УДК 517.9

Р. Х. Амиров (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку),
В. А. Юрко (Саратов. ун-т, Россия)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ОСОБЕННОСТЬЮ И УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА *

We investigate boundary-value problems for differential equations with a singularity and discontinuity conditions inside the interval. We obtain properties of the spectrum, prove a theorem on the completeness of eigenfunctions and associated functions, study an inverse spectral problem.

Досліджуються крайові задачі для диференціальних рівнянь з особливостями та умовами розриву в середині інтервалу. Одержано властивості спектра, доведено теорему про повноту власних і приєднаних функцій. Досліджується обернена спектральна задача.

1. Введение. Рассмотрим дифференциальный оператор с неинтегрируемой особенностью

$$ly := -y'' + \left(\frac{\nu_0}{x^2} + q(x)\right)y, \quad 0 < x < T,$$

на конечном интервале. Здесь $q(x)$ — комплекснозначная функция, ν_0 — комплексное число. Пусть $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и для определенности $\operatorname{Re}\nu > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что $q(x) \cdot x^{\min(0, 1-2\operatorname{Re}\nu)} \in L(0, T)$.

Исследуется несамосопряженная краевая задача L вида

$$ly = \lambda y, \quad 0 < x < T, \tag{1}$$

$$y(x) = O(x^{\nu+1/2}), \quad x \to 0, \tag{2}$$

$$y(T) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}(a+0) = A\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}(a-0), \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a \in (0, T), \tag{4}$$

с условиями разрыва (4) во внутренней точке интервала $(0, T)$. Здесь a_{jk} — комплексные числа, $\det A \neq 0$.

Целью работы является исследование прямых и обратных задач спектрального анализа для краевой задачи L. Краевые задачи с особенностями и условиями разрыва возникают в различных разделах математики, механики, радиоэлектроники, геофизики и других областях естествознания и техники. Например, условия разрыва внутри интервала связаны с разрывными или негладкими свойствами среды [1, 2]. Обратные задачи такого типа связаны также с исследованием разрывных решений некоторых нелинейных уравнений математической физики.

Для кассических операторов Штурма – Лиувилля, уравнения Шредингера и гиперболических уравнений прямые и обратные задачи достаточно полно изучены (см. [3 – 6] и имеющуюся в них литературу). Наличие особенности и условий разрыва внутри интервала вносит качественные изменения в исследование. Некоторые аспекты прямых и обратных задач для дифференциальных операторов

* Выполнена при поддержке гранта TUBITAK и гранта РФФИ № 00-01-00741.

с условиями разрыва изучались в [7–9]. Обратные задачи для уравнений с особенностью без условий разрыва рассматривались в [10, 11] и других работах. В данной статье изучаются свойства собственных и присоединенных функций задачи и исследуется обратная задача восстановления L по заданным ее спектральным характеристикам.

Для определенности ограничимся наиболее важным частным случаем $a_{12} = 0$. Общий случай рассматривается аналогично.

Замечание **1.** Если $\operatorname{Re}\nu \geq 1/2$, то условие (2) равносильно условию $y(0) = 0$.

Замечание 2. Задача (1)–(4) будет самосопряженной тогда и только тогда, когда ν, $q(x)$, a_{jk} вещественны и $\det A = 1$.

2. Фундаментальные системы решений. *2.1.* Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение

$$l_0 y := -y'' + \frac{\nu_0}{x^2}y = y \tag{5}$$

в комплексной x-плоскости. Обозначим через Π_- x-плоскость с разрезом $x \leq 0$. Пусть числа c_{j0}, $j = 1, 2$, таковы, что

$$c_{20}c_{10} = \frac{1}{2\nu}.$$

Функции

$$C_j(x) = x^{\mu_j}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}x^{2k}, \qquad \mu_j := (-1)^j\nu + 1/2, \qquad j = 1, 2, \tag{6}$$

$$c_{jk} = (-1)^j c_{j0}\left(\prod_{s=1}^{k}\left((2s+\mu_j)(2s+\mu_j-1)-\nu_0\right)\right)^{-1}$$

являются решениями уравнения (5). Здесь и в дальнейшем $x^{\mu} = \exp(\mu(\ln|x| + i\arg x))$, $\arg x \in (-\pi, \pi]$. Функции $C_j(x)$ являются регулярными в Π_- и

$$\det\left[C_j^{(m-1)}(x)\right]_{j,m=1,2} \equiv 1. \tag{7}$$

Обозначим $\varepsilon_k = (-1)^{k-1}i$. Уравнение (5) имеет решения $e_k(x)$, $k = 1, 2$, $(-1)^{k-1}\operatorname{Im} x \geq 0$, удовлетворяющие интегральным уравнениям

$$e_k(x) = \exp(\varepsilon_k x) + \frac{1}{2i}\int_x^{\infty}(\exp(i(t-x)) - \exp(i(x-t)))\frac{\nu_0}{t^2}e_k(t)\,dt$$

(здесь $\arg t = \arg x$, $|t| > |x|$).

Используя фундаментальную систему решений $\{C_j(x)\}_{j=1,2}$, можно записать

$$e_k(x) = \sum_{j=1}^{2}\beta_{kj}^{0}C_j(x). \tag{8}$$

В частности, это дает аналитическое продолжение для функций $e_k(x)$ в Π_-. Обозначим $\Omega_{1,\delta} = \{x\colon \arg x \in [-\pi+\delta, \pi]\}$, $\Omega_{2,\delta} = \{x\colon \arg x \in [-\pi, \pi-\delta]\}$, $\delta > 0$. Можно показать (см. [12–14]), что

$$e_k^{(m-1)}(x) = \varepsilon_k^{m-1}\exp(\varepsilon_k x)\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \qquad |x| \to \infty, \quad k, m = 1, 2, \tag{9}$$

равномерно в $\Omega_{k,\delta}$ при каждом фиксированном $\delta > 0$. Поскольку согласно теореме Остроградского – Лиувилля вронскиан $\det\left[e_k^{(m-1)}(x)\right]_{k,m=1,2}$ не зависит от x, то, используя (9), находим

$$\det\left[e_k^{(m-1)}(x)\right]_{k,m=1,2} \equiv -2i. \tag{10}$$

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\beta_{2j}^0 = \beta_{1j}^0 \exp(i\pi\mu_j), \quad j = 1, 2, \tag{11}$$

$$\beta_{11}^0 \beta_{12}^0 = \frac{i}{\sin\pi\nu}. \tag{12}$$

Доказательство. Из построения следует, что

$$e_1(x) = e_2(-x), \quad \operatorname{Im} x > 0. \tag{13}$$

Поскольку при $\operatorname{Im} x > 0$ $(-x)^\mu = x^\mu \exp(-i\pi\mu)$, то в силу (6) и (8) имеем

$$e_2(-x) = \sum_{j=1}^{2} \beta_{2j}^0 \exp(-i\pi\mu_j) C_j(x). \tag{14}$$

Подставляя (8) и (14) в (13) и приравнивая коэффициенты при $C_j(x)$, получаем (11).

