УДК 517.946

М. А. Бородин (Донец. нац. ун-т)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

We consider a many-dimensional free boundary problem for a parabolic equation that appears in the combustion theory. We prove the existence of the global classical solution.

The essence of the method consists in the following steps: first we apply the difference-differential approximation to the problem and establish its solvability and then we prove uniform estimates and perform the limiting transition.

Розглядається багатовимірна проблема з довільною межею для параболічного рівняння, яка виникає в теорії горіння. Доведено існування глобального класичного розв'язку.

Суть методу полягає в тому, що спочатку створюється диференціально-різницева апроксимація задачі та встановлюється її розв'язність, а потім доводяться рівномірні оцінки і здійснюється граничний перехід.

1. Введение. Постановка задачи. Мы рассматриваем задачу, которая возникает в теории горения при математическом моделировании процесса распространения диффузионного пламени. Опытные данные и теоретическое рассмотрение свидетельствуют о том, что при распространении пламени реакция идет в сравнительно тонком слое — зоне реакции. Поэтому в первом приближении распространение пламени можно представить так: имеются две области — несгоревшего газа и продуктов реакции, которые разделены поверхностью горения, толщиной которой можно пренебречь и рассматривать ее как геометрическую поверхность, движущуюся относительно газа со скоростью распространения пламени. Таким образом, математическая модель представляет собой задачу со свободной (неизвестной) границей. Основная трудность подобного рода задач состоит не в интегрировании основных уравнений, а в удовлетворении граничных условий, которые, с одной стороны, нелинейно содержат искомые величины, а с другой — должны выполняться на неизвестной границе.

Пусть

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < R_1 < |x| < R_2\}, \quad \partial D_i = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R_i\},$$
$$i = 1, 2, \quad D_T = D \times (0, T), \quad \partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2, \quad \partial D_T = \partial D \times [0, T].$$

Требуется найти тройку $\{u(x,t), \Omega_T, G_T\}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T \cup G_T, \tag{1.1}$$

где T — заданное положительное число,

$$\Omega_T = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) < 0\}, \quad G_T = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) > 0\}.$$

На свободной границе $\gamma_T = \partial\Omega_T \cap D_T = \partial G_T \cap D_T$ выполнены условия

$$u^+ = u^- = 0, \quad (u_\nu^+)^2 - (u_\nu^-)^2 = Q^2(x). \tag{1.2}$$

Здесь ν — пространственная единичная нормаль, проведенная к свободной границе γ_T и направленная в сторону возрастания функции $u(x,t)$, $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$.

На известной части границы

$$\begin{gathered} u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{на} \quad (\partial\Omega_T \cap \partial D_T) \cup (\partial G_T \cap \partial D_T), \\ \varphi(x,t) < 0 \quad \text{на } \partial\Omega_T \cap \partial D_T, \quad \varphi(x,t) > 0 \quad \text{на } \partial G_T \cap \partial D_T. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Начальные условия таковы:

$$
\begin{gathered}
u(x, 0) = \psi(x) \quad \text{в } D, \qquad \varphi(x, 0) = \psi(x) \quad \text{на } \partial D, \\
\psi(x) > 0 \quad \text{в } \partial G_0 \cap \partial D, \qquad \psi(x) < 0 \quad \text{на } \partial \Omega_0 \cap \partial D, \\
\Omega_0 = \{x \in D : \psi(x) < 0\}, \qquad G_0 = \{x \in D : \psi(x) > 0\}, \\
\gamma_0 = \{x \in D : \psi(x) = 0\}.
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Отметим некоторые из исследований, посвященные проблеме существования решения этой задачи. В работах [1, 2] решение указанной выше проблемы получено как предел при $\varepsilon \to 0$ семейства функций $\{u^\varepsilon(x, t)\}$, являющихся решением следующей задачи:

$$
\Delta u^\varepsilon - u_t^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \qquad \beta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \qquad \operatorname{supp}\beta = [0, 1],
$$

β удовлетворяет условию Липшица и

$$
\int_{\mathbb{R}} \beta(s)\, ds = M,
$$

где M — положительная константа и функции $u^\varepsilon(x, t)$ определены в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Доказано существование слабого решения.

