УДК 517.9

В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

We consider the application of asymptotic methods of nonlinear mechanics (the Bogolyubov–Mitropol'skii averaging method) when constructing approximate solutions of a system of nonlinear equations which describe wave processes in elastic systems with circular symmetry. To illustrate the method, we study the dynamics of interaction of two bending waves in a cylindrical shell under its eigen oscillations and periodic excitation.

Розглядається застосування асимптотичних методів нелінійної механіки (методу усереднення Боголюбова – Митропольського (БМ)) для побудови наближених розв'язків системи нелінійних рівнянь, що описують хвильові процеси в пружних системах з круговою симетрією. Для ілюстрації методу досліджено динаміку взаємодії двох згинних хвиль в циліндричній оболонці при її власних коливаннях та періодичному збудженні.

Нелинейные задачи о волновом деформировании многих распределенных систем с так называемой круговой (кольцевой) симметрией (круглых пластин и мембран, круговых колец, замкнутых цилиндрических, сферических и других оболочек вращения) сводятся к исследованию связанных дифференциальных уравнений вида [1 – 3]

$$\begin{aligned} \ddot{a}_k + \left(\lambda_k^2 - \dot{\alpha}_k^2\right) a_k &= \varepsilon \Phi_k^{(1)}\left(\overline{a}, \dot{\overline{a}}, \overline{\alpha}, \sigma t\right), \\ a_k \ddot{\alpha}_k + 2\dot{a}_k \dot{\alpha}_k &= \varepsilon \Phi_k^{(2)}\left(\overline{a}, \dot{\overline{a}}, \overline{\alpha}, \sigma t\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

где a_k, α_k — функции времени, характеризующие соответственно амплитудные и фазовые параметры волнового процесса; $\varepsilon \Phi_k^{(i)}$, $i = 1, 2,$ — нелинейные аналитические функции компонентов $\{a_k\}$, $\{\dot{a}_k\}$, $\{\alpha_k\}$ векторов $\overline{a}$, $\dot{\overline{a}}$, $\overline{\alpha}$, периодические с периодом $T = 2\pi/\sigma$; ε — малый положительный параметр; $\overline{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ — частотный спектр рассматриваемых систем.

По форме представленные уравнения качественно отличаются от уравнений, описывающих колебания типичных квазилинейных упругих систем, исследование которых проводится обычно с использованием методов нелинейной механики (метода малого параметра Ляпунова – Пуанкаре, асимптотических методов, методов линеаризации и др.). Однако и в рассматриваемом случае для построения приближенных периодических решений можно применять указанные методы. Используем, в частности, разработанный Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским асимптотический метод усреднения [4, 5]. С этой целью рассмотрим сначала невозмущенную (порождающую) систему

$$\begin{aligned} \ddot{a}_k + \left(\lambda_k^2 - \dot{\alpha}_k^2\right) a_k &= 0, \\ a_k \ddot{\alpha}_k + 2\dot{a}_k \dot{\alpha}_k &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

полученную из (1) при условии $\varepsilon = 0$ (здесь и далее индекс k принимает целочисленное значение из интервала $1 \le k \le n$). Из второго уравнения (2) можно получить интеграл вида

$$a_k^2 \dot{\alpha}_k = C_{0k}, \tag{3}$$

где $C_{0k} = a_k^2(0)$, $\dot{\alpha}_k(0) = \text{const}$. Система (2) в целом допускает следующее решение [1, 6]:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \sqrt{C_{1k} + C_{2k} \sin 2(\lambda_k t + C_{3k})}, \\
\alpha_k &= C_{4k} + \operatorname{arctg} \frac{C_{1k} \operatorname{tg}(\lambda_k t + C_{3k}) + C_{2k}}{\sqrt{C_{1k}^2 - C_{2k}^2}}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь C_{ik}, $i = 1, \ldots, 4$, — постоянные интегрирования, причем $C_{1k} \geq C_{2k} \geq 0$ и, кроме того, $C_{1k}^2 - C_{2k}^2 = C_{0k}^2 \lambda_K^{-2}$.

