УДК 517.21

В. А. Коваль (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ МАРТИНГАЛОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

The strong law of large numbers is proved for vector martingales with arbitrary operator normings. A number of well-known results on the strong law of large numbers for martingales with continuous time is derived from the theorem proved.

Доводиться підсилений закон великих чисел для векторних мартингалів з довільними операторними нормуваннями. Із доведеної теореми виводиться ряд відомих результатів про підсилений закон великих чисел для мартингалів з неперервним часом.

В настоящей работе исследуется усиленный закон больших чисел с матричными нормировками для многомерных мартингалов с непрерывным временем. Ранее данная задача рассматривалась в работах [1 – 5].

Введем необходимые обозначения: R^d — евклидово пространство вектор-столбцов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_d)^T$, где T — знак транспонирования $(R^1 = R)$; $R^{q\times d}$ — пространство матриц размера $q \times d$; $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A; $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора либо матрицы, что будет понятно из контекста; п. н. — почти наверное; E — знак математического ожидания; $\mathfrak{N}(R)$ — множество всех монотонно возрастающих к бесконечности последовательностей положительных чисел; $\sup\varnothing = 0$.

Докажем сначала одну общую теорему. Пусть $(X_t,\ t\geq 0)$ — сепарабельный случайный процесс в R^d, заданный на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, и $(A_t,\ t\geq 0)$ — неслучайная функция со значениями в $R^{q\times d}$.

Теорема 1. *Предположим, что случайный процесс $(A_tX_t,\ t\geq 0)$ является сепарабельным и $\|A_t\|\to 0,\ t\to\infty$. Если для любой последовательности $(t_n, n\geq 1)\in\mathfrak{N}(R)$ при всех $\varepsilon>0$ выполняется условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{t_n < t\leq t_{n+1}} \left\|A_{t_{n+1}}\left(X_t - X_{t_n}\right)\right\| > \varepsilon\right) < \infty, \tag{1}$$

то имеет место усиленный закон больших чисел

$$\|A_tX_t\|\to 0 \quad \text{п. н.}, \quad t\to\infty. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 1 основывается на следующей лемме, которая вытекает из леммы 4.4.2 [6].

Лемма 1. *Пусть $(Y_t,\ t\geq 0)$ — сепарабельный случайный процесс в R^q. Для выполнения соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\|Y_t\| = 0 \quad \text{п. н.}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $(t_n,\ n\geq 1)\in\mathfrak{N}(R)$

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty}\left\|Y_{t_n}\right\| = 0\right) = 1.$$

***Доказательство теоремы* 1.** В силу леммы 1 соотношение (2) имеет место тогда и только тогда, когда для любой $(t_n,\ n\geq 1)\in\mathfrak{N}(R)$

$$\left\| A_{t_n} X_{t_n} \right\| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

В силу следствия 2.1 из [7] соотношение (3) для фиксированной последовательности $(t_n,\ n \ge 1)$ будет выполнено, если для любой монотонно возрастающей к бесконечности последовательности натуральных чисел $(n(j),\ j \ge 1)$ при всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\max_{n(j) < n \le n(j+1)} \left\| A_{t_{n(j+1)}} \left(X_{t_n} - X_{t_{n(j)}} \right) \right\| > \varepsilon \right) < \infty.$$

Последнее условие очевидно выполнено вследствие (1). Теорема 1 доказана.

Далее предполагается, что все рассматриваемые процессы (функции) имеют п. н. траектории из пространства D, т. е. траектории непрерывны справа и существуют конечные пределы слева.

Обозначим через $(M_t,\ t \ge 0)$ локально квадратично интегрируемый мартингал в R^d $(M_0 = 0)$, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t,\ t \ge 0)$ (см., например, [8]). Матричную квадратическую характеристику мартингала обозначим через $\left(\langle M \rangle_t,\ t \ge 0\right)$. Как и выше, $(A_t,\ t \ge 0)$ — неслучайная функция со значениями в $R^{q \times d}$ такая, что $\|A_t\| \to 0,\ t \to \infty$.

