УДК 517.5

М. А. Басараб (Ин-т пробл. машиностроения НАН Украины, Харьков)

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ АТОМАРНАЯ КВАЗИИНТЕРПОЛЯЦИЯ

We consider the approximation of periodic functions by using the atomic quasiinterpolation of second and first orders. We obtain expressions for coefficients of quasiinterpolants and give estimates of errors in the uniform metric.

Розглядаються наближення періодичних функцій за допомогою атомарної квазіінтерполяції другого та першого порядків. Одержано вирази для коефіцієнтів квазіінтерполянтів, наведено оцінки похибок у рівномірній метриці.

Пусть в узлах равномерной сетки $x_j = jh$, $j = \overline{-N, N}$, $h = \pi/N$, заданы значения периодической функции $f(x_j) = f_j$, где $f(x) \in \tilde{C}^{m+1}[-\pi, \pi]$ и $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$, $i = 0, \ldots, m$. Рассмотрим атомарный интерполянт 2-го порядка [1 – 3]:

$$F_2(f; x) = \sum_{j=-N-1}^{N+1} c_j \operatorname{fup}_2\left(\frac{x+\pi}{h} - j\right) \tag{1}$$

такой, что $F_2(f; x_j) = f_j$, $j = \overline{-N, N}$. Здесь

$$\operatorname{fup}_2(x) = B_1(x) * \operatorname{up}(x) = B_2(x) * \operatorname{up}(2x),$$

где $B_n(x)$ — B-сплайн Шенберга n-го порядка, $\operatorname{up}(x)$ — финитное решение функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1), \qquad \operatorname{supp} y(x) = [-1, 1], \qquad y(x) \in C^{\infty}(-\infty, \infty),$$

а $*$ — символ свертки. (В [1] вместо $\operatorname{fup}_n(x)$ определены функции $\operatorname{Fup}_n(x) \equiv \equiv \operatorname{fup}_n(2^n x)$.) Поскольку $\operatorname{fup}_2(x)$ выражается через линейную комбинацию $\operatorname{up}(x)$:

$$\operatorname{fup}_2(x) = \begin{cases} \operatorname{up}\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right) - 2\operatorname{up}\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right) + 2\operatorname{up}\left(\frac{x}{4} - 1\right) - 2\operatorname{up}\left(\frac{x}{4} - \frac{5}{4}\right), & x \in [-2; 2]; \\ 0, \quad x \notin [-2; 2], & \end{cases} \tag{2}$$

то интерполянт (1) можно записать в эквивалентном виде

$$F_2(f; x) = \sum_j \tilde{c}_j \operatorname{up}\left(\frac{x+\pi}{4h} - \frac{j}{4}\right). \tag{3}$$

Из (2) следует

$$\mathrm{fup}_2(0) = \frac{26}{72}, \quad \mathrm{fup}_2(\pm 1) = \frac{5}{72}. \tag{4}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов c_j в (1) из условий интерполяции и периодичности с учетом (4) получаем систему разностных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{gathered} c_{-N-1} = c_{N-1}, \quad c_{-N+1} = c_{N+1}, \\ F_2(f; x_j) = \frac{5}{72}c_{j-1} + \frac{26}{72}c_j + \frac{5}{72}c_{j+1} = f_j, \quad j = \overline{-N, N}. \end{gathered} \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\frac{5}{72}c_{j-1} + \frac{26}{72}c_j + \frac{5}{72}c_{j+1} = \frac{1}{2}c_j + \frac{5}{72}\Delta^2 c_j, \quad j = \overline{-N-1, N+1},$$

а решение системы (5) имеет вид

$$c_j = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_j, \quad j = \overline{-N-1, N+1}$$

где $\Delta^{2\nu}$ — центральная разделенная разность порядка 2ν. Действительно, тогда

$$F_2(f; x_j) = \frac{1}{2}c_j + \frac{5}{72}\Delta^2 c_j = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_j + \frac{5}{36}\Delta^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_j =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_j - \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu+1}\Delta^{2\nu+2} f_j =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_j - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_j = f_j, \quad j = \overline{-N, N}.$$