Пусть правые части системы уравнений (1) не зависят от σt и внутренние резонансы в ней отсутствуют. В соответствии с идеей метода усреднения БМ введем в (1) замену переменных, вид которой определяется решениями (4):

$$
\begin{gathered}
a_k = \sqrt{u_k + v_k \sin \psi_k}, \qquad \dot{a}_k = \frac{\lambda_k v_k}{a_k} \cos \psi_k, \\
\alpha_k = \varphi_k + \operatorname{arctg} \frac{u_k \operatorname{tg}(\psi_k/2) + v_k}{M_k}, \\
\dot{\alpha}_k = \frac{M_k \lambda_k}{a_k^2},
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где $\psi_k = 2(\lambda_k t + v_k)$, $M_k = \sqrt{u_k^2 - v_k^2}$, $u_k \geq v_k \geq 0$, u_k, v_k, θ_k, φ_k — новые неизвестные функции времени. Для их определения используем следующую процедуру [5]. Продифференцируем функции a_k и α_k по времени и приравняем полученные выражения значениями $\dot{a}_k$ и $\dot{\alpha}_k$ из (5). В результате получим систему уравнений вида

$$
\begin{gathered}
\frac{du_k}{dt} + \frac{dv_k}{dt} \sin \psi_k + 2 v_k \frac{d\theta_k}{dt} \cos \psi_k = 0, \\
\frac{d\varphi_k}{dt} + \frac{\cos^2(\psi_k/2)}{u_k a_k^2} \left\{ \left[M_k \operatorname{tg} \frac{\psi_k}{2} - \frac{u_k}{M_k} \left(u_k \operatorname{tg} \frac{\psi_k}{2} + v_k \right) \right] \frac{du_k}{dt} + \right. \\
\left. + \left[M_k + \frac{v_k}{M_k} \left(u_k \operatorname{tg} \frac{\psi_k}{2} + v_k \right) \right] \frac{dv_k}{dt} + \frac{u_k M_k}{\cos^2(\psi_k/2)} \frac{dv_k}{dt} \right\} = 0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Еще два уравнения выведем, использовав замену (5) в сочетании с уравнениями (1) и соотношением (2):

$$
\begin{gathered}
\frac{dv_k}{dt} \cos \psi_k - 2 v_k \frac{d\theta_k}{dt} \sin \psi_k = \frac{\varepsilon \Phi_k^{(1)}(\ldots) a_k}{\lambda_k}, \\
u_k \frac{du_k}{dt} - v_k \frac{dv_k}{dt} = \frac{\varepsilon \Phi_k^{(2)}(\ldots) M_k a_k}{\lambda_k}.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь функции $\Phi_k^{(i)}$, $i = 1, 2$, записаны с учетом зависимостей (5).

Разрешая уравнения (6) и (7) относительно первых производных, окончательно получаем систему четырех уравнений в стандартной форме:

$$
\frac{du_k}{dt} = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\lambda_k a_k} \left[\Phi_k^{(1)}(\ldots) v_k \cos \psi_k + \Phi_k^{(2)}(\ldots) M_k \right] \right\} = \varepsilon U_k,
$$

$$\frac{dv_k}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{1}{\lambda_k a_k}\left[\Phi_k^{(1)}(\ldots)u_k\cos\psi_k - \Phi_k^{(2)}(\ldots)M_k\sin\psi_k\right]\right\} = \varepsilon V_k,$$

$$\frac{d\theta_k}{dt} = -\varepsilon\left\{\frac{1}{2\lambda_k a_k v_k}\left[\Phi_k^{(1)}(\ldots)(u_k\sin\psi_k + v_k) + \Phi_k^{(2)}(\ldots)M_k\cos\psi_k\right]\right\} = \varepsilon\Gamma_k^{(1)}, \tag{8}$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{1}{2\lambda_k a_k}\left[\Phi_k^{(1)}(\ldots)M_k\left(\frac{\sin\psi_k}{v_k} - \frac{\cos\psi_k}{u_k}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Phi_k^{(2)}(\ldots)\left(\sin\psi_k + \frac{u_k}{v_k}\cos\psi_k + \frac{v_k}{u_k}\right)\right]\right\} = \varepsilon\Gamma_k^{(2)},$$

составленных относительно искомых амплитудных u_k, v_k и фазовых θ_k, φ_k функций.

Методика построения асимптотических решений уравнений типа (8), которые в векторном виде можно записать так: $dx/dt = \varepsilon X(x, t)$, детально изложена в [4, 5]. В соответствии с ней правые части этих уравнений представляются в виде сумм гармонических составляющих

$$\varepsilon U_k = \varepsilon\sum_j\left[U_{kj}^{(1)}(\{u_i\},\{v_i\})\cos j\psi_k + U_{kj}^{(2)}(\{u_i\},\{v_i\})\sin j\psi_k\right]$$

и т. д. Тогда решения уравнений (8) в первом приближении будут иметь вид

$$u_k = u_{k1}, \quad v_k = v_{k1}, \quad \theta_k = \theta_{k1}, \quad \varphi_k = \varphi_{k1},$$

причем

$$\frac{du_{k1}}{dt} = \varepsilon\overline{U}_k = \varepsilon U_{k0}^{(1)}(\{u_{i1}\},\{v_{i1}\}),$$

$$\frac{dv_{k1}}{dt} = \varepsilon\overline{V}_k, \quad \frac{d\theta_{k1}}{dt} = \varepsilon\overline{\Gamma}_k^{(1)}, \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi_{k1}}{dt} = \varepsilon\overline{\Gamma}_k^{(2)},$$

где черта обозначает операцию усреднения соответствующих функций по явно входящему времени t.