Теорема 2. *Если для любой последовательности* $(t_n,\ n \ge 1) \in \mathfrak{N}(R)$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}\left[A_{t_{n+1}} \left(\mathrm{E}\langle M \rangle_{t_{n+1}} - \mathrm{E}\langle M \rangle_{t_n} \right) A_{t_{n+1}}^T \right] < \infty, \tag{4}$$

то

$$\|A_t M_t\| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Для фиксированных t_n и t_{n+1} случайный процесс $\left(\hat{M}_t = A_{t_{n+1}}\left(M_t - M_{t_n}\right),\ \mathcal{F}_t,\ t \ge t_n\right)$ является локально квадратично интегрируемым мартингалом в R^q с квадратической характеристикой $\left(\left\langle \hat{M} \right\rangle_t = A_{t_{n+1}}\left(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_{t_n}\right) A_{t_{n+1}}^T,\ t \ge t_n\right)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, используя неравенство Дуба (см., например, [8]), получаем

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t_n < t \le t_{n+1}} \left\| \hat{M}_t \right\| > \varepsilon \right) \le \sum_{k=1}^{q} \mathrm{P}\left(\sup_{t_n < t \le t_{n+1}} \left| \hat{M}_t^{(k)} \right| > \varepsilon q^{-1/2} \right) \le$$

$$\le q\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{q} \mathrm{E}\left\langle \hat{M}^{(k)} \right\rangle_{t_{n+1}} = q\varepsilon^{-2}\, \mathrm{E}\,\mathrm{tr}\left\langle \hat{M} \right\rangle_{t_{n+1}},$$

где $\hat{M}_t^{(k)},\ k = \overline{1, q}$, — координаты вектора $\hat{M}_t$. Отсюда следует, что выполнено условие (1) в силу условия (4). Теорема 2 доказана.

Рассмотрим ряд следствий из теоремы 2.

Следующий результат был получен в работе [4].

***Следствие* 1.** *Пусть выполнено условие* $\langle M \rangle_t = \mathrm{E}\left(M_t M_t^T\right) = B_t$. *Предположим, что* $B_{t_0} > 0$, *т. е. матрица* B_{t_0} *положительно определена при некотором* $t_0 \ge 0$, *и* $\left\| B_t^{-1} \right\| \to 0,\ t \to \infty$. *Тогда*

$$\left\| B_t^{-1} M_t \right\| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Воспользуемся следующим матричным неравенством (см. [9]): для произвольных симметричных положительно определенных матриц A и B таких, что $A \geq B$, имеет место

$$A^{-1}(A-B)A^{-1} \leq B^{-1} - A^{-1}. \tag{6}$$

В силу данного неравенства

$$\mathrm{tr}\left[B_{t_{n+1}}^{-1}\left(B_{t_{n+1}} - B_{t_n}\right)B_{t_{n+1}}^{-1}\right] \leq \mathrm{tr}\left(B_{t_n}^{-1} - B_{t_{n+1}}^{-1}\right).$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tr}\left(B_{t_n}^{-1} - B_{t_{n+1}}^{-1}\right) = \mathrm{tr} B_{t_1}^{-1} < \infty,$$

то выполнено условие (4), что доказывает следствие 1.

Следствие 2. *Если выполнено условие*

$$\int_0^{+\infty} \sup_{s \geq t} \mathrm{tr}\left[A_s d\left(\mathrm{E}\langle M\rangle_t\right)A_s^T\right] < \infty, \tag{7}$$

то имеет место (5).

Доказательство. Покажем, что из условия (7) вытекает условие (4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tr}\left[A_{t_{n+1}}\left(\mathrm{E}\langle M\rangle_{t_{n+1}} - \mathrm{E}\langle M\rangle_{t_n}\right)A_{t_{n+1}}^T\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathrm{tr}\left[A_{t_{n+1}} d\left(\mathrm{E}\langle M\rangle_t\right)A_{t_{n+1}}^T\right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sup_{s \geq t} \mathrm{tr}\left[A_s d\left(\mathrm{E}\langle M\rangle_t\right)A_s^T\right] \leq \int_0^{+\infty} \sup_{s \geq t} \mathrm{tr}\left[A_s d\left(\mathrm{E}\langle M\rangle_t\right)A_s^T\right] < \infty.$$

Следствие 2 доказано.