Далее, согласно (7), (8) и (10) $\det[\beta_{kj}^0]_{k,j=1,2} = -2i$. Отсюда и из (11) вытекает (12).

2.2. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$l_0 y = \lambda y, \quad x > 0. \tag{15}$$

Пусть $\lambda = \rho^2$. Очевидно, что если $y(x)$ является решением уравнения (5), то $y(\rho x)$ удовлетворяет (15). Функции

$$C_j(x, \lambda) := \rho^{-\mu_j} C_j(\rho x) = x^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(\rho x)^{2k}, \quad j = 1, 2, \quad x > 0,$$

являются целыми по λ решениями уравнения (15), причем

$$\det\left[C_j^{(m-1)}(x, \lambda)\right]_{j,m=1,2} \equiv 1.$$

Обозначим $S_{\pm 1}^* = \{\rho\colon \pm\operatorname{Im}\rho \ge 0\}$, $S_{k_0} = \{\rho\colon \arg\rho \in [k_0\pi/2, (k_0+1)\pi/2]\}$, $k_0 = -\overline{2,1}$. В каждом секторе S_{k_0} корни R_k уравнения $R^2 + 1 = 0$ можно занумеровать так, чтобы $\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2)$, $\rho \in S_{k_0}$. Ясно, что $R_k = \varepsilon_k$ для S_0 и S_1 и $R_k = \varepsilon_{3-k}$ для S_{-1} и S_{-2}. Для определенности пусть $\operatorname{Re}\rho \ge 0$, т.е. $\rho \in \overline{S_0 \cup S_{-1}}$.

Используя результаты пп.2.1, получаем, что в каждом секторе S_{k_0} уравнение (15) имеет фундаментальную систему решений $\{y_k(x, \rho)\}_{k=1,2}$ такую, что

$$y_k(x, \rho) = y_k(\rho x),$$

$$y_k^{(m-1)}(x, \rho) = (\rho R_k)^{m-1} \exp(\rho R_k x)\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho x}\right)\right), \quad \rho \in \overline{S_{k_0}}, \quad |\rho| x \to \infty, \quad k, m = 1, 2,$$

$$\det\left[y_k^{(m-1)}(x, \rho)\right]_{k,m=1,2} \equiv -2\rho R_1, \qquad y_k(x, \rho) = \sum_{j=1}^{2} b_{kj}^0 \rho^{\mu_j} C_j(x, \lambda),$$

где $b_{kj}^0 = \beta_{kj}^0$ для S_{+1}^* и $b_{kj}^0 = \beta_{3-k,j}^0$ для S_{-1}^*. Отметим, что $y_k(x,\rho) = e_k(\rho x)$ для S_{+1}^* и $y_k(x,\rho) = e_{3-k}(\rho x)$ для S_{-1}^*.

2.3. Перейдем теперь к исследованию уравнения (1) и построим для него соответствующие фундаментальные системы решений методом возмущений.

При $x \in (0,T)$ уравнение (1) имеет целые по λ решения $S_j(x,\lambda)$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие интегральным уравнениям

$$S_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_0^x (C_1(t,\lambda)C_2(x,\lambda) - C_2(t,\lambda)C_1(x,\lambda))q(t)S_j(t,\lambda)\,dt,$$

причем

$$S_j^{(m)}(x,\lambda) = O(x^{\mu_j - m}), \qquad (S_j(x,\lambda) - C_j(x,\lambda))x^{-\mu_j} = o(x^{2\nu}), \quad x \to 0$$

равномерно по λ на компактах. Кроме того,

$$\det\left[S_j^{(m-1)}(x,\lambda)\right]_{j,m=1,2} \equiv 1, \tag{16}$$

$$\left|S_j^{(m)}(x,\lambda)\right| \le C\left|x^{\mu_j - m}\right|, \quad |\rho|x \le 1. \tag{17}$$

Здесь и в дальнейшем одним и тем же символом C будем обозначать различные положительные константы в оценках, не зависящие от x, λ.

В [15] построена фундаментальная система решений уравнения (1) $\{Y_k(x,\rho)\}_{k=1,2}$, $x \in (0,T]$, $\rho \in S_{k_0}$, имеющая следующие свойства:

1) для каждого $x \in (0,T]$ функции $Y_k^{(m)}(x,\rho)$, $m = 0, 1$, регулярны при $\rho \in S_{k_0}$, $|\rho| \ge \rho_*$, и непрерывны при $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $|\rho| \ge \rho_*$;

2) функции $Y_k(x,\rho)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$Y_k(x,\rho) = y_k(x,\rho) + \frac{1}{2i\rho}\sum_{j=1}^{2}\int_{\varepsilon_{jk}}^{x}(-1)^{j-1}y_j(x,\rho)y_{3-j}(t,\rho)q(t)Y_k(t,\rho)\,dt,$$

где $\varepsilon_{jk} = 0$ при $j \le k$, $\varepsilon_{21} = T$;

3) имеют место соотношения

$$\left|Y_k^{(m)}(x,\rho)(\rho R_k)^{-m}\exp(-\rho R_k x) - 1\right| \le \frac{C}{|\rho|x}, \;\; \rho \in \overline{S_{k_0}}, \;\; x \in (0,T], \;\; |\rho|x \ge 1, \;\; m = 0, 1, \tag{18}$$

$$\det\left[Y_k^{(m-1)}(x,\rho)\right]_{k,m=1,2} = -2\rho R_1\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{19}$$

$$Y_k(x,\rho) = \sum_{j=1}^{2} b_{kj}(\rho)S_j(x,\lambda), \tag{20}$$

причем

$$b_{kj}(\rho) = b_{kj}^0\rho^{\mu_j}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad |\rho| \to \infty, \quad \rho \in \overline{S_{k_0}}. \tag{21}$$

Отметим, что важное значение в дальнейшем имеет асимптотика (21) множителей Стокса $b_{kj}(\rho)$.

