УДК 519.21 + 517.98

Ф. М. Мухамедов (Ин-т математики АН Республики Узбекистан, Ташкент)

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРНОСТИ КВАНТОВЫХ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

We present necessary and sufficient conditions for the regularity condition to be true for homogeneous quantum square stochastic processes defined on the von Neumann algebras.

Наведено необхідні та достатні умови виконання умови регулярності для однорідних квантових квадратичних стохастичних процесів, визначених на алгебрах фон Неймана.

Введение. Изучение многих физических систем сводится к изучению марковских процессов, связанных с этими системами. Но имеются также системы, которые не описываются марковскими процессами. Одной из таких систем является система, описывающаяся квадратичными стохастическими операторами.

Понятие квадратичного стохастического оператора впервые было сформулировано в работе С. Н. Бернштейна [1]. В дальнейшем в работе С. Улама [2] была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных стохастических операторов.

В работах [3 – 6] изучались предельное поведение и эргодические свойства траекторий квадратичных операторов. Квадратичные операторы, действующие на конечномерном симплексе, определяются кубическими стохастическими матрицами. В. М. Максимов [7] исследовал кубические стохастические матрицы и описал некоторые эргодические свойства таких матриц.

В работах [8 – 10] определен квадратичный стохастический процесс, который естественным образом возникает при изучении некоторых моделей со взаимодействиями. Для полноты изложения напомним определение таких процессов. Пусть $(E, \mathcal{B})$ — измеримое пространство, M — совокупность всех вероятностных мер на $(E, \mathcal{B})$ и предположим, что нам дано семейство функций $\{P(s, x, y, t, A)\}$, определенных при $t-s \geq 1$ для любых x и y из E и произвольного измеримого множества $A \in \mathcal{B}$. Предположим, что семейство функций $\{P(s, x, y, t, A)\colon x, y \in E, A \in \mathcal{B}, s, t \in R^+, t-s \geq 1\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $P(s, x, y, t, A) = P(s, y, x, t, A)$ для любых $x, y \in E$ и $A \in \mathcal{B}$;

2) $P(s, x, y, t, \cdot) \in M$ для любых фиксированных $x, y \in E$;

3) $P(s, x, y, t, A)$, как функция двух переменных x и y, является измеримой функцией по отношению $(E \times E, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B})$ для любого фиксированного $A \in \mathcal{B}$;

4) для начальной меры $\mu_0 \in M$ и произвольных $s, \tau, t \in R_+$ таких, что $t-\tau \geq 1$ и $\tau - s \geq 1$, либо

$$4)_A \qquad P(s, x, y, t, A) = \int_E\int_E P(s, x, y, \tau, du) P(\tau, u, v, t, A) \mu_\tau(dv),$$

где мера μ_τ на $(E, \mathcal{B})$ определяется следующим образом:

$$\mu_\tau(B) = \int_E\int_E P(0, x, y, \tau, B) \mu_0(dx) \mu_0(dy) \quad \text{для любых } B \in \mathcal{B},$$

либо

$$4)_B \qquad P(s, x, y, t, A) =$$

$$= \int_E\int_E\int_E\int_E P(s, x, z, \tau, du) P(s, y, v, \tau, dw) P(\tau, u, w, t, A) \mu_s(dz) \mu_s(dv).$$

Тогда процесс, определенный функциями $P(s,x,y,t,A)$, называется *квадратичным стохастическим типа* A *или типа* B соответственно, в зависимости от того, какое из фундаментальных уравнений $4)_A$ или $4)_B$ имеет место. В этом определении функция $P(s,x,y,t,A)$ означает вероятность того, что при взаимодействии элементов x и y из E в момент s в момент t осуществится один из элементов множества $A \in \mathcal{B}$. Поскольку для физических, химических, биологических явлений необходимо некоторое время для реализации взаимодействия, то наибольшее из таких времен примем равным 1 (см. модель Больцмана [11] или биологические модели [12]). Таким образом, вероятность $P(s,x,y,t,A)$ определена при $t-s \geq 1$.

Заметим, что такие процессы (т. е. квадратичные стохастические процессы (к. с. п.)) описывают физические системы, определенные выше. Но они не охватывают случаев квантовых систем, так что естественна задача определения квантовых квадратичных процессов. Отметим, что такие системы также возникают при изучении биологических и химических процессов на квантовом уровне [13, 14].

В настоящей работе мы изучаем квадратичные стохастические процессы, определенные на алгебре фон Неймана. В [14] рассматривались некоторые эргодические свойства таких процессов. В данной статье даются условия справедливости эргодического принципа и регулярности таких процессов. Физически это означает, что описываемая этим процессом система для достаточно больших промежутков времени не зависит от начального состояния системы.

Часть результатов настоящей работы была анонсирована в [13, 15, 16].

Основные результаты. 1. ***Предварительные сведения и определения.*** Пусть $B(H)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов на комплексном гильбертовом пространстве H. Слабо замкнутая $*$-подалгебра $\mathcal{M}$ в $B(H)$ называется *алгеброй фон Неймана,* если она содержит единичный оператор $\mathbb{1}$. Элемент $x \in \mathcal{M}$ называется *положительным,* если существует элемент $y \in \mathcal{M}$ такой, что $x = y * y$. Совокупность всех положительных элементов $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathcal{M}_+$. Линейный функционал ω на $\mathcal{M}$ *положителен,* если $\omega(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{M}_+$. Положительный функционал ω называется *состоянием,* если $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Состояние ω *нормально,* если оно удовлетворяет равенству $\omega(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \omega(x_\alpha)$ для каждой равномерно ограниченной возрастающей сети $\{x_\alpha\}$ положительных элементов из $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая на гильбертовом пространстве H. Тогда

$$\mathcal{M} \odot \mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \,\middle|\, x_i, y_i \in \mathcal{M},\ i = \overline{1,n},\ n \in N \right\}$$

является $*$-подалгеброй во множестве всех операторов на $H \otimes H$. Слабое (операторное) замыкание $\mathcal{M} \odot \mathcal{M}$ на $B(H \otimes H)$ обозначается через $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ и называется *тензорным произведением* алгебры $\mathcal{M}$ на себя. Более подробно об алгебрах фон Неймана см., например, в [17].

