)$, $w^i \in E_\nu(Q; M + L)$, $i = 1, 2$.

Теорема 4 (неперервна залежність від вихідних даних). *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді в класі* $E_\nu(Q; M + L)$ *розв'язок задачі* (1) – (3) *неперервно залежить від вихідних даних.*

3. Допоміжні твердження.

Зауваження 2. З леми Адамара (див. [9]) випливає, що для будь-яких $\xi^l = \operatorname{col}\big(\xi^l_1, \ldots, \xi^l_{M+L}\big) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $\eta^l \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2$

$$f_i(x,t,\xi^1,\eta^1) - f_i(x,t,\xi^2,\eta^2) = \sum_{k=1}^{M+L} \Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2)\left(\xi_k^1 - \xi_k^2\right) +$$
$$+ \Psi_i(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2)\left(\eta^1 - \eta^2\right),$$

де

$$\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \int_0^1 \frac{\partial f_i\left(x,t,\xi^1 + s(\xi^2-\xi^1), \eta^1 + s(\eta^2-\eta^1)\right)}{\partial \xi_k} ds,$$

$$\Psi_i(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \int_0^1 \frac{\partial f_i\left(x,t,\xi^1 + s(\xi^2-\xi^1), \eta^1 + s(\eta^2-\eta^1)\right)}{\partial \eta} ds,$$

$$i = 1,\ldots,M, \quad k = 1,\ldots,M+L.$$

Аналогічно отримуємо

$$g_j(x,t,\xi^1,\eta^1) - g_j(x,t,\xi^2,\eta^2) = \sum_{k=1}^{M+L} S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2)\left(\xi_k^1 - \xi_k^2\right) +$$
$$+ \Lambda_j(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2)\left(\eta^1 - \eta^2\right),$$

де

$$S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \int_0^1 \frac{\partial g_j\left(x,t,\xi^1 + s(\xi^2-\xi^1), \eta^1 + s(\eta^2-\eta^1)\right)}{\partial \xi_k} ds,$$

$$\Lambda_j(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \int_0^1 \frac{\partial g_j\left(x,t,\xi^1 + s(\xi^2-\xi^1), \eta^1 + s(\eta^2-\eta^1)\right)}{\partial \eta} ds,$$

$$j = 1,\ldots,L, \quad k = 1,\ldots,M+L.$$

***Зауваження* 3.** З означення функцій f_i^* і g_j^* випливає, що для будь-яких $(x,t) \in Q$ і довільних $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^{M+L}$, $\eta^1, \eta^2 \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{M+L} \Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) +$$
$$+ \Psi_i(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) l_i(t,\theta) \le f_i^*(x,t), \quad i = 1,\ldots,M,$$
$$\sum_{k=1}^{M+L} S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) +$$
$$+ \Lambda_j(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2) l_{M+j}(t,\theta) \le g_j^*(x,t), \quad j = 1,\ldots,L.$$

Нехай t_0 — довільне число з проміжку $(-\infty, T)$, $Q^0 = \Omega \times (t_0, T]$, $\Sigma^0 = \partial\Omega \times (t_0, T]$, $\Omega^0 = \Omega \times \{t_0\} \equiv Q \cap \{t = t_0\}$. Простір функцій $w = \mathrm{col}(u, v) \in \left[C^{2,1}_{\mathrm{loc}}(Q^0) \cap C\left(\overline{Q}^0\right)\right]^M \times \left[C^{0,1}\left(\overline{Q}^0\right)\right]^L$ позначатимемо через $W(Q^0)$.

Встановимо деякі властивості функцій з простору $W(Q^0)$.

Лема 1. *Нехай $a_0 > 0$ і для двох вектор-функцій $\tilde{w} = \mathrm{col}(\tilde{u}, \tilde{v})$, $\hat{w} = \mathrm{col}(\hat{u}, \hat{v}) \in W(Q^0)$*

$$P\tilde{w}(x,t) < P\hat{w}(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q^0, \qquad G\tilde{w}(x,t) < G\hat{w}(x,t) \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}^0, \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x,t) < \hat{u}(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma^0, \tag{6}$$

$$\tilde{w}(x, 0) < \hat{w}(x, 0), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{7}$$

Тоді $\tilde{w}(x, t) < \hat{w}(x, t)$ *для всіх* $(x, t) \in \overline{Q}^0$.

Доведення. (Лема доводиться так само, як в роботі [3] доводиться теорема порівняння.) Припустимо супротивне. Нехай $t^* \in (0, T]$ — найбільше значення змінної t таке, що $\tilde{w}(x, t) < \hat{w}(x, t)$ для всіх $(x, t) \in \overline{Q}^0 \cap \cap \left\{(x, t)\colon 0 \le t < t^*\right\}$. Тоді існує точка $(x^*, t^*) \in \overline{Q}^0$ така, що $\tilde{u}_\mu(x^*, t^*) = = \hat{u}_\mu(x^*, t^*)$ при певному $\mu \in \{1, \ldots, M\}$ або $\tilde{v}_s(x^*, t^*) = \hat{v}_s(x^*, t^*)$ при певному $s \in \{1, \ldots, L\}$. В обох випадках $t^* > 0$, тому що виконується нерівність (7).