Используя (18) – (21), изучим асимптотику решений $S_j(x,\lambda)$. Обозначим $d_1^0 = \beta_{12}^0/2i$, $d_2^0 = -\beta_{11}^0/2i$. Тогда

$$d_1^0 d_2^0 = -\frac{1}{4i\sin\pi\nu}.$$

Лемма 2. *При* $|\rho|\to\infty$, $|\rho|x\ge 1$, $x\in(0,T]$, $j=1, 2$, $m=0, 1$, *имеет место асимптотическая формула*

$$S_j^{(m)}(x,\lambda) = d_j^0\rho^{-\mu_j}\Big((i\rho)^m\exp(-i\pi\mu_j)\exp(i\rho x)[1]_0 + (-i\rho)^m\exp(-i\rho x)[1]_0\Big). \tag{22}$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение

$$[1]_0 = 1 + O\left(\frac{1}{|\rho|x}\right), \quad |\rho|x\ge 1$$

(т. е. равенство $f(x,\rho)=[1]_0$ означает, что $|f(x,\rho)-1|\le C/(|\rho|x)$, $|\rho|x\ge 1$).

Доказательство. Разрешая (20) относительно $S_j(x,\lambda)$, получаем

$$S_j(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{2} d_{jk}(\rho)Y_k(x,\rho), \quad j=1,2, \tag{23}$$

где $[d_{jk}(\rho)]_{j,k=1,2} = ([b_{kj}(\rho)]_{k,j=1,2})^{-1}$.

В силу (21) имеем

$$d_{jk}(\rho) = d_{jk}^0\rho^{-\mu_j}[1], \qquad |\rho|\to\infty, \quad \rho\in\overline{S_{k_0}}, \tag{24}$$

где $[d_{jk}^0(\rho)]_{j,k=1,2} = ([b_{jk}^0(\rho)]_{k,j=1,2})^{-1}$ и используется обозначение $[\theta]=\theta+O(1/\rho)$. Формулу (18) запишем в виде

$$Y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho R_k)^m\exp(\rho R_k x)[1]_0, \quad \rho\in\overline{S_{k_0}}, \quad |\rho|x\ge 1; \quad m=0,1,\ k=1,2. \tag{25}$$

Пусть для определенности $\rho\in\overline{S_0}$ (для других ρ вычисления аналогичны). Имеем $R_k=\varepsilon_k$, $b_{kj}^0=\beta_{kj}^0$, и, следовательно, используя (11), находим

$$\begin{bmatrix} d_{11}^0 & d_{12}^0 \\ d_{21}^0 & d_{22}^0\end{bmatrix} = -\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}\beta_{22}^0 & -\beta_{12}^0 \\ -\beta_{21}^0 & \beta_{11}^0\end{bmatrix} = -\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}\beta_{12}^0\exp(i\pi\mu_2) & -\beta_{12}^0 \\ -\beta_{11}^0\exp(i\pi\mu_1) & \beta_{11}^0\end{bmatrix}.$$

Поскольку $\exp(i\pi\mu_1)=-\exp(-i\pi\mu_2)$, $\exp(i\pi\mu_2)=-\exp(-i\pi\mu_1)$, то

$$\begin{bmatrix} d_{11}^0 & d_{12}^0 \\ d_{21}^0 & d_{22}^0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^0\exp(-i\pi\mu_1) & d_1^0 \\ d_2^0\exp(-i\pi\mu_2) & d_2^0\end{bmatrix}. \tag{26}$$

Подставляя (24), (25) в (23) и учитывая (26), получаем (21).

3. Свойства спектра. Рассмотрим функцию

$$\varphi_j(x,\lambda) = \begin{cases} S_j(x,\lambda), & x<a; \\ \omega_{j1}(\lambda)S_1(x,\lambda)+\omega_{j2}(\lambda)S_2(x,\lambda), & x>a,\end{cases} \tag{27}$$

где

$$\omega_{j1}(\lambda) = a_{11}S_j(a,\lambda)S_2'(a,\lambda) - (a_{21}S_j(a,\lambda)+a_{22}S_j'(a,\lambda))\,S_2(a,\lambda),$$

$$\omega_{j2}(\lambda) = -a_{11}S_j(a,\lambda)S_1'(a,\lambda) - (a_{21}S_j(a,\lambda)+a_{22}S_j'(a,\lambda))\,S_1(a,\lambda).$$

По построению функции $\varphi_j(x,\lambda)$, $j=1,2$, являются решениями уравнения (1) при $x<a$ и $x>a$ и удовлетворяют условию

$$\begin{bmatrix} \varphi_j(a+0) \\ \varphi_j'(a+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_j(a-0) \\ \varphi_j'(a-0) \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Согласно (16) и (28) имеем

$$\det\left[\varphi_j^{(m-1)}(x,\lambda)\right]_{j,m=1,2} = \begin{cases} 1, & x<a; \\ \det A, & x>a. \end{cases} \tag{29}$$

Обозначим

$$b^{\pm} = \frac{1}{2}(a_{11} \pm a_{22})$$

и предположим, что $b^+ \neq 0$. Условие $b^+ \neq 0$ будем называть условием регулярности склейки (РС). Ниже в п. 5 приведен контрпример, показывающий существенность условия РС при исследовании краевой задачи L.

Лемма 3. *При* $|\rho|x \geq 1$, $x \in (0,T]$, $j = 1, 2$, $m = 0, 1$, *имеют место асимптотические формулы*

$$\varphi_j^{(m)}(x,\lambda) = d_j^0 \rho^{-\mu_j}\Big((i\rho)^m \exp(-i\pi\mu_j)\exp(i\rho x)[1]_0 + $$
$$+ (-i\rho)^m \exp(-i\rho x)[1]_0\Big), \quad x<a, \tag{30}$$

$$\varphi_j^{(m)}(x,\lambda) = d_j^0 \rho^{-\mu_j}\Big((i\rho)^m\big(b^+\exp(-i\pi\mu_j) + b^-\exp(-2i\rho a)\big)\exp(i\rho x)[1]_0 + $$
$$+ (-i\rho)^m\big(b^-\exp(-i\pi\mu_j)\exp(2i\rho a) + b^+\big)\exp(-i\rho x)[1]_0\Big), \quad x>a. \tag{31}$$