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана. Через S и S^2 обозначим совокупность всех нормальных состояний на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ соответственно. Пусть $\{P^{st}: \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{M},\ s, t \in R_+,\ t - s \geq 1\}$ — семейство линейных операторов и $U: \mathcal{M} \otimes \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ — линейный оператор, определенный следующим образом: $U(x \otimes y) = y \otimes x$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$.

Определение 1. *Будем говорить, что семейство линейных операторов* $\{P^{s,t}\}$ *определяет квантовый квадратичный стохастический процесс (к.к.с.п.), если каждый оператор* $P^{s,t}$ *ультраслабо непрерывен и при этом выполняются следующие соотношения:*

i) $P^{s,t}\mathbb{1}_{\mathcal{M}} = \mathbb{1}_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}}$, *где* $\mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ *и* $\mathbb{1}_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}}$ *— единицы алгебр* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}$ *соответственно;*

ii) $P^{s,t}(\mathcal{M}_+)\subset(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_+$;

iii) $P^{s,t}(\mathcal{M})$ *симметрично, т. е.* $P^{s,t}(\mathcal{M})\subset\{x\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}: Ux=x\}$;

iv) аналог уравнения Колмогорова–Чепмена: для начального состояния $\omega_0\in S$ *и произвольных чисел* $s,\tau,t\in R_+$ *таких, что* $\tau-s\geq 1$, $t-\tau\geq 1$, *либо*

$$iv)_A\ P^{s,t}x=\left(P^{s,\tau}\circ\omega_\tau\right)\left(P^{\tau,t}x\right),\quad x\in\mathcal{M},$$

либо

$$iv)_B\ P^{s,t}x=\omega_s\otimes\omega_s\left(P^{s,\tau}\circ P^{s,\tau}\right)\left(P^{\tau,t}x\right),\quad x\in\mathcal{M},$$

где $\omega_\tau(x)=\omega_0\otimes\omega_0(P^{0,\tau}x)$, $x\in\mathcal{M}$, *и*

$$\left(P^{s,t}\circ\omega_t\right)(x\otimes y) := \omega_t(y)P^{s,t}x,$$

$$\omega_s\otimes\omega_s(x\otimes y\circ a\otimes b) := \omega_s(y)\omega_s(b)x\otimes a,$$

$$\left(P^{s,t}\circ P^{s,t}\right)(x\otimes y) := P^{s,t}x\circ P^{s,t}y.$$

Будем говорить, что к. к. с. п. имеет тип (A) (соответственно тип (B)), если к. к. с. п. удовлетворяет равенству $iv)_A$ (соответственно $iv)_B$).

С помощью так определенного к. к. с. п. можно задать закон взаимодействия состояний. Для $\varphi,\psi\in S$ положим

$$V^{s,t}(\varphi,\psi)(x) = \varphi\otimes\psi(V^{s,t}x),\quad x\in\mathcal{M}.$$

Это равенство задает правило, как при взаимодействии состояний φ и ψ в момент времени s в момент t появится состояние $V^{s,t}(\varphi,\psi)$. Физически взаимодействие состояний можно объяснить следующим образом. Рассмотрим две физические системы, отгороженные перегородкой, где одна из них находится в состоянии φ, а другая — в состоянии ψ. После того как перегородка убирается, новая физическая система будет в состоянии $\varphi\otimes\psi$, и после действия оператора $P^{s,t}$ образуется состояние, которое и является взаимодействием состояний φ и ψ.

Замечание. Если алгебра $\mathcal{M}$ абелева, т. е. $\mathcal{M}=L^\infty(X,\mathcal{B})$, то к. к. с. п. совпадает с квадратичным стохастическим процессом. Действительно, положим

$$P(s,x,y,t,A) = (P^{s,t}\chi_A)(x,y),\quad x,y\in X,$$

где χ_A — индикатор множества $A\in\mathcal{B}$. Тогда в силу определения 1 семейство функций $P(s,x,y,t,A)$ образует квадратичный стохастический процесс.

Обратно, если мы имеем квадратичный стохастический процесс $\{P(s,x,y,t,A)\}$ на измеримом пространстве $(E,\mathcal{F})$, то можно определить к. к. с. п. на $L^\infty(E,\mathcal{F})$ следующим образом:

$$\left(P^{s,t}f\right)(x,y) = \int_E f(u)P(s,x,y,t,du), \quad x,y \in E, \quad f \in L^\infty(E,\mathcal{F}).$$

В качестве начального рассматривается следующее состояние:

$$\omega_0(f) = \int_E f(u)\mu_0(du),$$

где μ_0 — начальная мера для к. с. п. Тогда легко видеть выполнение условий определения 1.

Таким образом, к. к. с. п. обобщает понятие квадратичного стохастического процесса.

Будем говорить, что к. к. с. п. $P^{s,t}$ *однороден*, если $P^{s,t}$ зависит только от $t-s$ для любых $s,t \in R_+$ таких, что $t-s \geq 1$.

Примеры таких процессов приведены в [16].

2. *Эргодический принцип.* Приведем условия выполнения эргодического принципа для квантовых квадратичных стохастических процессов.