Очевидно, что для нахождения коэффициентов c_j необходимо использовать информацию о поведении приближаемой функции на всей области ее определения. Вместе с тем, как известно [4 – 6], для сплайн-интерполяции минимального дефекта возможно построение так называемых локальных сплайнов, позволяющих избежать указанного недостатка. В рассматриваемом случае, если в (6) взять конечное число членов ряда, то $F_2(f; x)$ превратится в квазиинтерполянт [4] для функции $f(x)$. Оценим возникающую в процессе квазиинтерполяции погрешность. Поскольку

$$\left|\Delta^{2\nu} f_j\right| \le 4^{\nu-p}\max_k\left|\Delta^{2p} f_k\right|, \quad \nu \ge p,$$

то

$$\left|2\sum_{\nu=p}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_j\right| \le \left|2\sum_{\nu=p}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}4^{\nu-p}\max_k\left|\Delta^{2p} f_k\right|\right| \le \frac{2}{4^p}\max_k\left|\Delta^{2p} f_k\right|\sum_{\nu=p}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^{\nu} \le$$

$$\le \frac{18}{4^{p+1}}\left(\frac{5}{9}\right)^{p-1}\max_k\left|\Delta^{2p} f_k\right| = \frac{81}{10}\left(\frac{5}{36}\right)^{p}\max_k\left|\Delta^{2p} f_k\right| = O(h^{2p}) \tag{7}$$

при $f(x) \in C^{2p}$. Обозначим

$$c_{j,p} = 2\sum_{\nu=0}^{p-1}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu}f_j, \quad j = \overline{-N-1, N+1},$$
$$F_{2,p}(f;x) = \sum_{j=-N-1}^{N+1} c_{j,p}\,\mathrm{fup}_2\left(\frac{x+\pi}{h}-j\right), \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

В частности, при $p = 1, 2$ получаем

$$c_{j,1} = 2f_j, \quad F_{2,1}(f;x_j)-f_j = \frac{5}{36}\Delta^2 f_j, \quad j = \overline{-N-1, N+1}, \tag{9}$$

$$c_{j,2} = 2f_j - \frac{5}{18}\Delta^2 f_j, \quad F_{2,2}(f;x_j)-f_j = -\frac{25}{1296}\Delta^4 f_j, \quad j = \overline{-N-1, N+1}. \tag{10}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in\tilde{C}^{m+1}[-\pi,\pi]$, $m\geq 2$. *Тогда*

$$\left\| f(x) - F_{2,1}(f;x)\right\|_{C[-\pi,\pi]} = O(h^2), \tag{11}$$

$$\left\| f(x) - F_{2,2}(f;x)\right\|_{C[-\pi,\pi]} = O(h^3). \tag{12}$$

Доказательство. Из результатов [1 – 3] следует

$$\left\|(f(x) - F_2(f;x))^{(\alpha)}\right\|_{C[-\pi,\pi]} = O(h^{3-\alpha}), \quad \alpha = 0, 1, 2. \tag{13}$$

Поэтому при $\alpha = 0$

$$\left\| f(x) - F_{2,p}(f;x)\right\|_{C[-\pi,\pi]} \leq \left\| F_2(f;x) - F_{2,p}(f;x)\right\|_{C[-\pi,\pi]} + \left\| f(x) - F_2(f;x)\right\|_{C[-\pi,\pi]} \leq$$
$$\leq \left| 2\sum_{j=-N-1}^{N+1}\left(\sum_{\nu=p}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu}f_j\right)\mathrm{fup}_2\left(\frac{x+\pi}{h}-j\right)\right| + O(h^3).$$

Поскольку на интервале $[-\pi,\pi]$

$$\sum_{j=-N-1}^{N+1}\mathrm{fup}_2\left(\frac{x+\pi}{h}-j\right) = \frac{1}{2},$$