Доказательство. Формула (30) следует из (22), поэтому докажем только формулу (31). Разложим $\varphi_j(x,\lambda)$ по фундаментальной системе решений $\{Y_k(x,\rho)\}_{k=1,2}$ отдельно при $x<a$ и $x>a$:

$$\begin{gathered} \varphi_j(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{2} A_{jk}(\rho) Y_k(x,\rho), \quad x<a, \\ \varphi_j(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{2} Q_{jk}(\rho) Y_k(x,\rho), \quad x>a. \end{gathered} \tag{32}$$

В силу (23) и (27)

$$A_{jk}(\rho) = d_{jk}(\rho). \tag{33}$$

Для вычисления $Q_{jk}(\rho)$ воспользуемся условиями склейки (28). Подставляя (32) в (28), получаем

$$\begin{bmatrix} Y_1(a,\rho) & Y_2(a,\rho) \\ Y_1'(a,\rho) & Y_2'(a,\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{j1}(\rho) \\ Q_{j2}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(a,\rho) & Y_2(a,\rho) \\ Y_1'(a,\rho) & Y_2'(a,\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1}(\rho) \\ A_{j2}(\rho) \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} Q_{j1}(\rho) \\ Q_{j2}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11}(\rho) & \eta_{12}(\rho) \\ \eta_{21}(\rho) & \eta_{22}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1}(\rho) \\ A_{j2}(\rho) \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где

$$\eta_{1k}(\rho) = \frac{1}{w(\rho)}\left(a_{11}Y_k(a,\rho)Y_2'(a,\rho) - a_{21}Y_k(a,\rho)Y_2(a,\rho) - a_{22}Y_k'(a,\rho)Y_2(a,\rho)\right),$$

$$\eta_{2k}(\rho) = -\frac{1}{w(\rho)}\left(a_{11}Y_k(a,\rho)Y_1'(a,\rho) - a_{21}Y_k(a,\rho)Y_1(a,\rho) - a_{22}Y_k'(a,\rho)Y_1(a,\rho)\right), \tag{35}$$

$$w(\rho) = \det\left[Y_k^{(m-1)}(a,\rho)\right]_{k,m=1,2}.$$

Пусть для определенности $\rho \in \overline{S_0}$. Тогда $R_k = \varepsilon_k$. Используя (35) и (25), находим

$$\begin{bmatrix} \eta_{11}(\rho) & \eta_{12}(\rho) \\ \eta_{21}(\rho) & \eta_{22}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b^+] & [b^-]\exp(-2i\rho a) \\ [b^-]\exp(2i\rho a) & [b^+] \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Подставляя теперь (36) в (34) и используя (33), (24) и (26), получаем

$$Q_{j1}(\rho) = d_j^0\rho^{-\mu_j}\left(b^+\exp(-i\pi\mu_j) + b^-\exp(-2i\rho a)\right)[1],$$

$$Q_{j2}(\rho) = d_j^0\rho^{-\mu_j}\left(b^-\exp(-i\pi\mu_j)\exp(2i\rho a) + b^+\right)[1],$$

что вместе с (32) и (25) дает (31).

Обозначим $\Delta(\lambda) = \varphi_2(T,\lambda)$. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой аналитической по λ и ее нули $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ совпадают с собственными значениями краевой задачи (1) – (4). При этом если λ_n — нуль кратности κ_n, то функции

$$\varphi_{ns}(x) = \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\varphi_2(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}, \quad s = \overline{0, \kappa_n - 1},$$

образуют цепочку собственных и присоединенных функций для собственного значения λ_n. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией задачи L. В силу (31) имеет место асимптотическая формула

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\rho)\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad |\rho| \to \infty, \tag{37}$$

где

$$\Delta_0(\rho) = d_2^0\rho^{-\mu_2}\left(b^+\exp(-i\rho T) + \exp(-i\pi\mu_2)\exp(i\rho T)\right) +$$

$$+\ b^-\left(\exp(i\rho(T-2a) + \exp(-i\pi\mu_2)\exp(i\rho(2a-T))\right). \tag{38}$$

Известными методами (см., например, [16]) можно установить, что характеристическая функция и ее нули имеют следующие свойства:

1) при $|\rho| \to \infty$

$$\Delta(\lambda) = O\left(|\rho|^{-\operatorname{Re}\nu - 1/2}\exp(|\operatorname{Im}\rho|T)\right);$$

2) существуют $h > 0$ и $C_h > 0$ такие, что

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_h|\rho|^{-\operatorname{Re}\nu - 1/2}\exp(|\operatorname{Im}\rho|T)$$

при $|\operatorname{Im}\rho| \geq h$; следовательно, все собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ краевой задачи L лежат в полосе $|\operatorname{Im}\rho| < h$;

3) число N_ξ нулей $\Delta(\lambda)$ в прямоугольнике $\Pi_\xi := \{|\operatorname{Im}\rho| < h, \operatorname{Re}\rho \in [\xi, \xi+1]\}$ ограничено по ξ;

4) обозначим $G_\delta = \{\rho\colon |\rho - \rho_n| \geq \delta \ \forall n\}$, тогда

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{-\operatorname{Re}\nu - 1/2} \exp(|\operatorname{Im}\rho| T), \quad \rho \in G_\delta; \tag{39}$$

5) существуют числа $R_N \to \infty$ такие, что при достаточно малых $\delta > 0$ окружности $|\rho| = R_N$ лежат в G_δ при всех N;

6) пусть $\{\rho_n^0\}$ — нули функции $\Delta_0(\rho)$ вида (38), тогда при $n \to \infty$

$$\rho_n = \rho_n^0 + o(1).$$

4. Решение Вейля. Функция Вейля. Пусть функция $\Phi(x,\lambda)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям $\Phi(x,\lambda) \sim c_{10} x^{\mu_1}$, $x \to 0$, $\Phi(T,\lambda) = 0$, а также условиям склейки (4). Функцию $\Phi(x,\lambda)$ будем называть решением Вейля для краевой задачи L (по аналогии с решением Вейля для классической задачи Штурма – Лиувилля). Обозначим

$$M(\lambda) = -\frac{\delta(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{40}$$

где $\delta(x) := \varphi_1(T,\lambda)$. Ясно, что

$$\Phi(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi_2(x,\lambda). \tag{41}$$

Функцию $M(\lambda)$ будем называть функцией Вейля для L. Решение Вейля и функция Вейля являются мероморфными по λ функциями с полюсами на спектре задачи L. Из (40) и (41) вытекает

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{42}$$

где

$$\Psi(x,\lambda) = \varphi_1(T,\lambda)\varphi_2(x,\lambda) - \varphi_2(T,\lambda)\varphi_1(x,\lambda). \tag{43}$$

Функция $\Psi(x,\lambda)$ является целым по λ решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям $\Psi(T,\lambda) = 0$, $\Psi'(T,\lambda) = \det A$, а также условиям склейки (4). Отметим, что в силу (29), (41) и (42),

$$\langle \Phi(x,\lambda),\, \varphi_2(x,\lambda)\rangle \equiv \begin{cases} 1, & x < a; \\ \det A, & x > a, \end{cases}$$
$$\langle \varphi_2(x,\lambda),\, \Psi(x,\lambda)\rangle \equiv \Delta(\lambda)\begin{cases} 1, & x < a; \\ \det A, & x > a, \end{cases} \tag{44}$$

где $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$.