Следующий результат был получен в работе [5].

Следствие 3. *Пусть функция* $(A_t,\ t \geq 0)$ *удовлетворяет при всех* $s \geq t$ *условию* $A_s^T A_s \leq A_t^T A_t$. *Если выполнено условие*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{tr}\left[A_t d\left(\mathrm{E}\langle M\rangle_t\right)A_t^T\right] < \infty,$$

то имеет место (5).

Следствие 3 вытекает непосредственно из следствия 2 и следующей леммы.

Лемма 2. *Если* $A_s^T A_s \leq A_t^T A_t$, *то для любой симметричной матрицы* $D \geq 0$ *имеет место неравенство*

$$\mathrm{tr}\left(A_s D A_s^T\right) \leq \mathrm{tr}\left(A_t D A_t^T\right).$$

Доказательство. Обозначим через $D^{1/2}$ корень квадратный из матрицы D. В силу условия леммы

$$\mathrm{tr}\left(D^{1/2} A_s^T A_s D^{1/2}\right) \leq \mathrm{tr}\left(D^{1/2} A_t^T A_t D^{1/2}\right)$$

или

$$\mathrm{tr}\left[D^{1/2} A_s^T \left(D^{1/2} A_s^T\right)^T\right] \leq \mathrm{tr}\left[D^{1/2} A_t^T \left(D^{1/2} A_t^T\right)^T\right].$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tr}\left[\left(D^{1/2}A_s^T\right)^T D^{1/2}A_s^T\right] \le \operatorname{tr}\left[\left(D^{1/2}A_t^T\right)^T D^{1/2}A_t^T\right].$$

В силу данного неравенства получаем утверждение леммы 2.

***Замечание* 1.** Условие $A_s^T A_s \le A_t^T A_t$ эквивалентно условию $\|A_s x\| \le \|A_t x\|$ $\forall x \in R^d$, которое было введено в [10] при исследовании усиленного закона больших чисел для многомерных мартингалов с дискретным временем.

Следующий результат был получен в работе [1].

***Следствие* 4.** *Пусть функция* $(A_t,\ t \ge 0)$ *со значениями в* $R^{d\times d}$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *при всех* $t \ge 0$ *матрицы* A_t *симметричные и* $A_t > 0$;

2) $A_s \le A_t$ *при всех* $s \ge t$;

3) $c = \sup\limits_{t\ge 0}[\lambda_{\max}(A_t)/\lambda_{\min}(A_t)] < \infty$, *где* $\lambda_{\max}(\cdot)$ *и* $\lambda_{\min}(\cdot)$ — *соответственно максимальное и минимальное собственное значение матрицы. Если выполнено условие*

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{tr}\left[A_t d(\mathrm{E}\langle M\rangle_t)A_t\right] < \infty,$$

то имеет место (5).

Следствие 4 вытекает непосредственно из следствия 2 и следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* 1– 3 *следствия* 4. *Тогда при всех* $s \ge t$ *для любой симметричной матрицы* $D \ge 0$ *имеет место неравенство*

$$\operatorname{tr}(A_s D A_s) \le dc^2 \operatorname{tr}(A_t D A_t).$$

Доказательство.

$$\operatorname{tr}(A_s D A_s) \le d\lambda_{\max}\left(A_s A_t^{-1}(A_t D A_t)A_t^{-1}A_s\right) \le$$

$$\le d\lambda_{\max}^2(A_s A_t^{-1})\lambda_{\max}(A_t D A_t) \le d\lambda_{\max}^2(A_s)\lambda_{\min}^{-2}(A_t)\operatorname{tr}(A_t D A_t) \le$$

$$\le d\lambda_{\max}^2(A_t)\lambda_{\min}^{-2}(A_t)\operatorname{tr}(A_t D A_t) \le dc^2\operatorname{tr}(A_t D A_t).$$