Для получения второго приближения необходимо учесть в выражениях для u_k, v_k, θ_k, φ_k малые вибрационные члены (рассмотреть улучшенное первое приближение):

$$u_k = u_{k1} + \varepsilon\sum_{j\neq 0}\frac{1}{j}\left[U_{kj}^{(1)}(\{u_{i1}\},\{v_{i1}\})\sin j\psi_{k1} - U_{kj}^{(2)}(\{u_{i1}\},\{v_{i1}\})\cos j\psi_{k1}\right],$$

$$\psi_{k1} = 2(\lambda_k t + \theta_{k1}), \tag{10}$$

и т. д. Подставляя затем соотношение (10) в правые части уравнений (8) и усредняя полученный результат по явно входящему времени, определяем значения функций u_k, v_k, θ_k, φ_k с точностью до величин второго порядка малости.

Аналогичным способом получают первое и более высокие асимптотические приближения и в случае, когда правые части уравнений (1) являются периодическими функциями времени. В частности, при „внешнем" резонансе вида $\lambda_k \approx p\sigma/q$ (p, q — некоторые целые взаимно простые числа) вместо (5) следует использовать замену

$$a_k = \sqrt{u_k + v_k \sin\psi_k}, \qquad \dot{a}_k = \frac{p}{q}\sigma\frac{v_k\cos\psi_k}{a_k},$$

$$\alpha_k = \varphi_k + \operatorname{arctg}\frac{u_k \operatorname{tg}(\psi_k/2) + v_k}{M_k}, \tag{11}$$

$$\dot{\alpha}_k = \frac{p}{q}\sigma\frac{M_k}{a_k^2}, \qquad M_k = \sqrt{u_k^2 - v_k^2},$$

где $\psi_k = 2((p/q)\sigma t + \theta_k)$. Усредненные уравнения (9) в этом случае будут содержать в правых частях кроме амплитудных параметров $\{u_{i1}\}$, $\{v_{i1}\}$ фазовые параметры $\{\theta_{i1}\}$ и зависеть от частотной расстройки $\sigma\Delta = \lambda_k^2 - (p\sigma/q)^2$.

Если кроме „внешнего" резонанса в системе (1) реализуются также и внутренние резонансы, то замена типа (11) вводится для всех „резонирующих" координат a_k, α_k. Для „нерезонирующих" координат используется замена (5).

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered}\ddot{a}_k + \left(\lambda_k^2 - \dot{\alpha}_k^2\right)a_k = \varepsilon\left(H_k a_k \cos\nu t + \gamma_k a_k^3 + \beta a_k a_i^2 + Q_k\delta_{k1}\cos\alpha_k\cos\Omega t\right),\\ a_k\ddot{\alpha}_k + 2\dot{a}_k\dot{\alpha}_k = -Q_k\delta_{k1}\sin\alpha_k\cos\Omega t, \qquad k, i = 1, 2, \quad k \neq i,\end{gathered} \tag{12}$$

описывающую нелинейные двухволновые (с частотами λ_1 и λ_2) процессы в круговой цилиндрической оболочке, подверженной действию радиального (поперечного) периодического (с периодом $T_1 = 2\pi/\Omega$) давления и продольного периодического $(T_2 = 2\pi/\nu)$ усилия. Здесь γ_k, $k = 1, 2,$ — параметры геометрической нелинейности оболочки, причем $\gamma_1 \neq \gamma_2$; β — параметр, характеризующий нелинейную связанность взаимодействующих изгибных волн; δ_{k1} — символ Кронекера; Q_k, H_k — постоянные, определяющие уровни амплитуд поперечного и продольного воздействия соответственно.

1. Исследуем *свободные* волновые процессы, когда в (12) $H_k = 0$ и $Q_k = 0$, $k = 1, 2$. При отсутствии внутренних резонансов усредненные уравнения первого приближения (9) для системы (12) будут иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{du_{k1}}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_{k1}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta_{k1}}{dt} = -\varepsilon\left(\frac{3\gamma_k u_{k1}}{4\lambda_k} + \frac{\beta u_{i1}}{2\lambda_k}\right),\\ \frac{d\varphi_{k1}}{dt} = \varepsilon\frac{M_{k1}\gamma_k}{4\lambda_k}, \qquad M_{k1} = \sqrt{u_{k1}^2 - v_{k1}^2}.\end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, приближенное периодическое решение уравнений (12) может быть представлено в виде

$$a_k = \sqrt{u_{k1} + v_{k1}\sin\psi_{k1}},$$

$$\alpha_k = \varepsilon\frac{M_{k1}\gamma_k t}{4\lambda_k} + \operatorname{arctg}\frac{u_{k1}\operatorname{tg}(\psi_{k1}/2) + v_{k1}}{M_{k1}},$$