Лемма 4. *При* $|\rho| \to \infty$, $|\rho| x \geq 1$, $x \in (0,T]$, $j = 1, 2$, $m = 0, 1$, *имеют место асимптотические формулы*

$$\Psi^{(m)}(x,\lambda) = \frac{\det A}{2i\rho}\left(\exp(-i\rho(T-x))[1]_0 - \exp(i\rho(T-x))[1]_0\right), \quad x > a, \tag{45}$$

$$\Psi^{(m)}(x,\lambda) = \frac{b^+}{2i\rho}\left(\exp(-i\rho(T-x))[1]_0 - \exp(i\rho(T-x))[1]_0\right) +$$
$$+ \frac{b^-}{2i\rho}\left(\exp(i\rho(T-2a))\exp(i\rho x)[1]_0 - \exp(i\rho(2a-T))\exp(-i\rho x)[1]_0\right), \quad x < a. \tag{46}$$

Доказательство. Разложим $\Psi(x,\lambda)$ по фундаментальной системе решений $\{Y_k(x,\rho)\}_{k=1,2}$ отдельно при $x<a$ и $x>a$:

$$\Psi(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{2} A_k(\rho)Y_k(x,\rho), \quad x<a,$$
$$\Psi(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{2} Q_k(\rho)Y_k(x,\rho), \quad x>a. \tag{47}$$

Используя начальные условия $\Psi(T,\lambda)=0$, $\Psi'(T,\lambda)=\det A$, вычисляем $Q_k(\rho)$:

$$Q_1(\rho) = -\frac{\det A}{w(\rho)}Y_2(T,\rho), \quad Q_2(\rho) = \frac{\det A}{w(\rho)}Y_1(T,\rho), \quad w(\rho) = \det\left[Y_k^{(m-1)}(T,\rho)\right]_{k,m=1,2}. \tag{48}$$

Далее, используя условие склейки (4), как и при доказательстве леммы 3, получаем

$$\begin{bmatrix} Q_1(\rho) \\ Q_2(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11}(\rho) & \eta_{12}(\rho) \\ \eta_{21}(\rho) & \eta_{22}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(\rho) \\ A_2(\rho) \end{bmatrix}, \tag{49}$$

где функции $\eta_{sk}(\rho)$ вычисляются по формуле (35). Поскольку $\det[\eta_{sk}(\rho)]_{s,k=1,2} \equiv \det A$, то из (49) следует

$$\begin{bmatrix} A_1(\rho) \\ A_2(\rho) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \eta_{22}(\rho) & -\eta_{21}(\rho) \\ -\eta_{21}(\rho) & \eta_{11}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(\rho) \\ Q_2(\rho) \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Пусть для определенности $\rho \in \overline{S_0}$. Тогда $R_k = \varepsilon_k$. Подставляя асимптотические формулы (25) и (36) в (48) и (50), получаем

$$Q_1(\rho) = \frac{\det A}{2i\rho}\exp(-i\rho T)[1], \quad Q_2(\rho) = -\frac{\det A}{2i\rho}\exp(i\rho T)[1],$$

$$A_1(\rho) = \frac{1}{2i\rho}\Big(b^+\exp(-i\rho T) + b^-\exp(i\rho(T-2a))\Big)[1],$$

$$A_2(\rho) = -\frac{1}{2i\rho}\Big(b^-\exp(i\rho(2a-T)) + b^+\exp(i\rho T)\Big)[1],$$

что вместе с (47) приводит к (45) и (46).

***Следствие* 1.** *При* $\rho \in G_\delta$ *имеют место оценки*

$$\left|\Phi^{(m)}(x,\lambda)\right| \le C_\delta|\rho|^{m+\operatorname{Re}\nu-1/2}\exp(-|\operatorname{Im}\rho|x), \quad m=0,1, \quad |\rho|x \ge 1, \tag{51}$$

$$|M(\lambda)| \le C_\delta|\rho|^{2\nu}. \tag{52}$$

В самом деле, оценка (51) следует из (42), (39) и леммы 4, а оценка (52) — из (40), (39) и леммы 3.

5. Теорема о полноте. Пусть α — вещественное число и $1 \le p < \infty$. Рассмотрим банаховы пространства $\Phi_{\alpha,p} = \{f(x) : f(x)x^{-\alpha} \in L_p(0,T)\}$ с нормой $\|f\|_{\alpha,p} = \left\|f(x)x^{-\alpha}\right\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(0,T)$. Через $\Phi^*_{\alpha,p}$ обозначим сопряженное пространство. Ясно, что $\Phi^*_{\alpha,p} = \Phi_{-\alpha,p}(p^{-1}+q^{-1}=1,$ $p>1)$. Покажем, что

$$\Phi_{\alpha,p} \subseteq \Phi_{\beta,s}, \qquad 1 \le s \le p < \infty, \quad \beta-\alpha < s^{-1}-p^{-1} \tag{53}$$

(символ $\subseteq$ обозначает плотное вложение [17]). В самом деле, при $\alpha \ge \beta$, $s \le p$ имеем $\Phi_{\alpha,p} \subseteq \Phi_{\beta,p}$, $\Phi_{\beta,p} \subseteq \Phi_{\beta,s}$, и (53) очевидно. Предположим теперь, что $\alpha < \beta$, $s < p$. Рассмотрим функцию $f(x) \in \Phi_{\alpha,p}$. Положим $r = p/s$, $r' = p/(p-s)$. Тогда $r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. Поскольку $\beta - \alpha < s^{-1} - p^{-1}$, то $(\alpha-\beta)sr' > -1$. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\left\| f(x) x^{-\beta} \right\|_s \le \left\| f(x) x^{-\alpha} \right\|_{sr} \cdot \left\| x^{\alpha-\beta} \right\|_{sr'},$$

и, следовательно, $\| f \|_{\beta,s} \le C \| f \|_{\alpha,p}$. Поскольку $\Phi_{\alpha,p}$ плотно в $\Phi_{\beta,s}$, то получаем (53). Из (53), в частности, следует, что

$$\Phi_{\alpha,p} \subseteq L_s, \quad 1 \le s \le p < \infty, \quad \alpha > p^{-1} - s^{-1}.$$

Обозначим $\omega = \operatorname{Re} \nu + 1/2$. Справедлива следующая теорема о полноте.