В работе [3] рассмотрена аналогичная однофазная задача. Доказано существование глобального классического решения в осесимметрическом случае. Имеется и ряд других работ, в которых либо рассмотрена одномерная задача, либо изучается проблема существования слабого решения. В работе автора [4] впервые доказано существование глобального классического решения в двухфазной многомерной задаче. В настоящей работе это же утверждение доказано при менее ограничительных условиях на функции, задающие начальные и краевые условия.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены предположения*

$$
\varphi(x, t) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\partial D_T), \qquad \psi(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \qquad Q(x) \in C^{1+\alpha}(D),
$$

$$
\gamma_0 \in C^{2+\alpha}, \qquad Q(x) \neq 0, \qquad \varphi(x, t) < 0 \text{ на } \partial D_1, \qquad \varphi(x, t) > 0 \text{ на } \partial D_2,
$$

а также соответствующие условия согласования. Тогда для любого $T > 0$ *задача* (1.1)–(1.4) *разрешима, причем*

$$
u(x, t) \in C(\overline{D}_T) \cap \left\{H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T \setminus \gamma_0) \times H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{G}_T \setminus \gamma_0)\right\},
$$

γ_T — *поверхность класса* $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}$.

Мы рассматриваем пространство $\mathbb{R}^3$, но все полученные результаты справедливы в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Суть примененного метода заключается в следующем: сначала создается некоторая параболическая дифференциально-разностная аппроксимация задачи, затем устанавливаются равномерные оценки и совершается предельный переход. Этот метод представляет собой естественное развитие идеи построения специальной аппроксимации задачи со свободной границей, примененной автором для изучения проблемы Стефана в работе [5].

2. Аппроксимация задачи. Свойства приближенных решений. Перейдем к построению аппроксимирующих задач. Рассечем цилиндр $D_{T, T_1} = D_T \times$

$\times(0, T_1)$ плоскостями $\tau = kh$, $hN = T_1$, $k = 1, 2, \ldots, N$ (N — заданное целое положительное число). Определим функцию $\chi_\varepsilon(x) \in C^k(\mathbb{R}^1)$, где $k \geq 2$, $\varepsilon > 0$, следующим образом:

$$\chi_\varepsilon(x) = 1 \quad \forall x \leq 0, \qquad \chi_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \geq \varepsilon, \qquad \chi'_\varepsilon(x) \leq 0.$$

Пусть функции $\{u_k(x, t, h, \varepsilon)\}$, $\{F_k(x, t, h, \varepsilon)\}$ являются решениями следующей задачи:

$$\Delta u_k - \frac{\partial u_k}{\partial t} - a\,\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = -\lambda\,\frac{\chi_\varepsilon(u_k) - \chi_\varepsilon(u_0)}{h} - \frac{Q^2(x)}{2}\sum_{l=1}^{k-1}\chi'_\varepsilon(u_l) + \frac{a}{h}F_{k-1} \quad \text{в } D_T,$$

$$u_k(x, t, h, \varepsilon) = \varphi(x, t, kh) = \varphi_k(x, t, h) \text{ в } \partial D_T, \tag{2.1}$$

$$u_k(x, 0, h, \varepsilon) = \psi(x, kh) = \psi_k(x, h) \quad \text{в } D, \qquad u_0 = \omega(x, t) \quad \text{в } D_T, \tag{2.2}$$

где $\varphi(x, t, \tau)$, $\psi(x, \tau)$, $\omega(x, t)$ — заданные функции,

$$\Delta F_k - \frac{\partial F_k}{\partial t} - a\,\frac{F_k}{h} = -\lambda\,\frac{\chi_\varepsilon(u_k) - \chi_\varepsilon(u_0)}{h} - \frac{Q^2(x)}{2}\sum_{l=1}^{k-1}\chi'_\varepsilon(u_l) \quad \text{в } D_T, \tag{2.3}$$

$$F_k(x, t, h, \varepsilon) = 0 \quad \text{на } \partial D_T, \quad F_k(x, 0, h, \varepsilon) = 0 \quad \text{в } D, \quad F_0 = 0 \quad \text{в } D_T. \tag{2.4}$$

Задача (2.1) – (2.4) может быть исследована последовательно, начиная с $k = 1$. Сначала находим функцию $F_{k-1}(x, t, h, \varepsilon)$ (заметим, что $F_0 = 0$), затем эту функцию подставляем в правую часть уравнения (2.1) и исследуем соответствующую начально-краевую задачу для функции $u_k(x, t, h, \varepsilon)$. Найденную функцию $u_k(x, t, h, \varepsilon)$ подставляем в правую часть уравнения (2.3) и находим функцию $F_k(x, t, h, \varepsilon)$ и так далее. Разрешимость каждой из задач, перечисленных выше, в гельдеровских пространствах известна [6].