Пусть $\{P^{s,t}\}$ — к. к. с. п. на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Множество всех ультраслабо непрерывных (соответственно непрерывных) функционалов на $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathcal{M}_*$ (соответственно $\mathcal{M}^*$). Через $P_*^{s,t}$ обозначим оператор, действующий из $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_*$ в $\mathcal{M}_*$ и определенный следующим образом:

$$P_*^{s,t}(\varphi)(x) = \varphi(P^{s,t}x), \quad \varphi \in (\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_*, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Определение 2. *Будем говорить, что к. к. с. п. $\{P^{s,t}\}$ удовлетворяет эргодическому принципу, если для любых $\varphi,\psi \in S^2$ и $s \in R_+$*

$$\lim_{t\to\infty} \| P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi \|_1 = 0,$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма на $\mathcal{M}^*$.

Если алгебра фон Неймана M абелева, то определение эргодического принципа таково [9]:

$$\lim_{t\to\infty} | P(s,x,y,t,A) - P(s,u,v,t,A) | = 0$$

для любых $x,y,u,v \in E$ и $A \in \mathcal{B}$.

Отметим, что понятие эргодического принципа было введено впервые для марковского процесса в работах А. Н. Колмогорова (см., например, [18]), а для квадратичных стохастических процессов — в [9].

Лемма 1. *Пусть $\{P^{s,t}\}$ — к. к. с. п. на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и для любых $\sigma,\varphi,\psi \in S$ и $s \in R_+$*

$$\lim_{t\to\infty} \| P_*^{s,t}(\sigma\otimes\varphi) - P_*^{s,t}(\sigma\otimes\psi) \|_1 = 0.$$

Тогда для любых $\varphi,\psi \in S^2$ и $s \in R_+$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \| P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi \|_1 = 0.$$

Доказательство. Пусть $\psi_i, \psi_{1,i}, \varphi, \nu$, $i=\overline{1,p}$, принадлежат S и $\{\lambda_i\}$ — такие числа, что $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Тогда справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i\psi_i \otimes \psi_{1,i} - \varphi\otimes\nu = \sum_{i=1}^p \lambda_i\psi_i \otimes (\psi_{1,i} - \nu) + \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i\psi_i - \varphi\right)\otimes\nu.$$

Обозначая $\psi=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\psi_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\psi_i\otimes\psi_{1,i}-\varphi\otimes\nu = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\psi_i\otimes(\psi_{1,i}-\nu)+(\psi-\varphi)\otimes\nu .$$

Следовательно,

$$\left\|P_*^{s,t}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\psi_i\otimes\psi_{1,i}\right)-P_*^{s,t}(\varphi\otimes\nu)\right\|_1 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\,\|P_*^{s,t}(\psi_i\otimes\psi_{1,i})-P_*^{s,t}(\psi_i\otimes\nu)\|_1+\|P_*^{s,t}(\psi\otimes\nu)-P_*^{s,t}(\varphi\otimes\nu)\|_1. \quad (1)$$

В силу условия леммы и условия $iii)$ определения 1 из (1) вытекает

$$\left\|P_*^{s,t}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\psi_i\otimes\psi_{1,i}\right)-P_*^{s,t}(\varphi\otimes\nu)\right\|_1 \to 0 \text{ при } t\to\infty .$$

Таким образом, для произвольных состояний $\varphi_j,\varphi_{1,j},\psi_i,\psi_{1,i},\varphi,\psi\in S$, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, и чисел λ_i,μ_j таких, что $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=\sum_{j=1}^{q}\mu_j=1$, $\lambda_i,\mu_j\ge 0$, имеем

$$\left\|P_*^{s,t}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\psi_i\otimes\psi_{1,i}\right)-P_*^{s,t}\left(\sum_{j=1}^{q}\mu_j\varphi_j\otimes\varphi_{1,j}\right)\right\|_1 \le$$

$$\le \left\|P_*^{s,t}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\psi_i\otimes\psi_{1,i}\right)-P_*^{s,t}(\varphi\otimes\psi)\right\|_1 +$$

$$+\left\|P_*^{s,t}\left(\sum_{j=1}^{q}\mu_j\varphi_j\otimes\varphi_{1,j}\right)-P_*^{s,t}(\varphi\otimes\psi)\right\|_1 \to 0 \quad\text{при}\quad t\to\infty .$$

Обозначим через G выпуклую оболочку множества $\{\varphi\otimes\psi:\varphi,\psi\in S\}$. Поскольку множество G плотно в S^2 в топологии $\sigma((\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_*,\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})$, то для произвольного $\varepsilon>0$ и для любых $\varphi,\psi\in S^2$ найдутся состояния $\mu,\nu\in G$ такие, что

$$\|\varphi-\mu\|_1<\varepsilon/2,\qquad \|\psi-\nu\|_1<\varepsilon/2.$$

Для состояний μ и ν существует число $t_0=t_0(s,\mu,\nu)$ такое, что

$$\|P_*^{s,t}\mu-P_*^{s,t}\nu\|_1<\varepsilon/2 \quad\text{для всех}\quad t\ge t_0 .$$

В силу этих неравенств и неравенства

$$\|P_*^{s,t}\mu\|_1\le\|\mu\|_1 \quad\text{для всех}\quad \mu\in(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_* \quad (2)$$