то, используя (7), имеем

$$\left\| f(x) - F_{2,p}(f;x)\right\|_{C[-\pi,\pi]} \leq 2\max_k\left|\sum_{\nu=p}^{\infty}\left(-\frac{5}{36}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu}f_k\right|\left|\sum_{j=-N-1}^{N+1}\mathrm{fup}_2\left(\frac{x+\pi}{h}-j\right)\right| + O(h^3) \leq$$
$$\leq \frac{81}{10}\left(\frac{5}{36}\right)^{p}\max_k\left|\Delta^{2p}f_k\right| + O(h^3) = O(h^{2p}) + O(h^3).$$

откуда при $p = 1, 2$ следуют соответственно (11), (12).

Рассмотрим вопрос об аппроксимации производных $f(x)$. Заметим, во-первых, что

$$F_2'(f;x_j) = \frac{1}{4h}(c_{j+1} - c_{j-1}), \quad F_2''(f;x_j) = \frac{1}{2h^2}(c_{j+1} - 2c_j + c_{j-1}),$$
$$F_2^{(n)}(f;x_j) = 0, \quad n > 2, \quad j = \overline{-N-1, N+1}.$$

Считая $f(x)$ достаточно гладкой, с учетом (9), (10) в узлах x_j имеем

$$F'_{2,1}(f;x_j) = \frac{1}{4h}(c_{j+1,1}-c_{j-1,1}) = \frac{1}{2h}(f_{j+1}-f_{j-1}) = f'_j + O(h^2),$$

$$F''_{2,1}(f;x_j) = \frac{1}{2h^2}(c_{j+1,1}-2c_{j,1}+c_{j-1,1}) = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_j = f''_j + O(h^2),$$

$$F'_{2,2}(f;x_j) = \frac{1}{4h}(c_{j+1,2}-c_{j-1,2}) = \frac{1}{2h}(f_{j+1}-f_{j-1}) + \frac{5}{36h}\left(\Delta^3 f_j - \frac{1}{2}\Delta^4 f_j\right) = f'_j + O(h^2),$$

$$F''_{2,2}(f;x_j) = \frac{1}{2h^2}(c_{j+1,2}-2c_{j,2}+c_{j-1,2}) = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_j - \frac{5}{36h^2}\Delta^4 f_j = f''_j + O(h^2),$$

$$j = \overline{-N-1, N+1}.$$

Используем представление вида (3) и аналоги неравенств Маркова – Бернштейна для производных линейных комбинаций сдвигов сжатий функций $\mathrm{up}(x)$ [1]:

$$\| F'_2(f;x)\|_{C[-\pi,\pi]} \le 12\sqrt{22\frac{2}{13}}\,\| F_2(f;x)\|_{C[-\pi,\pi]},$$

$$\| F''_2(f;x)\|_{C[-\pi,\pi]} \le 24\sqrt{\left(22\frac{2}{13}\right)^3}\,\| F_2(f;x)\|_{C[-\pi,\pi]}.$$

Положив в (13) $\alpha = 1, 2,$ как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\left\| \left(f(x) - F_{2,p}(f;x)\right)^{(\alpha)} \right\|_{C[-\pi,\pi]} = O(h^{3-\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \quad p = 1, 2.$$

Перейдем теперь к периодической атомарной интерполяции 1-го порядка. Согласно [1] она должна быть представлена следующим образом:

$$F_1(f;x) = \sum_{j=-N-1}^{N} d_j \,\mathrm{fup}_1\left(\frac{x+\pi}{h} - j - \frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