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия*

$$\psi_k(x, h) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \qquad \varphi_k(x, t, h) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\partial D_T),$$

$$Q(x) \in C^\alpha(\overline{D}), \quad \alpha \in (0, 1), \qquad \omega(x, t) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}_T),$$

и для функций $\psi_k(x, h)$, $\varphi_k(x, t, h)$ *выполнены соответствующие условия согласования на* ∂D_l *при* $t = 0$. *Тогда для любых* $h > 0$, $\varepsilon > 0$ *задача* (2.1) – (2.4) *однозначно разрешима, а функции*

$$u_k(x, t, h, \varepsilon), F_k(x, t, h, \varepsilon) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}_T).$$

Обозначим

$$w_k = u_k(x, t, h, \varepsilon) - F_k(x, t, h, \varepsilon). \tag{2.5}$$

Вычитая (2.3) из (2.1) и учитывая (2.5), получаем

$$\Delta w_k - \frac{\partial w_k}{\partial t} - a\,\frac{w_k - w_{k-1}}{h} = 0 \qquad \forall (x, t) \in D_T, \tag{2.6}$$

$$w_k(x, t, h) = \varphi_k(x, t, h) \quad \text{на } \partial D_T,$$

$$w_k(x, 0, h) = \psi_k(x, h) \quad \text{в } D, \qquad w_0 = \omega(x, t) \quad \text{на } D_T. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.1 *и существуют такие положительные константы* c_i, $i = 1, \ldots, 5$, *что* $\Delta\omega - \dfrac{\partial\omega}{\partial t} < -c_1$,

$$0 \le c_2 h \le \varphi_{k-1}(x, t, h) - \varphi_k(x, t, h) \le c_3 h \quad \text{на } \partial D_T,$$

$$0 \le c_4 h \le \varphi_{k-1}(x, h) - \varphi_k(x, h) \le c_5 h \quad \text{в } D.$$

Тогда найдутся такие положительные константы c_6, c_7, *что всюду в* $\overline{D}_T$ *имеет место оценка*

$$c_6 h \le w_{k-1}(x, t, h) - w_k(x, t, h) \le c_7 h, \tag{2.8}$$

где константы c_j *не зависят от* h, k.

На ∂D_T оценка (2.8) очевидна. Для того чтобы доказать ее внутри области D_T, необходимо составить уравнение

$$\Delta(w_{k-1} - w_k) - \frac{\partial}{\partial t}(w_{k-1} - w_k) - \frac{a}{h}(w_{k-1} - w_k) = -\frac{a}{h}(w_{k-2} - w_{k-1})$$

и воспользоваться тем, что в точках локального экстремума функция $\Delta(w_{k-1} - w_k) - \dfrac{\partial}{\partial t}(w_{k-1} - w_k)$ имеет определенный знак.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.2 *и* $0 \le -\Delta\omega + \dfrac{\partial\omega}{\partial t} \le c_1 a$. *Тогда имеет место оценка*

$$0 \le c_2 h \le w_{k-1}(x, t, h) - w_k(x, t, h) \le c_3 h,$$

где константы c_i *не зависят от* a, h, k.

Эта оценка очевидным образом следует из предыдущей теоремы.

Следствие 2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.2. *Тогда если*

$$\| \psi_k(x, h) \|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})} + \| \varphi_k(x, t, h) \|_{H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\partial D_T)} \le c_1, \qquad \alpha \in (0, 1),$$

то

$$\| w_k(x, t, h) \|_{H^{2-\alpha, 1-\alpha/2}(\overline{D}_T)} \le c_2, \tag{2.9}$$

где константы c_i *не зависят от* h, k.

Этот факт следует из того, что

$$\Delta w_k - \frac{\partial w_k}{\partial t} = a\frac{w_k - w_{k-1}}{h} \in L_\infty(D_T),$$

из гладкости функций, задающих начальные и краевые условия, и соответствующей теоремы вложения.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия*

$$\Delta w_k - \frac{\partial w_k}{\partial t} = a\frac{w_k - w_{k-1}}{h} \in L_\infty(D_T), \qquad \Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t} \in H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{D}_T),$$

$$\left\| \frac{\varphi_k(x, t, h) - \varphi_{k-1}(x, t, h)}{h} \right\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{D}_T)} + \| \varphi_k(x, t, h) \|_{H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}_T)} \le c_1,$$

$$\left\| \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{h} \right\|_{H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{D})} + \| \psi_k \|_{H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})} \le c_2$$

и для функций ψ_k *и* φ_k *выполнены условия согласования первого порядка на* ∂D_T *при* $t = 0$. *Тогда*

$$\left\| \frac{w_k - w_{k-1}}{h} \right\|_{H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)} + \| w_k \|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)} \le c_3, \tag{2.10}$$

где константы c_i *не зависят от* k, h.