имеем

$$\|P_*^{s,t}\varphi-P_*^{s,t}\psi\|_1\le\|P_*^{s,t}\varphi-P_*^{s,t}\mu\|_1+\|P_*^{s,t}\psi-P_*^{s,t}\nu\|_1+\|P_*^{s,t}\mu-P_*^{s,t}\nu\|_1\le$$

$$\le\|\varphi-\mu\|_1+\|\psi-\nu\|_1+\varepsilon/2<\varepsilon \quad\text{при всех}\quad t\ge t_0 .$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Будем говорить, что к. к. с. п. $\{P^{s,t}\}$ удовлетворяет условию (A_1) (соответственно равномерно) на $\mathcal{N}\in S^2$, если существует положительный функционал $\mu_0\in\mathcal{M}_*^+$ такой, что для любых $\varphi\in\mathcal{N}$ и $s\in R_+$ найдется семейство функционалов $\{\tau_t^s : s, t \in R_+, t-s \geq 1\} \subset \mathcal{M}_*^+$ и число $t_0 \in R_+$ такие, что $\|\tau_t^s\|_1 \to 0$ (соответственно $\sup_{\varphi\in\mathcal{N}} \|\tau_t^s\|_1 \to 0$) при $t \to \infty$, для которых справедливо

$$P_*^{s,t}\varphi + \tau_t^s \geq \mu_0 \text{ для всех } t \geq t_0.$$

Лемма 2. *Пусть к. к. с. п. $\{P^{s,t}\}$ на $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (A_1) на $\mathcal{R}$. Тогда этот к. к. с. п. удовлетворяет условию (A_1) на выпуклой оболочке $\mathcal{R}^{ch}$ множества $\mathcal{R}$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{R}, m \in N$, и $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ — такие числа, что $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \mu_1 = 1$. Для каждого состояния φ_i, $i = \overline{1,m}$, в силу условия (A_1) существует семейство функционалов $\{\tau_{t,i}^s\}$ и числа $t_{0,i} \in R_+$ такие, что

$$P_*^{s,t}\varphi_i + \tau_{t,i}^s \geq \mu_0 \quad \forall t \geq t_{0,i}, \quad i \in \overline{1,m},$$

где $\tau_{t,i}^s \to 0$ при $t \to \infty$. Для состояния $\sum_{i=1}^m \lambda_i\varphi_i \in \mathcal{R}^{ch}$ положим

$$\tau_t^s = \sum_{i=1}^m \lambda_i \tau_{t,i}^s.$$

Ясно, что $\tau_t^s \to 0$ при $t \to \infty$ и

$$P_*^{s,t}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\varphi_i\right) + \tau_t^s = \sum_{i=1}^m \lambda_i\left(P_*^{s,t}\varphi_i + \tau_{t,i}^s\right) \geq \mu_0 \quad \forall t \geq \max\{t_{0,i} : i = \overline{1,m}\}.$$

Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть $\{P^{s,t}\}$ — к. к. с. п. типа (A) на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, удовлетворяет условию (A_1) на множестве $\mathcal{N} \subset S^2$, выпуклая оболочка которого $\sigma((\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_*, \mathcal{M}\otimes\mathcal{M})$ плотна в S^2. Тогда имеет место эргодический принцип.*

Доказательство. Положим

$$\rho^1(\varphi,\psi) = \|\varphi-\psi\|_1, \quad \varphi,\psi \in S, \qquad \rho^2(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = \|\tilde{\varphi}-\tilde{\psi}\|_1, \quad \tilde{\varphi},\tilde{\psi} \in S^2.$$

Пусть $\varphi,\psi \in S^2$ и $s \in R_+$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют состояния $\mu_1, \nu_1 \in \mathcal{N}^{ch}$ такие, что

$$\rho^2(\varphi,\mu_1) \leq \varepsilon/4, \quad \rho^2(\psi,\nu_1) \leq \varepsilon/4,$$

где $\mathcal{N}^{ch}$ — выпуклая оболочка $\mathcal{N}$. В силу леммы 2 всегда можно считать, что условие (A_1) выполнено на $\mathcal{N}^{ch}$. Поскольку $\mu_1, \nu_1 \in \mathcal{N}^{ch}$, то по условию (A_1) существуют функционалы $\tau_t^s(\mu_1)$, $\tau_t^s(\nu_1)$ такие, что

$$P_*^{s,t}\mu_1 + \tau_t^s(\mu_1) \geq \mu_0 \quad \text{при всех} \quad t \geq t_{0,1},$$

$$P_*^{s,t}\nu_1 + \tau_t^s(\nu_1) \geq \mu_0 \quad \text{при всех} \quad t \geq t_{0,2}.$$

Положим $\tau_{t,1}^s = \tau_t^s(\mu_1) + \tau_t^s(\nu_1)$ и $\mu_0(\mathbb{1}) = \lambda$. Без ограничения общности можно считать $\lambda \leq 1/2$, так как в противном случае μ_0 заменим на $\mu_0/2\lambda$.

Таким образом, имеем

$$P_*^{s,t}\mu_1 + \tau_{t,1}^s \geq \mu_0, \quad P_*^{s,t}\nu_1 + \tau_{t,1}^s \geq \mu_0 \text{ и } \|\tau_{t,1}^s\|_1 \leq \lambda/2 \text{ при всех } t \geq k_1 \in N,$$

откуда

$$\rho^1(P_*^{s,t}\varphi, P_*^{s,t}\psi) \le \varepsilon/2 + \rho^1(P_*^{s,t}\mu_1, P_*^{s,t}\nu_1).$$

Здесь мы воспользовались неравенством (2).

Для любых $s, \tau, t \in R_+$ таких, что $\tau - s \ge 1$, $t - \tau \ge 1$, справедливо равенство

$$P_*^{s,t}\varphi = P_*^{\tau,t}(P_*^{s,\tau}\varphi \otimes \omega_\tau), \quad \varphi \in S^2, \tag{3}$$

которое непосредственным образом следует из уравнения $i\nu)_A$ определения 1.