В данном случае $F_1(f;x_{j+1/2}) = f_{j+1/2}$, $j = \overline{-N-1, N}$. Здесь $x_{j+1/2} = x_j + 0{,}5h$, $f_{j+1/2} = f(x_{j+1/2})$. Для $\mathrm{fup}_1(x)$ имеем

$$\mathrm{fup}_1(x) = B_0(x) * \mathrm{up}(x),$$

$$\mathrm{fup}_1(x) = \begin{cases} \mathrm{up}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) - \mathrm{up}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right) - \mathrm{up}\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\right), & x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]; \\ 0, \quad x \notin \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right], \end{cases}$$

$$\mathrm{fup}_1(0) = \frac{62}{72}, \qquad \mathrm{fup}_1(\pm 1) = \frac{5}{72}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов d_j получаем систему

$$d_{-N-1} = d_{N-2}, \qquad d_{-N+1} = d_N,$$

$$F_1(f;x_{j+1/2}) = \frac{5}{72}d_{j-1} + \frac{62}{72}d_j + \frac{5}{72}d_{j+1} = f_{j+1/2}, \qquad j = \overline{-N, N-1},$$

решение которой представлено в виде

$$d_j = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{72}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu} f_{j+1/2}, \qquad j = \overline{-N-1, N}.$$

Аналогично (8) обозначим

$$d_{j,p} = \sum_{\nu=0}^{p-1}\left(-\frac{5}{72}\right)^{\nu}\Delta^{2\nu}f_{j+1/2}, \quad j = \overline{-N-1,\, N},$$
$$F_{1,p}(f;x) = \sum_{j=-N-1}^{N} d_{j,p}\,\mathrm{fup}_1\left(\frac{x+\pi}{h}-j-\frac{1}{2}\right), \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Нетрудно проверить справедливость соотношений

$$d_{j,1} = f_{j+1/2}, \quad F_{1,1}(f;x_{j+1/2}) = f_{j+1/2} + \frac{5}{72}\Delta^2 f_{j+1/2} = f_{j+1/2} + O(h^2),$$
$$F_1'(f;x_{j+1/2}) = \frac{1}{2h}(d_{j+1}-d_{j-1}),$$
$$F_{1,1}'(f;x_{j+1/2}) = \frac{1}{2h}(d_{j+1,1}-d_{j-1,1}) = \frac{1}{2h}(f_{j+3/2}-f_{j-1/2}) = f_{j+1/2}' + O(h^2),$$

при $f(x)\in C^2[-\pi,\pi]$. В силу того, что [1 – 3]

$$\left\|(f(x)-F_1(f;x))^{(\alpha)}\right\|_{C[-\pi,\pi]} = O(h^{2-\alpha}), \quad \alpha = 0, 1,$$

справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $f(x)\in \tilde{C}^{m+1}[-\pi,\pi]$, $m\geq 1$. *Тогда*

$$\left\|\left(f(x)-F_{1,1}(f;x)\right)^{(\alpha)}\right\|_{C[-\pi,\pi]} = O(h^{2-\alpha}), \quad \alpha = 0, 1.$$

Итак, погрешность квазиинтерполяции как функции $f(x)$, так и ее производных с помощью $F_{1,1}(f;x)$ и $F_{2,2}(f;x)$ совпадает по порядку с атомарной интерполяцией выражениями $F_1(f;x)$ и $F_2(f;x)$ соответственно. Однако, в отличие от (1), (14), коэффициенты в представлениях вида (8), (15) имеют свойство локальности. Аналогичные результаты ранее были получены для случая параболических и кубических B-сплайнов (см., например, [7, 8]).

1. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1979. – 196 с.
2. *Федотова Е. А.* К вопросу об интерполяции с помощью атомарных функций // Математические методы анализа динамических систем. – 1977. – Вып. 1. – С. 34 – 38.
3. *Федотова Е. А.* Атомарная и сплайн-аппроксимация решений краевых задач математической физики: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1985. – 170 с.
4. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М.: Мир, 1974. – 126 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
6. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
7. *Лигун А. А.* О приближении дифференцируемых периодических функций локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 691 – 693.
8. *Дронов С. Г., Лигун А. А.* Некоторые соотношения двойственности для локальных сплайнов // Там же. – 1995. – **47**, № 1. – С. 12 – 19.

Получено 25.05.1999