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим в заключение применение теоремы 2 к исследованию сильной состоятельности оценок наименьших квадратов неизвестных параметров в многомерной линейной регрессии. Пусть наблюдается случайный процесс в R^q (см. [2], § 4.3)

$$Y_t = \int_0^t D_s^T da_s\theta + X_t, \qquad t \ge 0,$$

где $(X_t,\ t \ge 0)$ — локально квадратично интегрируемый мартингал в R^q, квадратическая характеристика которого $\langle X\rangle_t$ является детерминированной функцией; $(D_t,\ t \ge 0)$ — неслучайная функция со значениями в $R^{d\times q}$; $(a_t,\ t \ge 0)$ — монотонно неубывающая функция со значениями в R; θ — неизвестный параметр. Предполагается, что существует плотность $Q_t = d\langle X\rangle_t / da_t$, причем $Q_t > 0$. Положим $B_t = \int_0^t D_s Q_s^{-1} D_s^T\, da_s$ и предположим, что $B_t > 0,\ t > 0$. Рассмотрим в качестве оценки параметра θ статистику

$$\hat{\theta}_t = B_t^{-1} \int_0^t D_s Q_s^{-1} dY_s.$$

Следующий результат был получен в работе [2].

***Следствие* 5.** *Если* $\lambda_{\min}(B_t) \to \infty$, $t \to \infty$, *то*

$$\left\| \hat{\theta}_t - \theta \right\| \to 0 \quad \textit{п. н.}, \quad t \to \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Поскольку

$$\hat{\theta}_t = \theta + B_t^{-1} \int_0^t D_s Q_s^{-1} dX_s,$$

то для доказательства соотношения (8) нужно показать, что

$$\left\| B_t^{-1} \int_0^t D_s Q_s^{-1} dX_s \right\| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad t \to \infty.$$

Из условия $\lambda_{\min}(B_t) \to \infty$ следует, что $\left\| B_t^{-1} \right\| \to 0$, $t \to \infty$. Кроме того, случайный процесс $\left(M_t = \int_0^t D_s Q_s^{-1} dX_s,\ t \geq 0 \right)$ является локально квадратично интегрируемым мартингалом с детерминированной квадратической характеристикой

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t D_s Q_s^{-1} d\langle X \rangle_s Q_s^{-1} D_s^T = \int_0^t D_s Q_s^{-1} D_s^T da_s = B_t.$$

Используя (6), убеждаемся, что выполнено условие (4).

Следствие 5 доказано.

1. *Мельников А. В.* Закон больших чисел для многомерных мартингалов // Докл. АН СССР. – 1986. – **286**, № 3. – С. 546 – 550.
2. *Мельников А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения: негладкость коэффициентов, регрессионные модели и стохастическая аппроксимация // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 5. – С. 43 – 136.
3. *Le Breton A., Musiela M.* Laws of large numbers for semimartingales with applications to stochastic regression // Probab. Th. Rel. Fields. – 1989. – **81**, № 2. – P. 275 – 290.
4. *Dzhaparidze K., Spreij P.* The strong law of large numbers for martingales with deterministic quadratic variation // Stoch. Repts. – 1993. – **42**, № 1. – P. 53 – 65.
5. *Lin Y. -X.* On the strong law of large numbers for multivariate martingales with random norming // Stochast. Process. and Appl. – 1994. – **54**, № 3. – P. 355 – 360.
6. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
7. *Коваль В. О.* Граничні теореми для операторно-нормованих випадкових векторів. I // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1999. – Вип. 61. – С. 47 – 58.
8. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
9. *Duflo M.* Random iterative models. – Berlin: Springer, 1997. – 385 p.
10. *Kaufmann H.* On the strong law of large numbers for multivariate martingales // Stochast. Process. and Appl. – 1987. – **26**, № 1. – P. 73 – 85.

Получено 12.01.2000,
после доработки — 24.02.2000