В силу равенства (3) имеем

$$\rho^1(P_*^{s,t}\mu_1, P_*^{s,t}\nu_1) =$$
$$= \rho^1\Big(P_*^{k_1,t}\big((P_*^{s,k_1}\mu_1 + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\otimes\omega_{k_1}\big),\ P_*^{k_1,t}\big((P_*^{s,k_1}\nu_1 + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\otimes\omega_{k_1}\big)\Big).$$

Поскольку $P_*^{s,k_1}\mu_1 + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0 \ge 0$, то

$$\rho^1\Big(P_*^{k_1,t}\big((P_*^{s,k_1}\mu_1 + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\otimes\omega_{k_1}\big), 0\Big) =$$
$$= 1 + \tau_{k_1,1}^s(\mathbb{1}) - \lambda = 1 - c_1 \le 1 - \lambda/2.$$

Аналогично получаем

$$\rho^1\Big(P_*^{k_1,t}\big((P_*^{s,k_1}\mu_1 + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\otimes\omega_{k_1}\big), 0\Big) = 1 - c_1 \le 1 - \lambda/2.$$

Положим

$$\tilde\mu_1 = (1-c_1)^{-1}\,(P_*^{s,k_1}\mu_1 + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\otimes\omega_{k_1},$$
$$\tilde\nu_1 = (1-c_1)^{-1}\,(P_*^{s,k_1}\nu_1 + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\otimes\omega_{k_1}.$$

Тогда $\tilde\mu_1,\ \tilde\nu_1 \in S^2$ и

$$\rho^1(P_*^{s,t}\varphi, P_*^{s,t}\psi) \le \varepsilon/2 + (1-c_1)\,\rho^1(P_*^{k_1,t}\tilde\mu_1, P_*^{k_1,t}\tilde\nu_1).$$

Индукцией по m покажем, что найдется последовательность $\{k_m\}$ такая, что при $t \ge L_m = \sum_{i=1}^m k_1$ имеет место неравенство

$$\rho^1(P_*^{s,t}\varphi, P_*^{s,t}\psi) \le \varepsilon(1-2^{-m}) + \prod_{i=1}^m (1-c_i)\rho^1(P_*^{L_m,t}\tilde\mu_m,\ P_*^{L_m,t}\tilde\nu_m),$$

где $1 - c_i \le 1 - \lambda/2, i = \overline{1,m}$,

$$\tilde\mu_m = (1-c_m)^{-1}\,(P_*^{L_{m-1},L_m}\mu_m + \tau_{L_m,m}^{L_{m-1}} - \mu_0)\otimes\omega_{L_m},$$
$$\tilde\nu_m = (1-c_m)^{-1}\,(P_*^{L_{m-1},L_m}\nu_m + \tau_{L_m,m}^{L_{m-1}} - \mu_0)\otimes\omega_{L_m},$$
$$\rho^2(\mu_m, \tilde\mu_{m-1}) \le \varepsilon 2^{-m-1}, \quad \rho^2(\nu_m, \tilde\nu_{m-1}) \le \varepsilon 2^{-m-1},$$

$\mu_m, \nu_m \in \mathcal{N}^{ch}$ и $\|\tau_{t,m}^{L_{m-1}}\|_1 \le \lambda/2$ при всех $t \ge L_m$.

Случай $m = 1$ рассмотрен ранее. Предположим, что утверждение справедливо при некотором m, и покажем, что оно верно при $m+1$.

В силу условия предложения существуют состояния $\mu_{m+1}, \nu_{m+1} \in \mathcal{N}^{ch}$ такие, что

$$\rho^2(\tilde\mu_m, \mu_{m+1}) \le \varepsilon 2^{-m-2}, \quad \rho^2(\tilde\nu_m, \nu_{m+1}) \le \varepsilon 2^{-m-2}.$$

Далее существует число $k_{m+1} \in N$ такое, что при $t \ge L_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} k_i$ имеет место $\|\tau_{t,m+1}^{L_m}\|_1 \le \lambda/2$,

$$P_*^{L_m,t}\mu_{m+1} + \tau_{t,m+1}^{L_m} \geq \mu_0, \qquad P_*^{L_m,t}\nu_{m+1} + \tau_{t,m+1}^{L_m} \geq \mu_0 .$$

Тогда

$$\rho^1\Big(P_*^{L_{m+1},t}\Big(\big(P_*^{L_m,L_{m+1}}\mu_{m+1} + \tau_{L_{m+1},m+1}^{L_m} - \mu_0\big)\otimes\omega_{L_{m+1}}\Big),0\Big) = \\ = 1 - c_{m+1} \leq 1 - \lambda/2,$$

$$\rho^1\Big(P_*^{L_{m+1},t}\Big(\big(P_*^{L_m,L_{m+1}}\nu_{m+1} + \tau_{L_{m+1},m+1}^{L_m} - \mu_0\big)\otimes\omega_{L_{m+1}}\Big),0\Big) = \\ = 1 - c_{m+1} \leq 1 - \lambda/2.$$

Положим

$$\tilde{\mu}_{m+1} = (1-c_{m+1})^{-1}\big(P_*^{L_m,L_{m+1}}\mu_{m+1} + \tau_{L_{m+1},m+1}^{L_m} - \mu_0\big)\otimes\omega_{L_{m+1}},$$
$$\tilde{\nu}_{m+1} = (1-c_{m+1})^{-1}\big(P_*^{L_m,L_{m+1}}\nu_{m+1} + \tau_{L_{m+1},m+1}^{L_m} - \mu_0\big)\otimes\omega_{L_{m+1}},$$

тогда $\tilde{\mu}_{m+1}, \tilde{\nu}_{m+1} \in S^2$ и при всех $t \geq L_{m+1}$ имеем

$$\varepsilon(1-2^{-m}) + \prod_{i=1}^{m}(1-c_i)\rho^1(P_*^{L_m,t}\tilde{\mu}_m,\ P_*^{L_m,t}\tilde{\nu}_m) \leq \varepsilon(1-2^{-m}) +$$
$$+ \varepsilon 2^{-1-m} + \prod_{i=1}^{m+1}(1-c_i)\rho^1(P_*^{L_{m+1},t}\tilde{\mu}_{m+1},\ P_*^{L_{m+1},t}\tilde{\nu}_{m+1}) =$$
$$= \varepsilon(1-2^{-m-1}) + \prod_{i=1}^{m+1}(1-c_i)\rho^1(P_*^{L_{m+1},t}\tilde{\mu}_{m+1},\ P_*^{L_{m+1},t}\tilde{\nu}_{m+1}),$$

что доказывает утверждение индукции.