Обозначим

$$v_k(x,t,h) = w_k(x,t,h) - w_k(x,0,h) = w_k(x,t,h) - \psi_k(x;h).$$

Тогда функции $\{v_k - v_{k-1}\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta(v_k - v_{k-1}) - \frac{\partial}{\partial t}(v_k - v_{k-1}) - a\frac{(v_k - v_{k-1})}{h} + $$
$$+ a\frac{(v_{k-1} - v_{k-2})}{h} = -(f_k - f_{k-1}),$$

где $f_k = \Delta\psi_k - a\dfrac{\psi_k - \psi_{k-1}}{h}$, и имеют нулевые начальные условия. Пусть $\zeta_k(x,t), \ldots, \zeta_l(x,t)$ — неотрицательные бесконечно дифференцируемые финитные функции, являющиеся разбиением единицы в области $\overline{D}_T$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{l} \zeta_k(x,t) = 1 \qquad \forall (x,t) \in \overline{D}_T.$$

Функции $v_k(x,t,h)$ представимы в виде

$$v_k(x,t,h) = \sum_{s=1}^{l} v_k^s(x,t,h), \qquad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $v_k^s(x,t,h) = \zeta_s(x,t)v_k(x,t,h)$. Если носитель функции $\zeta_s(x,t)$ принадлежит области D_T, то функции $v_k^s(x,t,h)$ можно рассматривать как финитные функции из $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^4)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta(v_k^s - v_{k-1}^s) - \frac{\partial}{\partial t}(v_k^s - v_{k-1}^s) - a\frac{(v_k^s - v_{k-1}^s)}{h} + a\frac{(v_{k-1}^s - v_{k-2}^s)}{h} =$$

$$= -(f_k^s - f_{k-1}^s) - (\Phi_k^s - \Phi_{k-1}^s), \quad \Phi_k^s := -v_k\Delta\zeta_s - 2\nabla v_k\nabla\zeta_s + v_k\frac{\partial\zeta_s}{\partial t}, \quad f_k^s = \zeta_s f_k.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится интегральное представление решений этих уравнений. Выберем в качестве фундаментальных решений функции

$$\Gamma_{n-k+1}(x-\xi, t-\tau) = \Gamma(x-\xi, t-\tau)E_{n-k+1}(t-\tau),$$

$$\Gamma(x-\xi, t-\tau) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)^3 e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}, \tag{2.11}$$

$$E_{n-k+1}(t-\tau) = \frac{i}{2\pi}\oint_{|1-z|=1}\frac{e^{-\frac{a}{h}(t-\tau)z}}{(1-z)^{n-k+1}}dz = \frac{\left[\frac{a}{h}(t-\tau)\right]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\frac{a}{h}(t-\tau)}.$$

Предположим, что функции $\{w_k(x,t) \in C^{2,1}(D_T)\}$ имеют нулевые начальные условия и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta w_k - \frac{\partial w_k}{\partial t} - a\frac{w_k - w_{k-1}}{h} = -f_k,$$

где f_k — заданные функции. Тождество Грина примет вид

$$(\Delta_\xi w_k)\Gamma_{n-k+1} - w_k \Delta_\xi \Gamma_{n-k+1} - \frac{\partial}{\partial\tau}(w_k\Gamma_{n-k+1}) -$$

$$-\frac{a}{h}(w_k - w_{k-1})\Gamma_{n-k+1} + \frac{a}{h} w_k\left(\Gamma_{n-k+1} - \Gamma_{n-k}\right) + f_k\Gamma_{n-k+1} = 0.$$

Просуммируем это тождество по k от 1 до n, проинтегрируем по области $D \times \times (0, t-\delta)$, а затем устремим $\delta \to 0$. После приведения подобных слагаемых и предельного перехода получим

$$w_n(x,t) = \frac{a}{h}\int_0^t\int_D w_0(\xi,\tau)\Gamma_n(x-\xi, t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_D f_k\Gamma_{n-k+1}(x-\xi, t-\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_t}\left(\frac{\partial w_k}{\partial\nu_\xi}\Gamma_{n-k+1} - w_k\frac{\partial\Gamma_{n-k+1}}{\partial\nu_\xi}\right)ds_{\xi,\tau}.$$

Воспользуемся этим фактом и построим интегральное представление для функций $\{v_m^s(x,t,h) - v_{m-1}^s(x,t,h)\}$. Выбрав теперь две произвольные точки, принадлежащие носителю, с помощью полученного интегрального представления можно получить необходимую оценку константы Гельдера для функций $\left\{\dfrac{v_k^s - v_{k-1}^s}{h}\right\}$. Если носитель функции $\zeta_s(x,t)$ лишь частично принадлежит области D_T, т. е. содержит внутри часть параболической границы этой области, то с помощью регулярного преобразования можно выпрямить соответствующую часть границы. После этого для полупространства, полученного в результате регулярного преобразования координат, можно с небольшими изменениями повторить предыдущие рассуждения.