Якщо $\tilde{u}_\mu(x^*, t^*) = \hat{u}_\mu(x^*, t^*)$, то $(x^*, t^*) \notin \Sigma^0 \cup \overline{\Omega}^0$, оскільки виконуються нерівності (6) і (7). Різниця $\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu$ в $\overline{Q}^0 \cap \left\{(x, t)\colon 0 \le t \le t^*\right\}$ набирає найбільшого значення в точці (x^*, t^*) і це значення дорівнює нулеві. Тому, враховуючи умову A2), маємо

$$\left.\frac{\partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial t}\right|_{(x^*, t^*)} \ge 0, \quad \left.\frac{\partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_m}\right|_{(x^*, t^*)} = 0, \quad m = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{k, l = 1}^{n} a_{\mu, kl}(x^*, t^*) \left.\frac{\partial^2(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_k x_l}\right|_{(x^*, t^*)} \le 0.$$

Отже, використовуючи зауваження 2 і умови A3), A4), отримуємо

$$P_\mu \tilde{w}(x^*, t^*) - P_\mu \hat{w}(x^*, t^*) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)\Big|_{(x^*, t^*)} - \sum_{k, l = 1}^{n} a_{\mu, kl}(x^*, t^*) \left.\frac{\partial^2(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_k x_l}\right|_{(x^*, t^*)} +$$

$$+ \sum_{k = 1}^{n} a_{\mu, k}(x^*, t^*) \left.\frac{\partial^2(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_k}\right|_{(x^*, t^*)} + a_\mu(x^*, t^*)(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)\Big|_{(x^*, t^*)} -$$

$$- \left(f_\mu\left(x^*, t^*, \tilde{w}(x^*, t^*), l_\mu\left(t^*, \tilde{w}(\cdot, t^*)\right)\right) - f_\mu\left(x^*, t^*, \hat{w}(x^*, t^*), l_\mu\left(t^*, \tilde{w}(\cdot, t^*)\right)\right)\right) \ge$$

$$\ge \left(f_\mu\left(x^*, t^*, \hat{w}(x^*, t^*), l_\mu\left(t, \hat{w}(\cdot, t^*)\right)\right) - f_\mu\left(x^*, t^*, \tilde{w}(x^*, t^*), l_\mu\left(t, \tilde{w}(\cdot, t^*)\right)\right)\right) \ge 0,$$

що суперечить (5). Якщо $\tilde{v}_s(x^*, t^*) = \hat{v}_s(x^*, t^*)$, то аналогічно отримуємо $G_s \tilde{w}(x^*, t^*) \ge G_s \hat{w}(x^*, t^*)$, що суперечить нерівностям (5). Лему 1 доведено.

Лема 2. *Припустимо, що виконуються всі умови леми* 1, *але нерівності* (5) – (7) *нестрогі. Тоді* $\tilde{w}(x, t) \le \hat{w}(x, t)$ *для всіх* $(x, t) \in \overline{Q}^0$.

Доведення. Розглянемо допоміжну вектор-функцію $\hat{w}^\lambda(x, t) = \hat{w}(x, t) + + \lambda e^t \theta$, де $\theta = \mathrm{col}(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{M + L}$, $\lambda > 0$. Використовуючи зауваження 2 і 3 та умови A3) – A5), отримуємо

$$P_i \hat{w}^\lambda(x, t) = P_i \hat{w}(x, t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x, t) -$$

$$- \left[f_i\left(x, t, \hat{w}(x, t) + \lambda e^t \theta, l_i\left(t, \hat{w}(\cdot, t) + \lambda e^t \theta\right)\right) - f_i(x, t, \hat{w}(x, t), l_i(t, \hat{w}(t, \cdot)))\right] =$$

$$= P_i \hat{w}(x, t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x, t) - \left[\sum_{k = 1}^{M + L} \Phi_{ik}\left(x, t, \hat{w}(x, t) + \lambda e^t \theta,\right.\right.$$

$$\hat{w}(x,t), l_i\big(t, \hat{w}(\cdot,t)+\lambda e^t\theta\big), l_i(t,\hat{w}(t,\cdot))\big) +$$

$$+ \Psi_i\Big(x,t,\hat{w}(x,t)+\lambda e^t\theta, \hat{w}(x,t), l_i\big(t,\hat{w}(\cdot,t)+\lambda e^t\theta\big), l_i(t,\hat{w}(t,\cdot))\Big)l_i(t,\theta)\Big]\lambda e^t \geq$$

$$\geq P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t\big(a_i(x,t) - f_i^*(x,t)\big) > P_i\hat{w}(x,t),$$