Для достаточно большого t имеем представление

$$t = \sum_{i=1}^{m}k_i + r, \qquad 0 \leq r \leq k_{m+1},$$

и для m выполняется неравенство $m > \log_{(1-\lambda/2)}\varepsilon + 2$. Тогда $\prod_{i=1}^{m-1}(1-c_i) < < (1-\lambda/2)^{m-1} \leq \varepsilon/2$. Используя неравенство (2), получаем

$$\rho^1(P_*^{L_{m-1},t}\tilde{\mu}_{m-1},\ P_*^{L_{m-1},t}\tilde{\nu}_{m+1}) \leq \rho^2(\tilde{\mu}_{m-1},0) + \rho^2(\tilde{\nu}_{m-1},0) \leq 2,$$

откуда находим

$$\rho^1(P_*^{s,t}\varphi,\ P_*^{s,t}\psi) < 2\varepsilon .$$

Последнее означает выполнение эргодического принципа. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть* $\{P^{s,t}\}$ *— однородный к. к. с. п. типа* (A) *на алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, *удовлетворяет условию* (A_1) *равномерно на множестве* $\mathcal{N} \subset S^2$, *выпуклая оболочка которого* $\sigma((\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_*, \mathcal{M}\otimes\mathcal{M})$ *плотна в* S^2. *Тогда существуют постоянные* d, b $(d = d(s),\ b = b(s),\ d, b > 0)$ *и* $t_1 \in R_+$ *такие, что для любых* $\varphi, \psi \in S^2$

$$\| P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi \|_1 \leq d\exp\{-bt\} \quad \text{при всех } t \geq t_1 .$$

Доказательство. Повторяя доказательство предложения 1 и используя однородность к. к. с. п., находим $L_m = mL_1$, $k_i = L_1$ и L_1 не зависит от ε. Полагая $d = 3\exp b$, $b = -\ln(1-\lambda/2)/L_1$, $\varepsilon_m = \exp\{-L_1 bm\}$ при $L_1(m-1) \leq \leq t$, $t+1 \leq L_1 m$, воспользуемся определением $\varepsilon = \varepsilon_m$. Тогда

$$\| P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi \|_1 \le \exp\{-L_1 bm\} + 2(1-\lambda/2)^m \le d\exp\{-bt\} \quad \forall t \ge L_1 .$$

Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $\{P^{s,t}\}$ *— к. к. с. п. типа* (B) *на алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, *удовлетворяет условию* (A_1) *на* S^2. *Тогда имеет место эргодический принцип.*

Доказательство. Пусть состояния $\sigma, \varphi, \psi \in S$ и число $s \in R_+$ зафиксированы. Обозначим

$$f^{\varphi} = \sigma \otimes \varphi, \qquad f^{\psi} = \sigma \otimes \psi, \qquad h^{\varphi} = \omega_s \otimes \varphi,$$
$$h^{\psi} = \omega_s \otimes \psi, \qquad g = \sigma \otimes \omega_s. \tag{4}$$

Отсюда ясно, что $f^{\varphi}, f^{\psi}, h^{\varphi}, h^{\psi} \in S^2$. Тогда, рассуждая как при доказательстве предложения 1, убеждаемся, что для состояний h^{φ}, h^{ψ} в силу условия (A_1) существуют положительные функционалы $\tau_{t,1}^s$ такие, что

$$P_*^{s,t}h^{\varphi} + \tau_{t,1}^s \ge \mu_0,$$
$$P_*^{s,t}h^{\psi} + \tau_{t,1}^s \ge \mu_0 \tag{5}$$

и $\| \tau_{t,1}^s \|_1 \le \lambda/2$ при всех $t \ge k_1 \in N$.

Для любых $s, \tau, t \in R_+$ таких, что $\tau - s \ge 1$, $t - \tau \ge 1$, справедливо равенство

$$P_*^{s,t}(\omega \otimes \varphi) = P_*^{\tau,t}\big(P_*^{s,\tau}(\omega_s \otimes \omega) \otimes P_*^{s,\tau}(\omega_s \otimes \varphi)\big), \qquad \omega, \varphi \in S, \tag{6}$$

которое непосредственным образом следует из уравнения $iv)_B$ определения 1.

Используя равенства (4), (6), легко получаем

$$\rho^1(P_*^{s,t}f^{\varphi},\ P_*^{s,t}f^{\psi}) =$$
$$= \rho^1\Big(P_*^{k_1,t}\big(P_*^{s,k_1}g \otimes (P_*^{s,k_1}h^{\varphi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\big), P_*^{k_1,t}\big(P_*^{s,k_1}g \otimes (P_*^{s,k_1}h^{\psi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\big)\Big). \tag{7}$$

В силу (5) имеем

$$\rho^1\Big(P_*^{k_1,t}\big(P_*^{s,k_1}g \otimes (P_*^{s,k_1}h^{\varphi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\big), 0\Big) = 1 - c_1 \le 1 - \lambda/2,$$
$$\rho^1\Big(P_*^{k_1,t}\big(P_*^{s,k_1}g \otimes (P_*^{s,k_1}h^{\psi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0)\big), 0\Big) = 1 - c_1 \le 1 - \lambda/2.$$