Выясним, при каких ограничениях на начальные и краевые условия для функций $\left\{\dfrac{w_k - w_{k-1}}{h}\right\}$ имеет место оценка вида (2.9). Легко проверить, что $a(w_1 - w_0) = hLw_0 + h^2 f$, если

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} - a\frac{f}{h} = -\frac{1}{h}L(L\omega) \quad \text{в } D_T, \quad L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t},$$

$$hf = a\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} - L\omega \quad \text{на } \partial D_T,$$

$$hf|_{t=0} = -L\omega|_{t=0} + \frac{a}{h}(\psi_1 - \omega)|_{t=0}, \tag{2.12}$$

$$\max_{1\le k\le N, (x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h} - \frac{\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}}{h}\right| +$$

$$+\max_{1\le k\le N, x\in\overline{D}_T}\left|\frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{h} - \frac{\psi_{k-1} - \psi_{k-2}}{h}\right| \le c_1 h,$$

$$\left\|\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h}\right\|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\dot{\partial}D_T)} \le c_2, \quad \omega(x,t) \in H^{4,2}(\overline{D}_T),$$

где константы c_i не зависят от h.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.3 *и условия* (2.12). *Тогда имеют место оценки*

$$\max_{1\le k\le N,(x,t)\in\overline{D}_T}\left|\frac{w_k-w_{k-1}}{h}-\frac{w_{k-1}-w_{k-2}}{h}\right| \le c_3 h,$$

$$\left\|\frac{w_k-w_{k-1}}{h}\right\|_{H^{2-\alpha,1-\alpha/2}(\overline{D}_T)} \le c_4, \quad \alpha\in(0,1),$$

если равномерно ограничены нормы

$$\left\|\frac{\psi_k-\psi_{k-1}}{h}\right\|_{H^{2+\alpha}(\overline{D})}, \quad \left\|\Delta\omega-\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)}$$

и выполнены соответствующие условия согласования, то

$$\left\|\frac{w_k-w_{k-1}}{h}\right\|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)} \le c_5,$$

где константы c_i *не зависят от* h, k.

Аналогичное утверждение имеет место и для функций $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{w_k-w_{k-1}}{h}-\dfrac{w_{k-1}-w_{k-2}}{h}\right)$ *в пространстве* $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$ *при соответствующих предположениях.*

Первое утверждение доказывается с помощью принципа максимума с последующим применением теоремы вложения. Остальные оценки могут быть получены так же, как это сделано в теореме 2.3.

3. Равномерные оценки функций $\{u_k(x,t,h,\varepsilon)\}$. Оценим сначала разностные отношения $\left\{\dfrac{u_{k-1}(x,t,h,\varepsilon)-u_k(x,t,h,\varepsilon)}{h}\right\}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.2. *Тогда если* $\varepsilon^4\ge\sqrt{h}$, $Q(x)\ne 0$, *то найдутся такие положительные константы* c_i, *которые не зависят от* h, k, ε, *что*

$$0 \le c_1 h \le u_{k-1}(x,t,h,\varepsilon)-u_k(x,t,h,\varepsilon) \le c_2 h \quad \forall (x,t)\in\overline{D}_T. \tag{3.1}$$

Представим уравнение (2.1) в виде

$$\Delta(u_{k-1}-u_k)-\frac{\partial}{\partial t}(u_{k-1}-u_k)-\frac{a}{h}(u_{k-1}-u_k) = -\frac{a}{h}(w_{k-2}-w_{k-1})+$$
$$+\frac{\lambda}{h}\chi_\varepsilon'(u_{k-1})\left[\frac{h}{2\lambda}Q^2(x)-(u_{k-1}-u_k)\right]+\frac{\lambda}{h}\chi_\varepsilon''(\xi_k)\frac{(u_{k-1}-u_k)^2}{2},$$

где ξ_k — средняя точка, которая возникает в остаточном члене ряда Тейлора, взятом в форме Лагранжа. После этого следует предположить, что $\varepsilon^4\ge\sqrt{h}$, и воспользоваться принципом максимума.

Лемма. *Пусть* $f(x,t)\in H^{1,1}(\overline{D}_T)$, $u(x,0)=0$, $u(x,t)\in H^{3,2}(\overline{D}_T)$ *и удовлетворяет в области* D_T *уравнению*

$$Lu-\frac{a}{h}u = -\frac{f}{h}.$$

Тогда для любой точки $(x_0,t_0)\in D_T$: $\operatorname{dist}((x_0,t_0),\partial D)\ge h^\sigma$, $\sigma\in(0,1/2)$, *справедливы оценки*

$$|u(x_0, t_0)| \le ch^{\sigma_1} \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |u(x,t)| + \frac{1}{a} \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |f(x,t)|, \tag{3.2}$$

$$|u_x(x_0, t_0)| + |u_t(x_0, t_0)| \le ch^{\sigma_2} \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |u(x,t)| +$$

$$+ \frac{1}{a} \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} (|f_x(x,t)|, |f_t(x,t)|), \tag{3.3}$$

где положительные константы c, σ_i *не зависят от* h.