где

$$\psi_{k1} = 2(p_k t + v_{k1}), \qquad p_k = p_{k1}(u_{k1}) = \lambda_k - \varepsilon\left(\frac{3\gamma_k u_{k1}}{4\lambda_k} + \beta\frac{u_{j1}}{2\lambda_k}\right),$$

$$u_{k1} = \text{const}, \quad v_{k1} = \text{const}, \quad k, j = 1, 2, \quad k \neq j.$$

Это решение соответствует бегущим волнам с переменными во времени фазовыми скоростями (так как $\dot{\alpha}_k(t) \neq 0$). Если начальные условия выбраны так, что $u_{k1} = v_{k1}$, то получим решение

$$a_k = \sqrt{2u_{k1}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_{k1}}{2}\right), \quad \alpha_k = \frac{\pi}{2},$$

соответствующее стоячим волнам (поскольку $\dot{\alpha}_k \equiv 0$).

Если $\lambda_1 \approx \lambda_2$ (т. е. в системе (12) имеет место обнаруживаемый в первом приближении внутренний резонанс), то вместо (13) получим более сложные уравнения

$$\frac{du_k}{dt} = -\varepsilon\beta\frac{(-1)^k v_1 v_2}{2\lambda_0}\sin\theta, \qquad \frac{dv_k}{dt} = -\varepsilon\beta\frac{(-1)^k u_1 v_j}{2\lambda_0}\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \varepsilon\frac{1}{2\lambda_0}\left(\Delta_k - \frac{3\gamma_k}{2}u_k - \beta u_j - \frac{1}{2}\beta u_k\frac{v_j}{v_k}\cos\theta\right), \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \varepsilon\frac{M_k}{4\lambda_0}\left[\gamma_k + \beta\sqrt{u_j^2 - C_j}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{u_k^2 - C_k}} + \frac{(-1)^k\sin\theta}{u_k}\right)\right], \qquad k, j = 1, 2, \quad k \neq j.$$

Здесь $\varepsilon\Delta_k = \lambda_k^2 - \lambda_0^2$, $\lambda_0^2 = \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)/2$, $\theta = 2(\theta_1 - \theta_2)$.

Проанализируем эти уравнения. На основании первых четырех из них (составленных относительно u_k, v_k) нетрудно получить три первых интеграла вида

$$u_1 + u_2 = C_0, \qquad u_k^2 - v_k^2 = C_k, \quad k = 1, 2, \tag{15}$$

причем C_0, C_k — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий:

$$C_0 = \frac{1}{2\lambda_0^2}\sum_{k=1}^{2}\left[\dot{a}_k^2(0) + a_k^2(0)\left(\lambda_0^2 + \dot{\alpha}_k^2(0)\right)\right], \qquad C_k = \frac{\dot{\alpha}_k(0)\,a_k^2(0)}{\lambda_0}.$$

Таким образом, порядок системы (14) можно существенно понизить, сведя ее, в частности, к исследованию более простой системы:

$$\frac{du_1}{dt} = \varepsilon\frac{\beta}{2\lambda_0}L_1(u_1)L_2(u_1)\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = G - Nu_1 + \frac{\varepsilon\beta}{2\lambda_0}S(u_1)\cos\theta,$$
$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \varepsilon\frac{\sqrt{C_k}}{4\lambda_0}\left[\gamma_k + \beta L_j(u_1)\left(\frac{\cos\theta}{L_k(u_1)} + \frac{(-1)^k\sin\theta}{u_k}\right)\right], \tag{16}$$

где

$$L_1(u_1) = \sqrt{(C_0 - u_1)^2 - C_2}, \qquad L_2(u_1) = \sqrt{\left(u_1^2 - C_1\right)},$$

$$S(u_1) = \frac{1}{L_1(u_1)L_2(u_1)}\left[u_1L_1^2(u_1) - (C_0 - u_1)L_2^2(u_1)\right],$$

$$G = \varepsilon\frac{1}{2\lambda_0}\left[(2\beta - 3\gamma_1)C_0 + 2\Delta_0\right], \qquad \varepsilon\Delta_0 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2,$$

$$N = \varepsilon\frac{1}{2\lambda_0}\left[4\beta - 3(\gamma_1 + \gamma_2)\right], \qquad k, j = 1, 2, \quad k \neq j.$$