Положим

$$\tilde{\mu}_1 = (1-c_1)^{-1}P_*^{s,k_1}g \otimes (P_*^{s,k_1}h^{\varphi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0),$$
$$\tilde{\nu}_1 = (1-c_1)^{-1}P_*^{s,k_1}g \otimes (P_*^{s,k_1}h^{\psi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0).$$

Тогда из (7) следует

$$\rho^1(P_*^{s,t}f^{\varphi}, P_*^{s,t}f^{\psi}) = (1-c_1)\rho^1(P_*^{k_1,t}\tilde{\mu}_1, P_*^{k_1,t}\tilde{\nu}_1).$$

Обозначим

$$\sigma_1 = P_*^{s,k_1}g, \quad \varphi_1 = (1-c_1)^{-1}(P_*^{s,k_1}h^{\varphi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0),$$
$$g_1 = \sigma_1 \otimes \omega_{k_1}, \quad \psi_1 = (1-c_1)^{-1}(P_*^{s,k_1}h^{\psi} + \tau_{k_1,1}^s - \mu_0),$$
$$h^{\varphi_1} = \omega_{k_1} \otimes \varphi_1, \quad h^{\psi_1} = \omega_{k_1} \otimes \psi_1 .$$

Индукцией по m покажем, что найдется последовательность $\{k_m\}$ такая, что при $t \geq L_m = \sum_{i=1}^{m} k_i$ имеет место равенство

$$\rho^1(P_*^{s,t} f^{\varphi}, P_*^{s,t} f^{\psi}) = \prod_{i=1}^{m}(1-c_i)\rho^1(P_*^{L_m,t}\tilde{\mu}_m, P_*^{L_m,t}\tilde{\nu}_m).$$

Здесь $1-c_i \leq 1-\lambda/2$, $i=\overline{1,m}$, и

$$\tilde{\mu}_m = (1-c_m)^{-1} P_*^{L_{m-1},L_m} g_{m-1} \otimes (P_*^{L_{m-1},L_m} h^{\varphi_{m-1}} + \tau_{L_m,m}^{L_{m-1}} - \mu_0),$$

$$\tilde{\nu}_m = (1-c_m)^{-1} P_*^{L_{m-1},L_m} g_{m-1} \otimes (P_*^{L_{m-1},L_m} h^{\psi_{m-1}} + \tau_{L_m,m}^{L_{m-1}} - \mu_0),$$

где $\| \tau_{t,m}^{L_{m-1}} \|_1 \leq \lambda/2$ при $t \geq L_m$.

Случай $m = 1$ рассмотрен ранее. Предположим, что утверждение справедливо при некотором m, и докажем, что оно верно при $m+1$.

Обозначим

$$\sigma_m = P_*^{L_{m-1},L_m} g_{m-1}, \qquad \varphi_m = (1-c_m)^{-1}(P_*^{L_{m-1},L_m} h^{\varphi_{m-1}} + \tau_{L_m,m}^{L_{m-1}} - \mu_0),$$

$$g_m = \sigma_m \otimes \omega_{L_m}, \qquad \psi_m = (1-c_m)^{-1}(P_*^{L_{m-1},L_m} h^{\psi_{m-1}} + \tau_{L_m,m}^{L_{m-1}} - \mu_0),$$

$$h^{\varphi_m} = \omega_{L_m} \otimes \varphi_m, \qquad h^{\psi_m} = \omega_{L_m} \otimes \psi_m.$$

Ясно, что $h^{\varphi_m} h^{\psi_m} \in S^2$. Модифицируя доказательство предложения 1, легко получаем справедливость утверждения индукции.

Повторяя рассуждения предложения 1, можно показать справедливость следующего соотношения:

$$\lim_{t\to\infty} \| P_*^{s,t}(\sigma \otimes \varphi) - P_*^{s,t}(\sigma \otimes \psi) \|_1 = 0.$$

Теперь, используя лемму 1, получаем требуемое соотношение. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть* $\{P^{s,t}\}$ *— однородный к. к. с. п. типа* (B) *на алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, *удовлетворяет условию* (A_1) *равномерно на* S^2. *Тогда существуют постоянные* d, b $(b = d(s),\ b = b(s),\ d, b > 0)$ *и* $t_1 \in R_+$ *такие, что для любых* $\varphi, \psi \in S^2$

$$\| P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi \|_1 \leq d \exp\{-bt\} \quad \textit{при всех } t \geq t_1.$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.

3. ***Условие регулярности.*** В этом пункте изучаются вопросы регулярности к. к. с. п.; даются необходимые и достаточные условия регулярности однородных к. к. с. п.

Определение 3. *Будем говорить, что к. к. с. п.* $\{P^{s,t}\}$ *на* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию регулярности (соответственно экспоненциальной регулярности), если существует состояние* $\mu_1 \in S$ *такое, что для любого* $\varphi \in S^2$ *и* $s \in R_+$

$$\lim_{t\to\infty} \| P_*^{s,t}\varphi - \mu_1 \|_1 = 0$$

(*соответственно* $\| P_*^{s,t}\varphi - \mu_1 \|_1 \leq d\exp(-bt)$ *для всех* $\varphi \in S^2$ *и* $t \geq t_0(s)$, *для некоторого* $t_0(s) \in R_+$, *где* $d, b > 0$).

В случае коммутативной алгебры фон Неймана условие регулярности можно переформулировать следующим образом: существует вероятностная (т. е. нормированная) мера μ_1 на $(E, \mathcal{B})$ такая, что для любых $x, y \in E, A \in \mathcal{B}$ и $s \in R_+$ справедливо

$$\lim_{t \to \infty} |P(s, x, y, t, A) - \mu_1(A)| = 0.$$

Лемма 3. *Пусть $\{P^{s,t}\}$ — однородный к. к. с. п. на алгебре фон Неймана M. Тогда имеет место равенство*

$$\omega_2 = \omega_t \text{ для любого } t \geq 2.$$

Доказательство непосредственным образом следует из однородности к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$.