Пусть $K_R(x_0)$ — шар радиуса R с центром в точке x_0, причем $K_R(x_0) \times \times (0, T) \in D_T$. Тогда имеет место интегральное представление

$$u(x_0, t_0) = \int_0^{t_0} \int_{K_R(x_0)} \frac{f(\xi,\tau)}{h} e^{-a(t_0-\tau)/h} \Gamma(x_0-\xi, t_0-\tau)\, d\xi\, d\tau -$$

$$- \int_0^{t_0} \int_{K_R(x_0)} \frac{f(\xi,\tau)}{h} e^{-a(t_0-\tau)/h} \Gamma(R, t_0-\tau)\, d\xi\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_0} \int_{K_R(x_0)} u(\xi,\tau)\, e^{-a(t_0-\tau)/h} \Delta\Gamma(R, t_0-\tau)\, d\xi\, d\tau -$$

$$- \int_0^{t_0} \int_{\partial K_R(x_0)} u(\xi,\tau)\, e^{-a(t_0-\tau)/h} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_\xi}\, ds_\xi\, d\tau.$$

Оценки (3.2), (3.3) могут быть получены непосредственно из этого интегрального представления, если учесть известное неравенство

$$\forall x \in (0, \infty), \quad \forall m > 0: \; x^m e^{-x} \le m^m e^{-m},$$

а также оценку:

$$\forall R \ge h^\sigma: \exp\left\{ \frac{-R^2}{4(t-\tau)} - \frac{a}{h}(t-\tau) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\left(\frac{R}{2\sqrt{t-\tau}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}} \sqrt{t-\tau} \right)^2 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}} R \right\} \le$$

$$\le \exp\left\{ -\sqrt{a}\, h^{(\sigma-1/2)} \right\}.$$

Из (2.3) следует, что в области D_T функции F_k удовлетворяют уравнению

$$\Delta(F_k - F_{k-1}) - \frac{\partial}{\partial t}(F_k - F_{k-1}) - \frac{a}{h}(F_k - F_{k-1}) =$$

$$= -\frac{\lambda}{h}[\chi_\varepsilon(u_k) - \chi_\varepsilon(u_{k-1})] - \frac{1}{2} Q^2(x) \chi'_\varepsilon(u_{k-1}),$$

причем если $(x, t) \notin \omega_{k,k-1} = \{u_{k-1} > 0,\; u_k < \varepsilon\}$, то правая часть этого уравнения равна нулю. Применим полученные оценки к функциям $\{F_k(x, t, h, \varepsilon)\}$. Заметим, что оценка (3.3) при соответствующих предположениях справедлива для производных любого порядка.

Поэтому, учитывая (2.5) и гладкость функций $w_k(x, t, h)$, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.3. *Тогда*

$$\forall (x, t) \in D_T\colon \operatorname{dist}[(x, t), \partial\{u_k(x, t, h, \varepsilon) > \varepsilon\}] \geq h^{\sigma}, \quad \sigma \in (0, 1/2),$$

имеет место оценка

$$\| u_k(x, t, h, \varepsilon) \|_{H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}} \leq c, \tag{3.4}$$

где константа c *не зависит от* h, ε, k.

Если же выполнены предположения теоремы 2.4, *то*

$$\forall (x, t) \in D_T\colon \operatorname{dist}\left[(x, t), \partial\left(D_T \setminus \overline{\omega}_{k, k-1}\right)\right] \geq h^{\sigma},$$

для функций $u_k(x, t, h, \varepsilon)$ *выполнены все утверждения теоремы* 2.4. *Кроме того, имеет место оценка*

$$\min_{1 \leq k \leq N, (x,t) \in \overline{D}_T} (w_{k-1} - w_k) - c_1 h^{\sigma_1} \leq u_{k-1} - u_k \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq N, (x,t) \in \overline{D}_T} (w_{k-1} - w_k),$$

где положительные константы c_1, σ_1 *не зависят от* h, ε.

Доказательство этих утверждений следует из оценок (3.2), (3.3).