$(x,t)\in Q^0$. Аналогічно встановлюється, що $G\tilde{w}^\lambda(x,t) > G\hat{w}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}^0$. Оскільки $P\tilde{w}(x,t)\leq P\hat{w}(x,t)$, а $P\hat{w}(x,t) < P\hat{w}^\lambda(x,t)$, то $P\tilde{w}(x,t) < P\hat{w}^\lambda(x,t)$, $(x,t)\in Q^0$. Аналогічно показується, що $G\tilde{w}(x,t) < G\hat{w}^\lambda(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}^0$. Враховуючи це, а також те, що $\hat{u}_i(x,t) < \hat{u}_i^\lambda(x,t)$, $(x,t)\in\Sigma^0$, $i = 1,\ldots,M$, $\hat{w}(x,0) < \hat{w}^\lambda(x,0)$, $x\in\overline{\Omega}$, з леми 1 маємо $\tilde{w}(x,t) < \hat{w}^\lambda(x,t)$, коли $(x,t)\in\overline{Q}^0$, $\lambda > 0$. Оскільки $\lim_{\lambda\to 0}\hat{w}^\lambda(x,t) = \hat{w}(x,t)$, то $\tilde{w}(x,t)\leq\hat{w}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}^0$. Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай* $a_0 > 0$. *Тоді для довільної функції* $w = \operatorname{col}(u,v)\in W(Q^0)$ *справджується оцінка*

$$|w(x,t)| \leq \max\Bigg\{\sup_{(y,\tau)\in\Sigma^0}|u(y,\tau)|, \sup_{y\in\Omega}|w(y,t_0)|,$$

$$\sup_{(y,\tau)\in Q^0}\frac{|Pw(y,\tau)|}{a_0}, \sup_{(y,\tau)\in Q^0}\frac{|Gw(y,\tau)|}{a_0}\Bigg\}, \quad (x,t)\in\overline{Q}^0. \tag{8}$$

Доведення. Нехай

$$C = \max\Bigg\{\sup_{(y,\tau)\in\Sigma^0}|u(y,\tau)|, \sup_{y\in\Omega}|w(y,t_0)|, \sup_{(y,\tau)\in Q^0}\frac{|Pw(y,\tau)|}{a_0}, \sup_{(y,\tau)\in Q^0}\frac{|Gw(y,\tau)|}{a_0}\Bigg\}.$$

Розглянемо вектор-функцію $\hat{w} = \operatorname{col}(\hat{u},\hat{v})$, де $\hat{u} = \operatorname{col}(C,\ldots,C)\in\mathbb{R}^M$, $\hat{v} = \operatorname{col}(C,\ldots,C)\in\mathbb{R}^L$. Використовуючи зауваження 2 і 3 та умови A4), A5), легко показати, що

$$P_i\hat{w}(x,t) = a_i(x,t)C - f_i(x,t,\hat{w}(x,t), l_i(t,\hat{w}(\cdot,t))) =$$

$$= C\left(a_i(x,t) - \frac{f_i(x,t,\hat{w}(x,t), l_i(t,\hat{w}(\cdot,t))) - f_i(x,t,0,0)}{C}\right) \geq$$

$$\geq C\big(a_i(x,t) - f_i^*(x,t)\big), \quad i = 1,\ldots,M. \tag{9}$$

З умови A5), нерівності (9) та вибору C випливає

$$P_i\hat{w}(x,t) \geq Ca_0 \geq P_iw(x,t), \quad (x,t)\in Q^0, \quad i = 1,\ldots,M. \tag{10}$$

Аналогічно можна показати, що

$$G_j\hat{w}(x,t) \geq G_jw(x,t), \quad (x,t)\in\overline{Q}^0. \tag{11}$$

З означення вектор-функції $\hat{w} = \operatorname{col}(\hat{u},\hat{v})$ маємо

$$\hat{u}(x,t) \geq u(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma^0, \tag{12}$$

$$\hat{w}(x,0) \geq w(x,0), \quad x\in\overline{\Omega}. \tag{13}$$

На підставі (10) – (13) з леми 2 отримуємо

$$\hat{w}(x,t) \geq w(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}^0.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\hat{w}(x,t) \geq -w(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}^0.$$

Лему 3 доведено.

Зауваження 4. Якщо $Pw(x,t) = 0$ і $Gw(x,t) = 0$, то $\sup_{(x,t)\in\overline{Q}^0}|w(x,t)|$ оцінюється через $\sup_{(x,t)\in\Sigma^0}|w(x,t)|$ та $\sup_{x\in\Omega}|w(x,t_0)|$ і не залежить від a_0.

Лема 4. *Нехай для деякого* $\nu < a_0$ *вектор-функції* $w^1 = \operatorname{col}(u^1, v^1), w^2 = \operatorname{col}(u^2, v^2) \in E_\nu(\overline{Q}; M+L) \cap W_{\mathrm{loc}}(Q)$ *такі, що* $Pw^1 - Pw^2 \in E_\nu(Q; M)$, $Gw^1 - Gw^2 \in E_\nu(\overline{Q}; L)$, $(u^1 - u^2)|_\Sigma \in E_\nu(Q; M)$. *Тоді*

$$\left|w^1(x,t) - w^2(x,t)\right| \leq \max\left\{ \sup_{(y,\tau)\in\Sigma} \left|u^1(y,\tau) - u^2(y,\tau)\right| e^{\nu\tau}, \right.$$

$$\frac{1}{a_0-\nu} \sup_{(y,\tau)\in Q} \left|Pw^1(y,\tau) - Pw^2(y,\tau)\right| e^{\nu\tau},$$

$$\left. \frac{1}{a_0-\nu} \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \left|Gw^1(y,\tau) - Gw^2(y,\tau)\right| e^{\nu\tau} \right\} e^{-\nu t}, \quad (x,t) \in Q. \tag{14}$$