Теорема 1. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи L полна в пространствах $\Phi_{\beta,s}$ при $1 \le s < \infty$, $\beta < \omega + 1/s$.*

Доказательство. Для краткости ограничимся случаем простого спектра, т. е. случаем, когда характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ имеет только простые нули. Общий случай рассматривается аналогично. Поскольку собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ задачи L являются нулями характеристической функции $\Delta(\lambda)$, то в силу (44) и условий склейки (4) имеем

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi_2(x, \lambda_n), \quad \beta_n \ne 0. \tag{54}$$

Функции $\varphi_2(x, \lambda_n)$ и $\psi(x, \lambda_n)$ являются собственными функциями задачи L для собственных значений λ_n.

Пусть функция $f(x)$, $x \in (0, T)$ такова, что

$$f(x) x^{\omega} \in L(0, T), \qquad \int_0^T \varphi_2(x, \lambda_n) f(x)\, dx = 0, \quad n \ge 1. \tag{55}$$

Рассмотрим функцию

$$Y(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left(\psi^*(x, \lambda) \int_0^x \varphi_2(t, \lambda) f(t)\, dt + \varphi_2^*(x, \lambda) \int_x^T \psi(t, \lambda) f(t)\, dt \right), \tag{56}$$

где

$$\psi^*(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda)}{\eta(x)}, \qquad \varphi_2^*(x, \lambda) = \frac{\varphi_2(x, \lambda)}{\eta(x)}, \qquad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x < a; \\ \det A, & x > a. \end{cases} \tag{57}$$

Поскольку в силу (44)

$$\varphi_2(x, \lambda) \psi^{*\prime}(x, \lambda) - \varphi_2^{*\prime}(x, \lambda) \psi(x, \lambda) \equiv 1,$$

то прямым вычислением убеждаемся, что функция $Y(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$lY(x, \lambda) - \lambda Y(x, \lambda) = f(x) \tag{58}$$

отдельно при $x < a$ и $x > a$. Используя (54) – (57), подсчитаем вычеты функции $Y(x, \lambda)$ в точках спектра $\lambda = \lambda_n$:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = \frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\left(\psi^*(x,\lambda_n)\int_0^x \varphi_2(t,\lambda_n)f(t)\,dt + \varphi_2^*(x,\lambda_n)\int_x^T \psi(t,\lambda_n)f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{\beta_n}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\varphi_2^*(x,\lambda_n)\int_0^T \varphi_2(t,\lambda_n)f(t)\,dt,$$

где $\dot{\Delta}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$. Согласно (55) имеем

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = 0.$$

Таким образом, при каждом фиксированном $x \in (0,T)$ функция $Y(x,\lambda)$ является целой аналитической по λ.

С другой стороны, использовав результаты пп. 3, 4, оценим функцию $Y(x,\lambda)$ в области G_δ. Зафиксируем $x \in (0,T)$. Тогда $|\rho|x \geq 1$ при достаточно больших ρ. В силу (30), (31) и (45), (46) имеем

$$\begin{gathered} \left|\varphi_2^{(m)}(x,\lambda)\right| \leq C|\rho|^{m-\omega}\exp(|\operatorname{Im}\rho|x), \quad |\rho|x \geq 1, \\ \left|\psi^{(m)}(x,\lambda)\right| \leq C|\rho|^{m-1}\exp(|\operatorname{Im}\rho|(T-x)), \quad |\rho|x \geq 1. \end{gathered} \tag{59}$$

Следовательно, с учетом (39) и (57) получаем оценку

$$|Y(x,\lambda)| \leq C_\delta\left(|\rho|^{\omega-1}\exp(-|\operatorname{Im}\rho|x)\int_0^x |\varphi_2(t,\lambda)f(t)|\,dt + \right.$$

$$\left. + \exp(-|\operatorname{Im}\rho|(T-x))\int_x^T |\psi(t,\lambda)f(t)|\,dt\right). \tag{60}$$

Далее, в силу (17) и (27)

$$|\varphi_2(x,\lambda)| \leq Ct^\omega, \quad t \leq \frac{1}{|\rho|}, \tag{61}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{1/|\rho|} |\varphi_2(t,\lambda)f(t)|\,dt \leq C\int_0^{1/|\rho|} t^\omega|f(t)|\,dt.$$

Используя (59), имеем

$$\int_{1/|\rho|}^x |\varphi_2(t,\lambda)f(t)|\,dt \leq C|\rho|^{-\omega}\int_{1/|\rho|}^x \exp(|\operatorname{Im}\rho|t)|f(t)|\,dt \leq$$

$$\leq C|\rho|^{-\omega}\exp(|\operatorname{Im}\rho|x)\int_{1/|\rho|}^x |f(t)|\,dt \leq C\exp(|\operatorname{Im}\rho|x)\int_{1/|\rho|}^x t^\omega|f(t)|\,dt,$$

а также

$$\int_x^T |\psi(t,\lambda)f(t)|\,dt \leq C\left|\rho^{-1}\right|\int_x^T \exp(|\operatorname{Im}\rho|(T-x))|f(t)|\,dt \leq$$

$$\leq C\exp(|\operatorname{Im}\rho|(T-x))|\rho|^{\omega-1}\int_x^T t^\omega|f(t)|\,dt.$$

Подставляя в (60), получаем оценку

$$|Y(x,\lambda)| \le C_\delta |\rho|^{\omega-1}, \quad \rho \in G_\delta.$$

Поскольку при фиксированном x функция $Y(x,\lambda)$ является целой по λ, то из последней оценки вытекает, что $Y(x,\lambda)$ является многочленом по λ, что вместе с (58) дает $Y(x,\lambda)\equiv 0$ и $f(x)=0$ п. в. на $(0,T)$.