4. Предельный переход. Пусть $D_{T,T_1} = D_T \times (0, T_1)$, $\eta(x, t, \tau) \in C^{2,1,1}(\overline{D}_{T,T_1})$, равна нулю на $\partial D \times (0, T]$ вместе со своими производными первого порядка. Умножим уравнение (2.1) на $h\eta(x, t, kh) = h\eta_k$, проинтегрируем по области D_T и просуммируем по k от 1 до N. После несложных преобразований получим

$$h \sum_{k=1}^{N} \int_{D_T} \left\{ -u_k \Delta \eta_k - u_k \frac{\partial \eta_k}{\partial t} + a \frac{u_{k.} - u_{k-1}}{h} \eta_k \right\} dx\, dt -$$

$$- h \sum_{k=1}^{N} \int_{D_T} \psi_k(x, h) \eta_k(x, 0)\, dx + h \sum_{k=1}^{N} \int_{D_T} \lambda \chi_{\varepsilon}(u_k) \frac{\eta_{k-1} - \eta_k}{h}\, dx\, dt -$$

$$- h \sum_{k=1}^{N} \int_{D_T} \frac{1}{2} Q^2(x) \chi'_{\varepsilon}(u_{k-1}) \eta_k\, dx\, dt + h \sum_{k=1}^{N} \int_{D_T} \left(\Delta f_k + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{F_{k-1} - F_k}{h}\, dx\, dt +$$

$$+ \lambda \int_{D_T} \chi_{\varepsilon}(u_0) \eta_1\, dx\, dt = 0, \quad f_k = -h \sum_{l=k}^{N} \eta_l. \tag{4.1}$$

Построим несколько интерполяций функций $\{u_k(x, t, h, \varepsilon)\}$ по переменной τ. Пусть $u^{(0)}(x, t, \tau, h, \varepsilon)$ обозначает кусочно-постоянную интерполяцию, $u^{(1)}(x, t, \tau, h, \varepsilon)$ — кусочно-линейную, а $u(x, t, \tau, h, \varepsilon)$ — кубическую. Предположим, что выполнены условия теорем 3.1, 2.2. Тогда из (2.8) и (3.1) следует

$$| u^{(0)}(x, t, \tau, h, \varepsilon) - u^{(1)}(x, t, \tau, h, \varepsilon) | \leq ch,$$

$$| u(x, t, \tau, h, \varepsilon) - u^{(1)}(x, t, \tau, h, \varepsilon) | \leq ch, \tag{4.2}$$

$$M_1 \geq -\frac{\partial w}{\partial \tau} \geq M_2 > 0, \quad M_1 \geq -\frac{\partial u}{\partial \tau} \geq M_2 > 0$$

для достаточно малых h, причем константы M_i и c не зависят от h, ε. Из приведенных оценок следует равномерная ограниченность семейств функций

$\{u^{(0)}(x,t,\tau,h,\varepsilon)\}$, $\{u^{(1)}(x,t,\tau,h,\varepsilon)\}$, $\{u(x,t,\tau,h,\varepsilon)\}$. Поэтому можно выбрать подпоследовательности, слабо сходящиеся в $L_p(D_{T,T_1})$ к одному пределу при $\varepsilon, h \to 0$.

Положим

$$u(x,t,\tau) = \lim_{h,\varepsilon\to 0} u(x,t,\tau,h,\varepsilon).$$

Из теоремы 3.2 следует, что поверхность уровня $u(x,t,\tau,h,\varepsilon)=\varepsilon+h^{\sigma}$ может быть задана уравнением $\tau = s(x,t,h,\varepsilon)$, где функция $s(x,t,h,\varepsilon)$ принадлежит классу $H^{1+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$ а ее производные первого порядка равномерно ограничены константами, которые не зависят от h, ε. Кроме того,

$$\{(x,t,\tau)\in D_{T,T_1}: 0 < u(x,t,\tau,h,\varepsilon) < \varepsilon\} \subseteq$$

$$\subseteq \{(x,t,\tau)\in D_{T,T_1}: s(x,t,h,\varepsilon) < \tau < \bar{s}(x,t,h\ \varepsilon)\},$$

где

$$\bar{s}(x,t,h,\varepsilon) = s(x,t,h,\varepsilon) + \frac{\varepsilon + ch^{\sigma}}{M_2}.$$

Семейство функций $\{s(x,t,h,\varepsilon)\}$ компактно в силу теоремы Арцела. Предельную функцию обозначим через $s(x,t)$.

Пусть

$$G_{h,\varepsilon} = \{(x,t,\tau)\in D_{T,T_1}: \tau < s(x,t,h,\varepsilon)\},$$

$$\omega_{h,\varepsilon} = \{(x,t,\tau)\in D_{T,T_1}: s(x,t,h,\varepsilon) < t < \bar{s}(x,t,h\ \varepsilon) + h^{\sigma}\},$$

$$\Omega_{h,\varepsilon} = D \setminus (\bar{\omega}_{h,\varepsilon} \cup \bar{G}_{h,\varepsilon}).$$

Тогда

$$\lim_{h,\varepsilon\to 0} G_{h,\varepsilon} = G_{T,T_1} = \{(x,t,\tau)\in D_{T,T_1}: \tau < s(x,t)\},$$

$$\lim_{h,\varepsilon\to 0} \Omega_{h,\varepsilon} = \Omega_{T,T_1} = \{(x,t,\tau)\in D_{T,T_1}: \tau > s(x,t)\},$$

$\partial\Omega_{T,T_1} \cap D_{T,T_1} = \partial G_{T,T_1} \cap D_{T,T_1} = \gamma_{T,T_1}$ — поверхность, уравнение которой задается равенством $\tau = s(x,t)$.