Доведення. Позначимо $\hat{f}^k(x,t) \overset{\mathrm{df}}{=} Pw^k(x,t)$, $(x,t) \in Q$, $\hat{g}^k(x,t) \overset{\mathrm{df}}{=} Gw^k(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, $k = 1, 2$. Поклавши $u^{1,2} = u^1 - u^2$, $v^{1,2} = v^1 - v^2$, $w^{1,2} = w^1 - w^2$, із рівнянь (1) та (2), записаних для w^1 і w^2, враховуючи зауваження 2, отримуємо

$$L_i w^{1,2}(x,t) - \tilde{f}_i\big(x, t, w^{1,2}(x,t), l_i(t, w^{1,2}(\cdot,t))\big) =$$

$$= \hat{f}_i^{1,2}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{15}$$

$$F_j w^{1,2}(x,t) - \tilde{g}_j\big(x, t, w^{1,2}(x,t), l_{M+j}(t, w^{1,2}(\cdot,t))\big) =$$

$$= \hat{g}_j^{1,2}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j = 1, \ldots, L, \tag{16}$$

де

$$L_i w^{1,2}(x,t) \overset{\mathrm{df}}{=} P_i w^{1,2}(x,t) + f_i\big(x, t, w^{1,2}(x,t), l_i(t, w^{1,2}(\cdot,t))\big), \quad (x,t) \in Q;$$

$$F_j w^{1,2}(x,t) \overset{\mathrm{df}}{=} G_j w^{1,2}(x,t) + g_j\big(x, t, w^{1,2}(x,t), l_{M+j}(t, w^{1,2}(\cdot,t))\big), \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

$$\tilde{f}_i(x,t,\xi,\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \Phi_{ik}\big(x, t, w^1(x,t), w^2(x,t), l_i(t, w^1(\cdot,t)), l_i(t, w^2(\cdot,t))\big)\xi_k +$$

$$+ \Psi_{ik}\big(x, t, w^1(x,t), w^2(x,t), l_i(t, w^1(\cdot,t)), l_i(t, w^2(\cdot,t))\big)\eta,$$

$$(x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R}^{M+L+1};$$

$$\tilde{g}_j(x,t,\xi,\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{M+L} S_{jk}\big(x, t, w^1(x,t), w^2(x,t), l_{M+j}(t, w^1(\cdot,t)), l_{M+j}(t, w^2(\cdot,t))\big)\xi_k +$$

$$+ \Lambda_j\big(x, t, w^1(x,t), w^2(x,t), l_{M+j}(t, w^1(\cdot,t)), l_{M+j}(t, w^2(\cdot,t))\big)\eta,$$

$$(x, t, \xi, \eta) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^{M+L+1};$$

$$\hat{f}^{1,2}(x, t) \overset{\text{df}}{=} \hat{f}^1(x, t) - \hat{f}^2(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$\hat{g}^{1,2}(x, t) \overset{\text{df}}{=} \hat{g}^1(x, t) - \hat{g}^2(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Розглянемо спочатку випадок $a_0 > 0$, $\nu = 0$ і використаємо ідею з роботи [6]. Нехай $\lambda \in (0, a_0)$ — довільне число. Домножимо (15) і (16) на $e^{\lambda t}$. Після простих перетворень отримаємо

$$L_i^\lambda \tilde{w}^{1,2}(x, t) \equiv L_i \tilde{w}^{1,2}(x, t) - \lambda \tilde{u}_i^{1,2}(x, t) -$$
$$- \tilde{f}_i\big(x, t, \tilde{w}^{1,2}(x, t), l_i\big(t, \tilde{w}^{1,2}(\cdot, t)\big)\big) = \hat{f}_i^{1,2}(x, t)e^{\lambda t},$$
$$(x, t) \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \tag{17}$$
$$F_j^\lambda \tilde{w}^{1,2}(x, t) \equiv F_j \tilde{w}^{1,2}(x, t) - \lambda \tilde{v}_j^{1,2}(x, t) -$$
$$- \tilde{g}_j\big(x, t, \tilde{w}^{1,2}(x, t), l_{M+j}\big(t, \tilde{w}^{1,2}(\cdot, t)\big)\big) = \hat{g}_j^{1,2}(x, t)e^{\lambda t},$$
$$(x, t) \in \overline{Q}, \quad j = 1, \dots, L, \tag{18}$$

де $\tilde{w}^{1,2}(x, t) = \operatorname{col}\big(\tilde{u}^{1,2}(x, t), \tilde{v}^{1,2}(x, t)\big) \overset{\text{df}}{=} \operatorname{col}\big(u^{1,2}(x, t)e^{\lambda t}, v^{1,2}(x, t)e^{\lambda t}\big)$, $(x, t) \in Q$.