Таким образом, мы доказали, что при каждом p $(1\le p<\infty)$ система функций $\{\varphi_2(x,\lambda_n)\}_{n\ge 1}$ полна в $\Phi_{\omega,p}$. Поскольку по условию $\beta-\omega<1/s$, то $\beta-\omega< <1/s-1/p$ при достаточно большом p, и согласно (53) $\Phi_{\omega,p}\subseteq\Phi_{\beta,s}$. Следовательно, система функций $\{\varphi_2(x,\lambda_n)\}_{n\ge 1}$ полна в $\Phi_{\beta,s}$. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Система собственных и присоединенных функций задачи L полна в $L_s(0,T)$ при $1\le s<\infty$.*

Приведем контрпример, показывающий существенность условия PC $\beta^+\ne 0$. Рассмотрим краевую задачу L при $\nu_0=0$, $q(x)\equiv 0$, $T=\pi$, $a=3\pi/4$, $a_{11}= =-a_{22}=1$, $a_{21}=a_{12}=0$, т. е. рассмотрим задачу

$$-y''=\lambda y, \quad 0<x<\pi,$$

$$y(0)=y(\pi)=0, \tag{62}$$

$$y^{(m)}(a+0)=(-1)^m y^{(m)}(a-0), \quad m=0,1, \quad a=\frac{3}{4}\pi.$$

Для этой задачи $b^+=0$, т. е. условие PC не выполняется. Характеристическая функция задачи (62) имеет вид

$$\Delta(\lambda)=\frac{\sin\rho(2a-\pi)}{\rho}.$$

Собственные значения $\lambda_n=\rho_n^2$ суть $\rho_n=2n$, $n\ge 1$, а собственные функции имеют вид

$$y_n(x)=\begin{cases}\sin 2nx, & x\le\dfrac{3}{4}\pi;\\ (-1)^{n-1}\sin 2nx, & x\ge\dfrac{3}{4}\pi.\end{cases}$$

Система функций $\{y_n(x)\}_{n\ge 1}$ неполна в $\Phi_{\beta,s}$ при $1\le s<\infty$, $\beta<1+1/s$.

6. Обратная задача. В этом пункте исследуется обратная задача восстановления краевой задачи L вида (1) – (4) по заданным ее спектральным характеристикам. Мы рассмотрим две постановки обратной задачи восстановления краевой задачи L по функции Вейля и по дискретным спектральным данным. Эти обратные задачи являются обобщениями известных обратных задач для оператора Штурма – Лиувилля (см. [3, 4]).

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи по функции Вейля. Для этого наряду с L рассмотрим краевую задачу $\tilde L$ того же вида, но с другим потенциалом $\tilde\nu_0/x^2+\tilde q(x)$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче L, то $\tilde\alpha$ будет обозначать объект, относящийся к задаче $\tilde L$.

Теорема 2. *Если $M(\lambda)=\tilde M(\lambda)$, то $L=\tilde L$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет краевую задачу L.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$P_m(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2^{(m)}(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}^{(m)}(x,\lambda), \quad m = 0, 1. \tag{63}$$

При каждом фиксированном $x \in (0, T]$ функции $P_m(x,\lambda)$ являются мероморфными по λ с полюсами в точках $\lambda = \lambda_n$ и $\lambda = \tilde{\lambda}_n$. Зафиксируем $x \in (0, T]$. Тогда $|\rho|x \gtrsim 1$ при достаточно больших ρ. Обозначим $G_\delta^0 = G_\delta \cap \tilde{G}_\delta$. В силу (51) и (59) имеем

$$|P_0(x,\lambda)| \le \frac{G_\delta}{|\rho|}, \quad |P_1(x,\lambda)| \le G_\delta, \quad \rho \in G_\delta. \tag{64}$$

Подставляя (41) в (63), вычисляем

$$P_m(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2^{(m)}(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1^{(m)}(x,\lambda) + (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\varphi_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2^{(m)}(x,\lambda) \tag{65}$$

Поскольку по условию $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то из (65) следует, что при каждом фиксированном $x \in (0, T]$ функции $P_m(x,\lambda)$ являются целыми аналитическими по λ. Вместе с (64) это дает

$$P_0(x,\lambda) \equiv 0, \quad P_1(x,\lambda) \equiv P(x).$$

Но тогда

$$\Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda),$$

$$P(x)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) = (\Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2'(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda))\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) =$$

$$= (\tilde{\Phi}(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2'(x,\lambda) - \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda))\varphi_2(x,\lambda) = \tilde{\eta}(x)\varphi_2(x,\lambda).$$

Аналогично

$$P(x)\tilde{\Phi}(x,\lambda) = \tilde{\eta}(x)\Phi(x,\lambda).$$

Таким образом,

$$\frac{\varphi_2(x,\lambda)}{\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)} = \frac{\Phi(x,\lambda)}{\tilde{\Phi}(x,\lambda)} = \frac{P(x)}{\tilde{\eta}(x)}. \tag{66}$$

Далее, из (30), (31) следует, что при $|\rho| \to \infty$, $\arg\rho \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,\lambda) &= d_2^0\rho^{-\omega}\exp(-i\rho x)[1], \quad x < a, \\ \varphi_2(x,\lambda) &= d_2^0 b^+\rho^{-\omega}\exp(-i\rho x)[1], \quad x > a. \end{aligned} \tag{67}$$

Аналогично, используя (42), (45), (46) и (37), (38), получаем что при $|\rho| \to \infty$, $\arg\rho \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \Phi(x,\lambda) &= -\frac{\rho^{\omega-1}}{2id_2^0}\exp(i\rho x)[1], \quad x < a, \\ \Phi(x,\lambda) &= -\frac{\det A\cdot\rho^{\omega-1}}{2id_2^0 b^+}\exp(i\rho x)[1], \quad x > a. \end{aligned} \tag{68}$$

Подставляя (67) и (68) при $x < a$ в (66), получаем $\omega = \tilde{\omega}$, $P(x) \equiv P$ – const при $x < a$, т. е.

$$\varphi_2(x,\lambda) \equiv P\tilde{\varphi}_2(x,\lambda), \quad \Phi(x,\lambda) \equiv P\tilde{\Phi}(x,\lambda), \quad x < a.$$

Следовательно, $\nu_0 = \tilde{\nu}_0$ и $q(x) = \tilde{q}(x)$ п. в. при $x \in (0, a)$. Подставляя теперь (67) и (68) при $x > a$ в (66), получаем

$$\frac{P(x)}{\det \tilde{A}} \equiv P_* - \text{const},$$

т. е.

$$\varphi_2(x, \lambda) \equiv P_* \tilde{\varphi}_2(x, \lambda), \qquad \Phi(x, \lambda) \equiv P_* \tilde{\Phi}(x, \lambda), \quad x > a.$$

Следовательно, $q(x) = \tilde{q}(x)$ п. в. при $x \in (a, T)$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь обратную задачу восстановления L по дискретным спектральным характеристикам. Для краткости ограничимся случаем простого спектра. Обозначим

$$\alpha_n = \int_0^T \varphi_2(x, \lambda_n) \varphi_2^*(x, \lambda_n)\, dx.$$

Совокупность чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \ge 1}$ будем называть спектральными данными краевой задачи L. Обратная задача ставится следующим образом: по заданным спектральным данным построить задачу L. Докажем теорему единственности восстановления L по спектральным данным.