Учитывая соотношение

$$\frac{dS}{du_1} = \frac{d}{du_1}\left[L_1(u_1)L_2(u_1)\right],$$

из первых двух уравнений этой системы выводим еще один интеграл

$$Gu_1 - \frac{Nu_1^2}{2} + \frac{\varepsilon\beta}{2\lambda_0} L_1(u_1) L_2(u_1) \cos\theta = C_4, \qquad C_4 = \text{const}, \tag{17}$$

связывающий амплитудный u_1 и фазовый θ параметры системы (14). Отметим, что полученные интегралы (15), (17) являются следствием внутреннего резонанса в системе (12). В целом эти интегралы позволяют исследовать, каким образом приданная в начальный момент времени системе (12) энергия будет „перераспределяться" между различными волнами при свободных колебаниях этой системы. Численный анализ уравнений (16) показывает, что функции $u_1(t)$ и $\dot{\theta}(t)$ являются периодическими функциями времени. Это означает, что энергообмен между волнами будет „саморегулируемым" периодическим процессом.

Существенно также отметить, что уравнения для фазовых функций $\varphi_k(t)$ в (14) и (16) „отделились" от остальных уравнений. При этом $\varphi_k \equiv$ const, если $\dot{\alpha}_k^{(0)} = 0$ или $a_k(0) = 0$. При $C_k \neq 0$ функции $\varphi_k(t)$ также будут осциллирующими функциями времени, имеющими тот же период, что и функции $u_k(t)$.

2. Для рассмотрения вынужденных волновых процессов в уравнениях (12) положим $H_k = 0$, $Q_k \neq 0$. Поскольку наибольший интерес представляет исследование резонансных режимов, в дальнейшем будем полагать $\lambda_k = \Omega$. Усредненные уравнения (9) при отсутствии внутренних резонансов в системе (12) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{du_k}{dt} &= -\varepsilon \frac{Q_k \delta_{k1}}{2\Omega\sqrt{u_k}} [M_k \sin\theta_k \cos\varphi_k + (u_k \cos\theta_k - v_k \sin\theta_k) \sin\varphi_k],\\
\frac{dv_k}{dt} &= \varepsilon \frac{Q_k \delta_{k1}}{2\Omega\sqrt{u_k}} [M_k \sin\theta_k \cos\varphi_k + (u_k \sin\theta_k - v_k \cos\theta_k) \sin\varphi_k],\\
\frac{d\theta_k}{dt} &= \varepsilon \frac{1}{2\Omega}\left(\Delta_k \delta_{k1} - \frac{3\gamma_k}{2} u_k - \beta u_j\right) -\\
&- \varepsilon \frac{Q_k \delta_{k1}}{4\Omega v_k \sqrt{u_k}} [M_k \sin\theta_k \cos\varphi_k - (u_k \cos\theta_k + v_k \sin\theta_k) \sin\varphi_k],\\
\frac{d\varphi_k}{dt} &= \varepsilon \frac{M_k \gamma_k}{4\Omega} + \varepsilon \frac{Q_k \delta_{k1}}{4\Omega u_k v_k \sqrt{u_k}} \Big[\left(M_k^2 \sin\theta_k - 2u_k v_k \cos\theta_k\right) \cos\varphi_k -\\
&- M_k (v_k \sin\theta_k + u_k \cos\theta_k) \sin\varphi_k\Big],
\end{aligned} \tag{18}$$

где $\varepsilon\Delta_k = \lambda_k^2 - \Omega^2$, $k, j = 1, 2$, $k \neq j$.

Традиционно при анализе вынужденных периодических колебаний нелинейных систем исследуются установившиеся режимы, которые соответствуют стационарным значениям амплитуд и фаз. Приравнивая, в частности, правые части уравнений (18) нулю, получаем следующие две группы стационарных решений:

$$\begin{gathered}
\Delta_1 = \frac{3\gamma_1 u_1}{2} \pm \frac{Q_1}{\sqrt{2u_1}}, \qquad u_1 = v_1,\\
\cos\varphi_1 = 0, \qquad \operatorname{tg}\theta_1 = 1;
\end{gathered} \tag{19}$$

$$\Delta_1 = \frac{3\gamma_1 u_1}{2} + \frac{Q_1^2}{2\gamma_1 v_1^2}, \quad u_1 = \mp v_1 + \frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 v_1^2},$$
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{M_1}{v_1 \mp u_1}, \quad \operatorname{tg}\theta_1 = \pm 1, \quad u_1 \neq v_1. \tag{20}$$

Решение для волновых параметров с индексами „2" соответствует зависимостям (14) (с учетом условия $k = 2$).

Решение (19) характеризует вынужденную стоячую волну, при этом амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) $u_1 = u_1(\Omega)$ данной волны по форме аналогична АЧХ для нелинейного осциллятора с кубической характеристикой восстанавливающей силы [5]. Более сложной по форме будет АЧХ для бегущей волны, которой соответствует решение (20). Здесь эта характеристика состоит из пары двух различных веток $u_1 = u_1(\Omega)$ и $v_1 = v_1(\Omega)$, соответствующих верхним и нижним знакам в (20).