Нехай t_* — довільне від'ємне число, $Q^* = \Omega \times (t_*, T]$, $\Sigma^* = \partial\Omega \times (t_*, T]$. Легко бачити, що коефіцієнти диференціальних операторів L_i^λ, $i = 1, \dots, M$, F_j^λ, $j = 1, \dots, L$, задовольняють умови, які аналогічні умовам A1) – A5) для коефіцієнтів операторів P_i, $i = 1, \dots, M$, G_j, $j = 1, \dots, L$ (з тією лише відмінністю, що замість $a_0 > 0$ потрібно взяти $a_0 - \lambda > 0$). Отже, міркуючи, як і при доведенні леми 3, отримуємо

$$\left|\tilde{w}^{1,2}(x, t)\right| \le \max\left\{e^{\lambda T} \sup_{(y,\tau)\in\Sigma^*} \left|u^{1,2}(y, \tau)\right|, e^{\lambda t_*} \sup_{y\in\Omega} \left|w^{1,2}(y, t_*)\right|,\right.$$
$$\left.\frac{e^{\lambda T}}{a_0 - \lambda} \sup_{(y,\tau)\in Q^*} \left|\hat{f}^{1,2}(y, \tau)\right|, \frac{e^{\lambda T}}{a_0 - \lambda} \sup_{(y,\tau)\in Q^*} \left|\hat{g}^{1,2}(y, \tau)\right|\right\}, \quad (x, t) \in \overline{Q}^*. \tag{19}$$

Оскільки $w^1, w^2 \in E_0(\overline{Q}; M+L)$, то $\left|\tilde{w}^{1,2}(x, t)\right| \le C_1$ для всіх $(x, t) \in Q$, де $C_1 = \text{const} \ge 0$. Отже, $e^{\lambda t_*} \sup_{x\in\Omega} \left|w^{1,2}(x, t_*)\right| \to 0$ при $t_* \to -\infty$. Враховуючи це, переходимо в (19) до границі при $t_* \to -\infty$. В результаті отримуємо нерівність

$$\left|w^{1,2}(x, t)\right| \le \max\left\{e^{\lambda(T-t)} \sup_{(y,\tau)\in\Sigma} \left|u^{1,2}(y, \tau)\right|,\right.$$
$$\left.\frac{e^{\lambda(T-t)}}{a_0 - \lambda} \sup_{(y,\tau)\in Q} \left|\hat{f}^{1,2}(y, \tau)\right|, \frac{e^{\lambda(T-t)}}{a_0 - \lambda} \sup_{(y,\tau)\in Q} \left|\hat{g}^{1,2}(y, \tau)\right|\right\}, \quad (x, t) \in Q. \tag{20}$$

Для кожної фіксованої точки $(x, t) \in Q$ перейдемо в (20) до границі при $\lambda \to \to +0$. В результаті отримаємо (14) для $\nu = 0$.

Нехай тепер a_0 і ν — довільні, причому $\nu < a_0$, $\nu \ne 0$. Домножимо (15) і (16) на $e^{\nu t}$. Після простих перетворень одержимо $L_i^\nu \hat{w}^{1,2}(x, t) = \hat{f}_i^{1,2}(x, t)e^{\nu t}$,

$(x, t) \in Q$, $i = 1, \ldots, M$, $F_j^{\nu} \hat{w}^{1,2}(x, t) = \hat{g}_i^{1,2}(x, t) e^{\nu t}$, $(x, t) \in \overline{Q}$, $j = 1, \ldots, L$ (див. (17), (18)), де $\hat{w}^{1,2}(x, t) = \operatorname{col}\left(\hat{u}^{1,2}(x, t), \hat{v}^{1,2}(x, t)\right) \stackrel{\text{df}}{=} \operatorname{col}\left(u^{1,2}(x, t) e^{\nu t}, v^{1,2}(x, t) e^{\nu t}\right)$, $(x, t) \in Q$. Легко бачити, що коефіцієнти диференціальних операторів L_i^{ν}, $i = 1, \ldots, M$, F_j^{ν}, $j = 1, \ldots, L$, задовольняють умови, аналогічні умовам A1) – A5) для коефіцієнтів операторів P_i, $i = 1, \ldots, M$, G_j, $j = 1, \ldots, L$, (з тією лише відмінністю, що замість $a_0 > 0$ потрібно взяти $a_0 - \nu > 0$). Очевидно, що $\hat{w}^{1,2}(x, t) \in E_0(\overline{Q}; M + L)$. З доведеного для $\nu = 0$ маємо

$$\left|\hat{w}^{1,2}(x, t)\right| \leq \max\left\{ \sup_{(y, \tau) \in \Sigma} \left|u^{1,2}(y, \tau) e^{\nu \tau}\right|,\right.$$

$$\left.\frac{1}{a_0 - \nu} \sup_{(y, \tau) \in Q} \left|\hat{f}^{1,2}(y, \tau) e^{\nu \tau}\right|, \frac{1}{a_0 - \nu} \sup_{(y, \tau) \in Q} \left|\hat{g}^{1,2}(y, \tau) e^{\nu \tau}\right|\right\}, \quad (x, t) \in Q.$$

Звідси отримуємо (14). Лему 4 доведено.

4. Доведення основних результатів. *Доведення теореми* **1.** Нехай $\hat{w} = \operatorname{col}(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{M+L}$, а w — розв'язок задачі (1) – (3). Очевидно, $P\hat{w} = 0$ і $G\hat{w} = 0$. Застосовуючи лему 4 до вектор-функцій w і $\hat{w}$, отримуємо потрібну оцінку. Теорему 1 доведено.