Теорема 3. *Если* $\lambda = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ *при всех* $n \ge 1$, *то* $L = \tilde{L}$. *Таким образом, задание спектральных данных однозначно определяет задачу* L.

Доказательство. Покажем, что справедливо соотношение

$$\alpha_n = \frac{\dot{\Delta}(\lambda_n)}{\beta_n}, \tag{69}$$

где числа β_n определяются из соотношения (54). Действительно, из соотношений

$$-\varphi_2^{*}(x, \lambda) + \left(\frac{\nu_0}{x^2} + q(x)\right)\varphi_2(x, \lambda) = \lambda \varphi_2(x, \lambda),$$

$$-\varphi_2^{*\prime\prime}(x, \lambda_n) + \left(\frac{\nu_0}{x^2} + q(x)\right)\varphi_2^*(x, \lambda_n) = \lambda_n \varphi_2^*(x, \lambda_n)$$

имеем

$$\frac{d}{dx}\langle \varphi_2(x, \lambda), \varphi_2^*(x, \lambda_n)\rangle = (\lambda - \lambda_n)\, \varphi_2(x, \lambda)\, \varphi_2^*(x, \lambda_n)$$

отдельно при $x < a$ и $x > a$. Следовательно,

$$(\lambda - \lambda_n) \int_0^T \varphi_2(x, \lambda)\, \varphi_2^*(x, \lambda_n)\, dx = \left(\Big|_0^a + \Big|_a^T \right) \langle \varphi_2(x, \lambda), \varphi_2^*(x, \lambda_n)\rangle.$$

Используя (61) и условия склейки (4), получаем

$$(\lambda - \lambda_n) \int_0^T \varphi_2(x, \lambda) \varphi_2^*(x, \lambda_n)\, dx = \varphi_2(T, \lambda) \varphi_2^{*\prime}(T, \lambda_n),$$

и, следовательно,

$$\int_0^T \varphi_2(x, \lambda_n) \varphi_2^*(x, \lambda_n)\, dx = \dot{\Delta}(\lambda_n) \varphi_2^{*\prime}(T, \lambda_n). \tag{70}$$

Согласно (54) и (57) $\psi^{*\prime}(T,\lambda_n) = \beta_n\varphi_2^{*\prime}(T,\lambda_n)$, т. е. $\varphi_2^{*\prime}(T,\lambda_n) = 1/\beta_n$, что вместе с (70) дает (69).

Далее, в силу (40)

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) = -\frac{\delta(\lambda_n)}{\dot\Delta(\lambda_n)} = -\frac{\varphi_1(T,\lambda_n)}{\dot\Delta(\lambda_n)}.$$

Согласно (43) $\psi(x,\lambda_n) = \varphi_1(T,\lambda_n)\varphi_2(x,\lambda_n)$. Сравнивая с (54), получаем $\beta_n = \varphi_1(T,\lambda_n)$, и, следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) = -\frac{\beta_n}{\dot\Delta(\lambda_n)} = -\frac{1}{\alpha_n}. \tag{71}$$

Пусть теперь $\lambda = \tilde\lambda_n$, $\alpha = \tilde\alpha_n$ при всех $n \ge 1$. Определим функции $P_m(x,\lambda)$ по формуле (63). В силу (65) и (71) функции $P_m(x,\lambda)$ являются целыми по λ при каждом фиксированном $x \in (0,T]$. Повторяя теперь рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2, получаем $L = \tilde L$.

Замечание. Аналогичные результаты справедливы и для краевых задач с произвольным числом точек разрыва внутри интервала.

1. *Литвиненко О. Н., Сошников В. И.* Теория неоднородных линий передач и ее приложения в радиоэлектронике. – М.: Радио, 1964. – 536 с.
2. *Lapwood F. R., Usami T.* Free oscillations of the Earth. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981. – 231 p.
3. *Левитан Б. М., Саргсян Ч. С.* Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 329 с.
5. *Березанский Ю. М.* Теорема единственности в обратной спектральной задаче для уравнения Шредингера // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1958. – **7**. – С. 3 – 51.
6. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1977. – 329 с.
7. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // Communs Pure and Appl. Math. – 1984. – **37**. – P. 539 – 577.
8. *Shepelsky D.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions // Spectral operator theory and related topics: Adv. in Sov. Math. – Providence: Amer. Math. Soc., 1994. – **19**. – P. 209 – 232.
9. *Kobayashi M.* A uniqueness proof for discontinuous inverse Sturm – Liouville problems with symmetric potentials // Inverse Problems. – 1989. – **5**, № 5. – P. 767 – 781.
10. *Гасымов М. Г.* Обратная задача по двум спектрам для уравнения Штурма – Лиувилля с особенностью // Докл. АН СССР. – 1965. – **161**, № 2.
11. *Гасымов М. Г., Амиров Р. Х.* Прямые и обратные задачи для дифференциальных операторов второго порядка с кулоновской особенностью // Докл. АН АзССР. – 1985. – **41**, № 8.
12. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval // Integral Transforms and Special Functions. – 1997. – **5**, № 3, 4. – P. 309 – 322.
13. *Yurko V. A.* On higher-order differential operators with a singular point // Inverse Problems. – 1993. – **9**. – P. 495 – 502.
14. *Юрко В. А.* Восстановление дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля с особенностью внутри интервала // Мат. заметки. – 1998. – **64**, № 1. – С. 143 – 156.
15. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 8. – С. 1355 – 1362.
16. *Bellman R., Cooke K.* Differential-difference equations. – New York: Acad. Press, 1963. – 462 p.
17. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1982. – 400 с.

Получено 28.08.2000