Предложение 5. *Пусть $\{P^{s,t}\}$ — регулярный (соответственно экспоненциально регулярный) к. к. с. п. на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда он удовлетворяет условию (A_1) (соответственно равномерно) на S^2.*

Доказательство. Пусть $\mu_1 \in S$ — предельное состояние для $P_*^{s,t}\varphi$, $\varphi \in S^2$. Положим

$$\tau_t^s = (P_*^{s,t}\varphi - \mu_1)_-,$$

где $P_*^{s,t}\varphi - \mu_1 = (P_*^{s,t}\varphi - \mu_1)_+ - (P_*^{s,t}\varphi - \mu_1)_-$ — разложение Йордана (см. [17], предложение 3.2.7). Покажем, что $\|\tau_t^s\|_1 \to 0$ (соответственно $\sup\limits_{\varphi \in S^2} \|\tau_t^s\|_1 \to 0$) при $t \to \infty$. Действительно,

$$\|\tau_t^s\|_1 = \left\|(P_*^{s,t}\varphi - \mu_1)_-\right\|_1 \leq \left\|(P_*^{s,t}\varphi - \mu_1)\right\|_1 \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

$$\Big(\text{соответственно} \quad \sup_{\varphi \in S^2} \|\tau_t^s\|_1 \leq d \exp(-bt) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty\Big),$$

поскольку $P^{s,t}$ регулярен (соответственно экспоненциально регулярен). Кроме того,

$$P_*^{s,t}\varphi + \tau_t^s = \mu_1 + (P_*^{s,t}\varphi - \mu_1)_+ \geq \mu_1 \quad \text{для любых } t \geq t_0,$$

где $t_0 = s + 1$. Следовательно, мы получили справедливость условия (A_1) (соответственно равномерно) на S^2. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть $\{P^{s,t}\}$ — однородный к. к. с. п. типа (A) на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) $P^{s,t}$ — регулярный (соответственно экспоненциально регулярный) процесс;

ii) $P^{s,t}$ удовлетворяет условию (A_1) (соответственно равномерно) на S^2;

iii) $P^{s,t}$ удовлетворяет условию (A_1) (соответственно равномерно) на множестве $\mathcal{N}$, выпуклая оболочка которого $\sigma((\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})_*, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M})$ всюду плотна в S^2.

Доказательство. Импликация $i) \Rightarrow ii)$ следует из предложения 5. Импликация $ii) \Rightarrow iii)$ очевидна. Импликация $iii) \Rightarrow i)$ получается из предложения 1 (соответственно предложения 2) и леммы 3, где $\mu_1 = \omega_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\{P^{s,t}\}$ *— однородный к. к. с. п. типа* (B) *на алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) $P^{s,t}$ *— регулярный (соответственно экспоненциально регулярный) процесс;*

ii) $P^{s,t}$ *удовлетворяет условию* (A_1) *(соответственно равномерно) на* S^2.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 лишь с использованием предложений 3 и 4. Заметим, что теоремы 1 и 2 обобщают результаты работы [14].

1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Уч. зап. Н.-И. каф. Укр. отд-ния мат. – 1924. – № 1. – С. 83–115.
2. *Улам С. М.* Нерешенные математические проблемы. – М.: Наука, 1964. – 127 с.
3. *Kesten H.* Quadratic transformations: a model for population growth. I, II // Adv. Appl. Probab. – 1970. – № 2. – P. 1–82; 179–228.
4. *Любич Ю. И.* Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций // Успехи мат. наук. – 1971. – **26**, № 5. – С. 51–116.
5. *Валландер С. С.* О предельном поведении последовательности итераций некоторых квадратичных преобразований // Докл. АН СССР. – 1972. – **202**, № 3. – С. 515–517.
6. *Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Р. Н.* Эргодический принцип для квадратичных стохастических операторов // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – № 6. – С. 34–39.
7. *Максимов В. М.* Кубические стохастические матрицы и их вероятностные интерпретации // Теория вероятностей и ее применения. – 1996. – **41**, вып. 1. – С. 89–106.
8. *Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Н. Н.* Аналитические методы в теории квадратичных стохастических операторов // Докл. АН СССР. – 1989. – **305**, № 5. – С. 1052–1056.
9. *Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Н. Н.* Об эргодическом принципе для квадратичных процессов // Там же. – 1991. – **316**, № 6. – С. 1315–1319.
10. *Sarymsakov T. A., Ganikhodzhaev N. N.* Analytic methods in the theory of quadratic stochastic processes // J. Theor. Probab. – 1990. – **3**, № 1. – P. 51–70.
11. *Janks R. D.* Quadratic differential systems for interactive population models // J. Different. Equat. – 1969. – **5**, № 3. – P. 497–514.
12. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
13. *Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М.* О квантовых квадратичных стохастических процессах // ДАН Респ. Узбекистан. – 1997. – № 3. – С. 13–16.
14. *Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М.* О квантовых квадратичных стохастических процессах и некоторые эргодические теоремы для таких процессов // Узб. мат. журн. – 1997. – № 3. – С. 8–20.
15. *Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М.* Эргодические свойства квантовых квадратичных стохастических процессов // Успехи мат. наук. – 1998. – **53**, № 6. – С. 243–244.
16. *Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М.* Условия регулярности квантовых квадратичных стохастических процессов // Докл. РАН. – 1999. – **365**, № 3. – С. 301–303.
17. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1982. – 576 с.
18. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. – 1938. – № 5. – С. 5–51.

Получено 14.01.2000,
после доработки — 16.03.2001