Доведення теореми **2.** Припустимо, що існують два розв'язки $w^1 = \operatorname{col}(u^1, v^1)$ і $w^2 = \operatorname{col}(u^2, v^2)$ задачі (1) – (3). Тоді $u^1(x, t) = u^2(x, t)$ при $(x, t) \in \Sigma$, $Pw^1(x, t) = Pw^2(x, t)$ при $(x, t) \in Q$ і $Gw^1(x, t) = Gw^2(x, t)$ при $(x, t) \in \overline{Q}$. Звідси та з леми 4 випливає $w^1(x, t) = w^2(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}$. Теорему 2 доведено.

Доведення теореми **3.** Розглянемо спочатку випадок $a_0 > 0$, $\nu = 0$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ позначимо $Q^k = Q \cap \{(x, t) \colon t > -k\}$, $\Sigma^k = \Sigma \cap \{(x, t) \colon t > -k\}$ і визначимо вектор-функцію $w^k = \operatorname{col}(u^k, v^k)$ як розв'язок задачі

$$Pw^k(x, t) = \hat{f}^k(x, t), \quad (x, t) \in Q^k, \tag{21}$$

$$Gw^k(x, t) = \hat{g}^k(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}^k, \tag{22}$$

$$u^k(x, t) = h^k(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma^k, \tag{23}$$

$$w^k(x, -k) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{24}$$

Тут $h^k(x, t) = \eta(t + k) h(x, t)$ при $(x, t) \in \Sigma$, $\hat{f}^k(x, t) = \hat{f}(x, t) \eta(t + k)$, $\hat{g}^k(x, t) = \hat{g}(x, t) \eta(t + k)$ при $(x, t) \in \overline{Q}$, де η — гладка і монотонна на $\mathbb{R}$ функція така, що $\eta(t) = 0$ при $t \leq 1/2$, $\eta(t) = 1$ при $t \geq 1$.

Із результатів роботи [3] випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ задача (21) – (24) має єдиний розв'язок $w^k \in \left[C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q}^k)\right]^M \times \left[C^{\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q}^k)\right]^L$, причому (на підставі леми 3) $w^k(x, t) = 0$ для всіх $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (-k, -k + 1/2)$. Продовжимо кожну з вектор-функцій u^k і v^k нулем на $\overline{Q} \setminus \overline{Q}^k$, $k \in \mathbb{N}$, і залишимо за продовженнями ці ж самі позначення. Очевидно, що $w^k = \operatorname{col}(u^k, v^k) \in \left[C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q})\right]^M \times \left[C^{\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q})\right]^L$, $w^k = RS\left(\hat{f}^k, \hat{g}^k, h^k\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, причому, згідно з теоремою 1,

$$\left|w^k(x, t)\right| \leq M_0 \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Покажемо, що

$$\sum_{i=1}^{M}\left\|u_i^k\right\|_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{Q}+\sum_{j=1}^{L}\left\|v_i^k\right\|_{\alpha,1+\alpha/2}^{Q}\leq C_2\quad\forall k\in\mathbb{N},\tag{26}$$

де $C_2>0$ — стала, яка не залежить від k.

Перепишемо рівняння (21) у вигляді

$$\frac{\partial u_i^k(x,t)}{\partial t}-\sum_{m,l=1}^{n}a_{i,ml}(x,t)\frac{\partial^2u_i^k(x,t)}{\partial x_m\partial x_l}+\sum_{m=1}^{n}a_{i,m}(x,t)\frac{\partial u_i^k(x,t)}{\partial x_m}+a_i(x,t)u_i^k(x,t)=$$

$$=f_i\big(x,t,w^k(x,t),l_i\big(t,w^k(\cdot,t)\big)\big)+\hat{f}_i^k(x,t),\qquad(x,t)\in Q^k,\quad i=1,\ldots,M,\tag{27}$$

і будемо вважати, що права частина є вільним членом. З умов теореми на підставі (25) випливає, що права частина (27) є неперервною і обмеженою на $\overline{Q}$. Застосовуючи до системи (27) теорему 3.1 роботи [8, с. 665], отримуємо

$$\sum_{i=1}^{M}\left\|u_i^k\right\|_{\alpha,\alpha/2}^{Q}\leq C_3,\tag{28}$$

де $C_3>0$ — стала, яка залежить від n, M_0, $\|a_{i,ml}\|_{0,0}^{Q}$, $\|a_{i,m}\|_{0,0}^{Q}$, $\|a_i\|_{0,0}^{Q}$, $\left\|\partial a_{i,ml}/\partial x_s\right\|_{0,0}^{Q}$, $\inf_{t\in(-\infty,T]}\mu_i(t)$, $\sup\{f_i(x,t,\xi,\eta):(x,t)\in Q,\ |\xi|\leq M_0,\ |\eta|\leq$ $\leq M_0\sup_{t\in(-\infty,T]}l(t)\}$, $\left\|\hat{f}_i\right\|_{0,0}^{Q}$, $\|h_i\|_{0,0}^{\Sigma}$, $i=1,\ldots,M$, $m,l,s=1,\ldots,n$, але не залежить від k.