Пусть теперь $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \Omega$. Очевидно, что усредненные уравнения (9) в этом случае можно получить, рассматривая совместно уравнения (14) и (18) (с учетом замены (11)). Эти уравнения характеризуются четырьмя группами качественно различных стационарных решений:

$$1.\ u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2; \qquad 2.\ u_1 = v_1, \quad u_2 \neq v_2;$$
$$3.\ u_1 \neq v_1, \quad u_2 = v_2; \qquad 4.\ u_1 \neq v_1, \quad u_2 \neq v_2. \tag{21}$$

При этом АЧХ для первой группы будут соответствовать уравнениям

$$A_1 = -B_1 u_1 \pm \frac{Q_1}{\sqrt{2u_1}},$$
$$u_2 = -\frac{2}{3\gamma_2}(\Delta_2 + \beta_1 u_1), \tag{22}$$

где

$$A_1 = \Delta_1 - \frac{2\beta_1\Delta_2}{3\gamma_2}, \quad B_1 = \frac{3\gamma_1}{2} - \frac{2\beta_1^2}{3\gamma_2},$$
$$\beta_1 = \beta\left[1 + \frac{(-1)^q}{2}\right], \quad \varepsilon\Delta_k = \lambda_k^2 - \Omega^2, \quad k = 1, 2,$$
$$\cos\theta = (-1)^q, \quad \theta = 2(\theta_2 - \theta_1), \quad q \in Z.$$

Для второго решения (21) частотные характеристики имеют вид

$$A_2 = B_2 u_1 \pm \frac{Q_1}{\sqrt{2u_1}},$$
$$u_2 = \frac{1}{\gamma_2}(\Delta_2 - \beta u_1), \quad v_2 = -\frac{\beta(-1)^q u_1}{\gamma_2}, \tag{23}$$

причем

$$A_2 = \Delta_1 - \frac{\beta\Delta_2}{\gamma_2}, \quad B_2 = \frac{2}{3}\frac{\beta^2 - \gamma_1\gamma_2}{\gamma 2}, \ \cos\ \theta = (-1)^q, \quad q \in Z.$$

Аналогичные зависимости можно получить для третьей и четвертой групп решений (21). Отметим при этом, что первая группа решений (22) соответствует наложению двух стоячих волн, одна из которых возбуждается непосредственно внешней силой, вторая — возбуждается косвенно, вследствие нелинейной связи между волнами. Второе (23) и третье (21) решения описывают случай, когда индуцируемая внешней периодической нагрузкой стоячая (соответственно бегущая) волна возбуждает косвенно бегущую (стоячую) волну. И, наконец, четвертое решение характеризует взаимодействие в условиях сложного резонанса двух бегущих волн.

3. Рассмотрим кратко случай *параметрически возбуждаемых* волновых процессов, для чего в уравнениях (12) примем $Q_k = 0,\ H_k \neq 0$. Исследуем при этом резонансную ситуацию вида $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \nu/2$, соответствующую главному параметрическому резонансу (при одновременной реализации внутреннего резонанса). Решение указанных уравнений в первом приближении имеет вид

$$a_k = \sqrt{u_k + v_k \sin(\nu t + 2\theta_k)},$$

$$\alpha_k = \varphi_k + \operatorname{arctg} \frac{u_k \operatorname{tg}(\nu t/2 + \theta_k) + v_k}{M_k},$$

где неизвестные функции $u_k,\ v_k,\ \theta_k,\ \varphi_k$ должны быть определены из системы усредненных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{du_k}{dt} &= \frac{\varepsilon\beta(-1)^k}{\nu} v_1 v_2 \sin\theta + \frac{\varepsilon H_k}{\nu} v_k \sin 2\theta_k,\\
\frac{dv_k}{dt} &= -\frac{\varepsilon\beta(-1)^k}{\nu} u_1 v_j \sin\theta + \frac{\varepsilon H_k}{\nu} u_k \cos 2\theta_k,\\
\frac{d\theta_k}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\Delta_k - \frac{3\gamma_k}{2} u_k - \beta u_j - \frac{\beta}{2} u_k \frac{v_j}{v_k} \cos\theta\right) - \frac{\varepsilon H_k}{2\nu} \frac{u_k}{v_k} \sin 2\theta_k,\\
\frac{d\varphi_k}{dt} &= \frac{\varepsilon M_k}{2\nu}\left[\gamma_k + \beta v_j\left(\frac{\cos\theta}{v_k} + \frac{(-1)^k \sin\theta}{u_k}\right)\right] +\\
&\quad + \frac{\varepsilon H_k M_k}{2 u_k v_k \nu}(u_k \sin 2\theta_k - v_k \cos 2\theta_k),
\end{aligned} \tag{24}$$