Из теоремы 3.2 следует, что в любых подобластях Ω'_{T,T_1}, G'_{T,T_1} таких, что $\bar{\Omega}'_{T,T_1} \subset \Omega_{T,T_1}$, $\bar{G}'_{T,T_1} \subset G_{T,T_1}$, равномерно ограничены нормы

$$\|u_\tau\|_{C^{2+\alpha}(\bar{G}'_{T,T_1}\cup\bar{\Omega}'_{T,T_1})}, \quad \|u_{\tau\tau}\|_{C^{\alpha}(\bar{G}'_{T,T_1}\cup\bar{\Omega}'_{T,T_1})}, \quad \|u\|_{C^{2+\alpha}(\bar{G}'_{T,T_1})},$$

причем эти оценки не зависят от расстояния указанных подмножеств до границ соответствующих областей.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения*

$$\varphi(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\partial D_T), \quad \psi(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{D}), \quad Q(x) \in C^{1+\alpha}(D),$$

$$\gamma_0 \in C^{2+\alpha}, \quad Q(x) \neq 0, \quad \varphi(x,t) < 0 \ \text{ на } \partial D_1, \quad \varphi(x,t) > 0 \ \text{ на } \partial D_2,$$

а также соответствующие условия согласования. Тогда для любого $T > 0$ *задача* (1.1) – (1.4) *разрешима, причем*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}_T) \cap \left\{ H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T \setminus \gamma_0) \times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{G}_T \setminus \gamma_0) \right\},$$

γ_T — *поверхность класса* $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}$.

Совершим предельный переход в интегральном тождестве (4.1) при $h, \varepsilon \to 0$. Из полученного предельного интегрального тождества следует, что функция $u(x,t,\tau)$ на поверхности, задаваемой уравнением $\tau = s(x,t)$, удовлетворяет условию

$$|\nabla u^+|^2 - |\nabla u^-|^2 = \lambda(u_\tau^+ + u_\tau^-) + Q^2(x).$$

Из теоремы 3.2 следует, что $u_\tau(x,t,\tau)$ ограничена сверху и снизу константами, которые не зависят от λ. Поэтому можно совершить предельный переход при $\lambda \to 0$. После этого на свободной поверхности будем иметь

$$|\nabla u^+|^2 \geq \min_{x \in \overline{D}} Q^2(x) > 0. \tag{4.3}$$

В любом сечении $\tau = \text{const}$ функция $u(x,t,\tau)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{D_T} \left[u_{x_i} \nabla u \nabla \eta + [u_t + a u_\tau] u_{x_i} \eta - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \eta_{x_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \chi(u) (Q^2(x)\eta)_{x_i} \right] dx\, dt = 0 \qquad \forall i = 1, 2, 3,$$

$\chi(u)$ — характеристическая функция множества $\{(x,t) \in D_T : u(x,t,\tau) < 0\}$. Если еще предположить, что выполнены условия следствия 1, то указанные константы не зависят и от a. После этого, учитывая равномерную ограниченность всех первых производных и оценку (4.3), можно совершить предельный переход в интегральном тождестве при $a \to 0$.

От излишних требований на гладкость функций, задающих начальные и краевые условия, можно избавиться, если учесть, что для существования оценки (3.4), из которой следует гладкость свободной границы, достаточно условий теоремы 2.3.

1. *Caffarelli L. A., Vazques J. L.* Lipshiz regularity of a singular perturbation problem // Different. Equats. – 1995. – **8**, № 7. – P. 1585–1590.
2. *Caffarelli L. A., Vazques J. L.* A free boundary problem for the heat equation arising in flame propagation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – P. 411–441.
3. *Galaktionov V. A., Hulshof J., Vazques J. L.* Extinction and focusing behavior of spherical and annular flames described by a free boundary. – Math. Inst. Univ. Leiden, 1996. – Rept W 10 May. – P. 1–48.
4. *Бородин М. А.* Существование глобального классического решения в некоторой нелинейной параболической задаче со свободной границей // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1999. – № 6. – С. 7–12.
5. *Borodin M. A.* Existence of global classical solution for two-phase Stefan problem // SIAM J. Math. Anal. – 1999. – **30**, № 6. – P. 1264–1281.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные параболические уравнения. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 17.07.2000,
после доработки — 23.01.2001