Тепер розглянемо послідовність $\{v^k\}$. Для довільних $(x_1,t_1),\ (x_2,t_2)\in\overline{Q}$ маємо

$$\left|v_j^k(t_1,x_1)-v_j^k(t_2,x_2)\right|\leq\left|v_j^k(t_1,x_1)-v_j^k(t_1,x_2)\right|+\left|v_j^k(t_1,x_2)-v_j^k(t_2,x_2)\right|.\tag{29}$$

Від рівняння (22), записаного для $x=x_1$, віднімемо те ж саме рівняння, яке записане для $x=x_2$. В результаті простих перетворень, використовуючи зауваження 2, отримуємо

$$\frac{\partial\big(v_j^k(x_1,t)-v_j^k(x_2,t)\big)}{\partial t}+c_j(x_2,t)\big(v_j^k(x_1,t)-v_j^k(x_2,t)\big)-$$

$$-\sum_{m=M+1}^{M+L}S_{jm}\big(x_2,t,w^k(x_1,t),w^k(x_2,t),l_{M+j}\big(t,w^k(\cdot,t)\big),l_{M+j}\big(t,w^k(\cdot,t)\big)\big)\times$$

$$\times\big(v_m^k(x_1,t)-v_m^k(x_2,t)\big)=$$

$$=\Big[g_j\big(x_1,t,w^k(x_1,t),l_{M+j}\big(t,w^k(\cdot,t)\big)\big)-g_j\big(x_2,t,w^k(x_1,t),l_{M+j}\big(t,w^k(\cdot,t)\big)\big)\Big]+$$

$$+\sum_{l=1}^{M}S_{jl}\big(x_2,t,w^k(x_1,t),w^k(x_2,t),l_{M+j}\big(t,w^k(\cdot,t)\big),l_{M+j}\big(t,w^k(\cdot,t)\big)\big)\times$$

$$\times\big(u_l^k(x_1,t)-u_l^k(x_2,t)\big)+$$

$$+\big(c_j(x_1,t)-c_j(x_2,t)\big)v_j^k(x_1,t)+\big(\hat{g}_j(x_1,t)-\hat{g}_j(x_2,t)\big),\quad j=1,\ldots,L.\tag{30}$$

Міркуючи аналогічно, як при доведенні леми 3, і використовуючи зауваження

3, умови B1) – B3), B5) та оцінку (25), з (30) одержуємо

$$\left|v_j^k(x_1,t)-v_j^k(x_2,t)\right| \le C_4|x_1-x_2|^{\alpha}, \quad t\in(-\infty,T], \tag{31}$$

де C_4 — стала, яка не залежить від k.

Тепер запишемо рівняння (22) у такому вигляді:

$$\frac{\partial v_j^k(x,t)}{\partial t} = g_j\Big(x,t,w^k(x,t),l_{M+j}\big(t,w^k(\cdot,t)\big)\Big) +$$

$$+\ \hat{g}_j^k(x,t) - c_j(x,t)v_j^k(x,t), \quad (x,t)\in\overline{Q}, \quad j=1,\dots,L. \tag{32}$$

З умови B2) і оцінки (25) випливає обмеженість правої частини (32) рівномірно по $k\in\mathbb{N}$, а звідси — рівномірна обмеженість (стосовно k) похідних $\partial v_j^k/\partial t$, $k\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,L$, на Q. Отже, використовуючи теорему Лагранжа про скінченний приріст, з (29), (31), (32) і умови B2) маємо

$$\sum_{j=1}^{L}\left\|v_j^k\right\|_{\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \le C_5, \tag{33}$$

де $C_5=\mathrm{const}\ge 0$, причому C_5 не залежить від k.

Нехай $\tilde{f}_i^k(x,t)\overset{\mathrm{df}}{=} f_i\Big(x,t,w^k(x,t),l_i\big(t,w^k(\cdot,t)\big)\Big)$, $(x,t)\in\overline{Q}$, $i=1,\dots,M$, $k\in\mathbb{N}$. З (28), (33) та умов B2), B3) отримуємо $\left\|\tilde{f}_i^k\right\|_{\alpha,\alpha/2}^{Q}\le C_6$, $i=1,\dots,M$, де $C_6\ge 0$ — стала, яка не залежить від k. Враховуючи це, з (27) і теореми 10.1 роботи [8, с. 400] отримуємо

$$\sum_{i=1}^{M}\left\|u_i^k\right\|_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \le C_7, \tag{34}$$

де $C_7\ge 0$ — стала, яка не залежить від k.

З (33) і (34) випливає оцінка (26). Отже, з послідовності w^k (використовуючи діагональний процес) можна вибрати підпослідовність (за якою залишимо те саме позначення) таку, що для довільного $m\in\mathbb{N}$ $u_i^k \underset{k\to\infty}{\to} u_i$ в $C^{2+\gamma,1+\gamma/2}\big(\overline{Q}^m\big)$ і $v_j^k \underset{k\to\infty}{\to} v_j$ в $C^{\gamma,1+\gamma/2}\big(\overline{Q}^m\big)$, $i=1,\dots,M$, $j=1,\dots,L$, де $0<\gamma<\alpha$. Покладемо $w(x,t)=\mathrm{col}\big(u(x,t),v(x,t)\big)$, $(x,t)\in\overline{Q}$. Легко бачити, що знайдена вектор-функція w буде розв'язком задачі (1) – (3). Із (26) знаходимо

$$\sum_{i=1}^{M}\left\|u_i\right\|_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{Q} + \sum_{j=1}^{L}\left\|v_j\right\|_{\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \le C_2. \tag{35}$$

Таким чином, ми довели теорему у випадку $a_0>0$, $\nu=0$.