причем $\varepsilon\Delta_k = \lambda_k^2 - \nu^2/4,\ k, j = 1, 2,\ k \neq j.$

При отсутствии взаимодействия волн (т. е. при отсутствии внутреннего резонанса) АЧХ системы (12) состоят из двух „независимых" частотных характеристик, полученных для каждой из волн в отдельности:

$$\Delta_k = \frac{3\gamma_k}{2} u_k \pm \frac{H_k}{2} \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2 - C_k}}, \qquad C_k = \frac{\dot\alpha_k(0)\, a_k^2(0)}{\lambda_k}.$$

Как обычно, при $C_k \neq 0$ эти характеристики будут описывать бегущие волны с фазовыми скоростями $\dot\alpha_k = M_k \nu/(2a_k^2)$. При $C_k \to 0$ бегущие волны вырождаются в стоячие волны с АЧХ, типичной для параметрически возбуждаемых колебаний упругих систем с одной степенью свободы [5]:

$$\Delta_k = \frac{3\gamma_k}{2} u_k \pm \frac{H_k}{2}.$$

Область неустойчивости при этом такова [5, 6]:

$$\lambda_k^2 - \frac{H_k}{2} < \frac{\nu^2}{4} < \lambda_k^2 + \frac{H_k}{2}.$$

Что касается общей системы (24), то ее порядок, как и при анализе свободных колебаний, можно понизить, учитывая существование первых интегралов вида $u_k^2 - v_k^2 = C_k = \text{const}$, $k = 1, 2$. Здесь также будут иметь место четыре группы стационарных решений типа (21). В частности, первая группа соответствует таким решениям:

$$u_1 = v_1 = \frac{D_1(\nu)}{D_0}, \quad u_2 = v_2 = \frac{D_2(\nu)}{D_0},$$

где

$$D_0 = \frac{9\gamma_1\gamma_2}{4} - \beta^2\left[1 + \frac{(-1)^q}{2}\right], \quad D_1 = -\frac{3\gamma_2}{2}(H_{11} - \Delta_1) + \beta_1(H_{22} - \Delta_2),$$

$$D_2(\nu) = \frac{3\gamma_1}{2}(-H_{22} + \Delta_2) + \beta_1(H_{11} - \Delta_1),$$

$$\beta_1 = \beta\left(1 + \frac{(-1)^q}{2}\right), \quad H_{kk} = \frac{H_k}{2}(-1)^{q_k}, \quad \sin\theta = 0,$$

$$\cos\theta = (-1)^q, \quad \sin 2\theta_1 = (-1)^{q_1}, \quad \sin 2\theta_2 = (-1)^{q_2}.$$

Приведем еще стационарное решение, соответствующее второй группе:

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = f_1(u_1) = \frac{1}{\gamma_2}\left[\beta(-1)^q u_1 - H_{22}\sqrt{C_2}\,\right],$$

$$u_2 = f_2(u_1) = \sqrt{C_2 + [f_1(u_1)]^2},$$

$$\Delta_1 - \frac{3\gamma_1 u_1}{2} - \beta f_2(u_1) - \frac{\beta}{2}(-1)^q f_1(u_1) = H_{11},$$

$$\cos\theta = (-1)^q, \quad \sin 2\theta_1 = (-1)^{q_1}, \quad \sin 2\theta_2 = (-1)^{q_2}.$$

Для остальных групп из (21) решения аналогичны.

4. Все представленные выше решения соответствуют первому приближению. Для построения *второго приближения* вернемся к исходным уравнениям (8), в которых нелинейные функции $\varepsilon\Phi_k^{(i)}$ выражаются согласно (12). При этом ограничимся рассмотрением свободных волновых процессов в системе (12) при отсутствии в последней внутренних резонансов. Функции u_k, v_k, θ_k, φ_k представим с точностью до величин, пропорциональных малому параметру ε:

$$u_k = u_{k1} + \varepsilon U_k^{(1)}, \quad v_k = v_{k1} + \varepsilon V_k^{(1)},$$

$$\theta_k = \theta_{k1} + \varepsilon\Gamma_{k1}^{(1)}, \quad \varphi_k = \varphi_{k1} + \varepsilon\Gamma_{k1}^{(2)}.$$

Здесь

$$\varepsilon U_k^{(1)} = \varepsilon\big[A_{k1}\sin\psi_{k1} + A_{k2}\cos 2\psi_{k1} +$$
$$+ A_{k3}\cos(\psi_{j1} + \psi_{k1}) + A_{k4}\cos(\psi_{j1} - \psi_{k1})\big],$$

$$\varepsilon V_{k1}^{(1)} = \varepsilon\big[B_{k1}\sin\psi_{k1} + B_{k2}\cos 2\psi_{k1} +$$
$$+ B_{k3}\cos(\psi_{j1} + \psi_{k1}) + B_{k4}\cos(\psi_{j1} - \psi_{k1})\big],$$

$$\varepsilon\Gamma_{k1}^{(1)} = \varepsilon\big[P_{k1}\sin\psi_{k1} + P_{k2}\sin 2\psi_{k1} +$$
$$+ P_{k3}\cos\psi_{j1} + P_{k4}\sin(\psi_{j1} - \psi_{k1}) + P_{k5}\sin(\psi_{j1} + \psi_{k1})\big],$$

$$\varepsilon\Gamma_{k1}^{(2)} = \varepsilon\big[E_{k1}\cos\psi_{k1} + E_{k2}\sin\psi_{k1} + E_{k3}\sin 2\psi_{k1} + E_{k4}\cos 2\psi_{k1} +$$

$$+ E_{k5}\sin\left(\psi_{j1}-\psi_{k1}\right)+E_{k6}\sin\left(\psi_{j1}+\psi_{k1}\right)+$$
$$+ E_{k7}\cos\left(\psi_{j1}-\psi_{k1}\right)+E_{k8}\cos\left(\psi_{j1}+\psi_{k1}\right)\Big],$$

причем A_{ki}, B_{ki}, P_{ki}, E_{ki} — коэффициенты, зависящие от амплитудных параметров u_{k1}, v_{k1}:

$$A_{k1} = \frac{\gamma_k u_{k1} v_{k1}}{2\lambda_k^2} + \frac{\beta v_{k1} u_{j1}}{2\lambda_k^2}, \qquad A_{k2} = -\frac{\gamma_k v_{k1}^2}{8\lambda_k^2},$$

$$A_{k3} = -\frac{\beta v_{j1} v_{k1}}{4\lambda_k\left(\lambda_j+\lambda_k\right)}, \qquad A_{k4} = -\frac{\beta v_{j1} v_{k1}}{4\lambda_k\left(\lambda_j-\lambda_k\right)}, \quad k, j = 1, 2; \quad k \neq j,$$

и т. д.

Функции u_{k1}, v_{k1}, θ_{k1}, φ_{k1} должны быть определены при этом из системы уравнений

$$\frac{du_{k1}}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_{k1}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\theta_{k1}}{dt} = -\varepsilon\frac{1}{2\lambda_k}\left(\frac{3\gamma_k}{2}u_{k1}+\beta u_{j1}\right)-\varepsilon^2\left\{\frac{\beta u_{j1}}{4\lambda_k}\left(\frac{A_{j1}}{v_{j1}}+\frac{A_{k1}}{v_{k1}}+\frac{A_{j3}u_{k1}}{v_{j1}}-\frac{A_{j4}u_{k1}}{v_{j1}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_k}{8\lambda_k v_{k1}}\left[3\frac{u_{k1}}{v_{k1}}\left(A_{k1}^2+A_{k2}^2+A_{k3}^2+A_{k4}^2\right)-4A_{k1}A_{k2}\right]\right\},$$

$$\frac{d\varphi_{k1}}{dt} = \varepsilon\frac{M_{k1}\gamma_k}{\lambda_k}+\varepsilon^2\left\{\frac{M_{k1}}{8\lambda_k v_k}\left[2\gamma_k A_{k1}+\beta\frac{u_{j1}}{v_{j1}}\left(A_{j4}-A_{j3}\right)\right]\right\},$$

$$M_{k1} = \sqrt{u_{k1}^2 - v_{k1}^2}\,.$$

Аналогичные решения можно получить и для остальных групп (21).

Таким образом, в работе проиллюстрировано применение метода усреднения БМ для построения приближенных периодических решений одного класса нелинейных уравнений, описывающих волновые процессы в упругих телах определенной геометрической формы. Существенной особенностью рассматриваемых уравнений является то, что „невозмущенные" уравнения являются нелинейными уравнениями, допускающими периодические решения, выражающиеся через элементарные функции.

1. *Ковальчук П. С., Кубенко В. Д.* Взаимодействие колеблющихся цилиндрических оболочек с содержащейся в них жидкостью // Динамика тел, взаимодействующих со средой / А. Н. Гузь, Ш. Маркуш, Л. Пуст и др. – К.: Наук. думка, 1991. – С. 168 – 214.
2. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Бояршина Л. Г. и др.* Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость. – К.: Наук. думка, 1992. – 184 с.
3. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Выща шк., 1989. – 208 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
6. *Динамика* элементов конструкций // Механика композитов: В 12 т. – К.: Наук. думка, 1999. – Т. 9. – 400 с.

Получено 28.01.2000