Розглянемо задачу (1) – (3) у випадку, коли a_0 і ν — довільні, $\nu<a_0$, $\nu\ne 0$. Домножимо кожне рівняння задачі на $e^{\nu t}$. В результаті отримаємо

$$L_i\tilde{w}(x,t) - \tilde{f}_i(x,t,\tilde{w}(x,t),l_i(t,\tilde{w}(\cdot,t))) = e^{\nu t}\hat{f}_i(x,t),$$

$$(x,t)\in Q, \quad i=1,\dots,M, \tag{36}$$

$$F_j\tilde{w}(x,t) - \tilde{g}_j\big(x,t,\tilde{w}(x,t),l_{M+j}(t,\tilde{w}(\cdot,t))\big) = e^{\nu t}\hat{g}_j(x,t),$$

$$(x,t)\in\overline{Q}, \quad j=1,\dots,L, \tag{37}$$

$$\tilde{u}_i(x, t) = e^{\nu t} h_i(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad i = 1, \dots, M, \tag{38}$$

де L_i, $i = 1, \dots, M$, F_j, $j = 1, \dots, L$, такі, як в (15) і (16), $\tilde{w}(x, t) = e^{\nu t} w(x, t)$, $\tilde{f}_i\,(x, t, \xi, \eta) \overset{\text{df}}{=} \nu\,\xi_i + f_i\big(x, t, e^{-\nu t}\xi, e^{-\nu t}\eta\big)e^{\nu t}$, $i = 1, \dots, M$, і $\tilde{g}_j(x, t, \xi, \eta) \overset{\text{df}}{=} \nu\xi_{M+j} + g_j\big(x, t, e^{-\nu t}\xi, e^{-\nu t}\eta\big)e^{\nu t}$, $j = 1, \dots, L$. Легко перевірити, що функції $\tilde{f}_i$, $\tilde{g}_j$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, L$, задовольняють умову А3) та умову А5) із заміною a_0 на $a_0 - \nu > 0$. Очевидно, що $\hat{f} e^{\nu t} \in E_0(Q; M)$, $he^{\nu t} \in E_0(\Sigma; M)$, $\hat{g} e^{\nu t} \in E_0(\overline{Q}; L)$. З доведеного вище (для $\nu = 0$) випливає, що існує розв'язок $\tilde{w}$ задачі (36) – (38) з класу $E_0(\overline{Q}; M+L)$. Очевидно, що вектор-функція $w(x, t) = \tilde{w}(x, t)e^{-\nu t}$ належить класу $E_\nu(\overline{Q}; M+L)$ і є шуканим розв'язком задачі (1) – (3). Теорему 3 доведено.

Доведення наслідку. Згідно з теоремою 3 існує обмежений розв'язок w задачі (1) – (3). Очевидно, що функція $w(x, t+\omega)$ теж є обмеженим розв'язком задачі (1) – (3). З теореми 2 випливає рівність $w(x, t) = w(x, t+\omega)$ для всіх $(x, t) \in Q$, що і потрібно було довести.

Доведення теореми 4. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число, а вектор-функції $\mathrm{col}\big(\hat{f}^1, \hat{g}^1, h^1\big)$, $\mathrm{col}\big(\hat{f}^2, \hat{g}^2, h^2\big) \in \Pi_\nu$ такі, що

$$\sup_{(y,\tau)\in Q} \frac{\big|\hat{f}^1(y, \tau) - \hat{f}^2(y, \tau)\big| e^{\nu\tau}}{a_0 - \lambda} < \varepsilon,$$

$$\sup_{(y,\tau)\in Q} \frac{\big|\hat{g}^1(y, \tau) - \hat{g}^2(y, \tau)\big| e^{\nu\tau}}{a_0 - \lambda} < \varepsilon,$$

$$\sup_{(y,\tau)\in \Sigma} \big|h^1(y, \tau) - h^2(y, \tau)\big| e^{\nu\tau} < \varepsilon,$$

а $w^i = RS\big(\hat{f}^i, \hat{g}^i, h^i\big)$, $i = 1, 2$, $w^i \in E_\nu(\overline{Q}; M+L)$, $i = 1, 2$. Використовуючи лему 4, отримуємо потрібне твердження. Теорему 4 доведено.

1. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. – 1952. – **117**. – P. 500 – 544.
2. *Pell T. M., Davis T. G.* Diffusion and reaction in polyster melts // J. Polym. Sci. – 1973. – **11**. – P. 1671 – 1682.
3. *Babak P. P.* The first bounadry value problem for coupled diffusion systems with functional arguments // Мат. студії. – 1997. – **7**, № 2. – P. 179 – 186.
4. *Babak P. P.* Coupled diffusion systems with functional arguments in unbounded domains // Там же. – 1999. – **12**, № 1. – P. 85 – 89.
5. *Kuwamura M., Ei S.-I., Mimura M.* Very slow dynamics for some reaction-diffusion systems of the activator-inhibitor type // Jap. J. Ind. Appl. Math. – 1992. – **9**, № 1. – P. 35 – 77.
6. *Шмулев И. И.* Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений // Мат. сб. – 1965. – **66** (108), № 3. – С. 398 – 410.
7. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – Вып. 14. – С. 3 – 44.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А.* Линейные и квазилинейние уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

Одержано 01.06.2000