УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Ун-т, Сухуми)

ОЦЕНКИ ГРУППЫ УКЛОНЕНИЙ В ОБОБЩЕННОЙ ГЕЛЬДЕРОВОЙ МЕТРИКЕ

We present order relations for a group of deviations of a function $f(\cdot) \in H_\omega$ in terms of partial sums of the Fourier series of this function in the Hölder generalized metric given in the Hölder generalized space $H_{\omega^*} \supset H_\omega$.

Наведено порядкові співвідношення для групи відхилень функції $f(\cdot) \in H_\omega$ частинними сумами її ряду Фур'є в узагальненій гельдеровій матриці, заданій в узагальненому гельдеровому просторі $H_{\omega^*} \supset H_\omega$.

1. Пусть $C = C(0, 2\pi)$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(\cdot)$ с нормой

$$\|f\|_C = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|.$$

Обозначим через $H_{\omega^*} = H_{\omega^*}(0, 2\pi)$ пространство функций $f(\cdot) \in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \le K\omega^*(|x-y|) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad K = K(f),$$

с конечной обобщенной гельдеровой нормой

$$\|f\|_{\omega^*} = \|f\|_C + \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \ne y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega^*(|x-y|)}, \tag{1}$$

где $\omega^*(\cdot)$ — некоторая неубывающая положительная при $t \ge 0$ функция. Пусть теперь $\omega(\cdot)$ — также неубывающая положительная функция при $t \ge 0$. Обозначим через $H_\omega = H_\omega(0, 2\pi)$ множество функций, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \le K_1\omega(|x-y|) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad K_1 = K_1(f),$$

содержащееся в некотором пространстве H_{ω^*}.

В частности, полагая $\omega^*(t) = t^\gamma$, $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \le \gamma < \alpha \le 1$, в качестве множества H_ω получаем

$$H_\alpha = \left\{ f \in C : |f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha \;\; \forall x, y \in \mathbb{R},\; K = K(f) \right\}$$

в пространстве H_γ с гельдеровой нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_C + \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \ne y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega^*|x-y|^\gamma}. \tag{1'}$$

При $\gamma = 0$ полагаем $\|f\|_\gamma = \|f\|_C$.

Пусть, далее,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— ряд Фурье функции $f(\cdot) \in C$,

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— частная сумма порядка n ряда Фурье $S[f]$,

$$\rho_k(x) = \rho_k(f; x) = f(x) - S_k(f; x).$$

Введем в рассмотрение величины

$$h_{p,\lambda}^{(n)}(x) = h_{p,\lambda}^{(n)}(f; x) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(x)|^p \right\}^{1/p}, \quad p > 0, \tag{2}$$

где (λ_k) — произвольная неотрицательная последовательность чисел.

В даной работе рассматриваются оценки величин $h_{p,\lambda}^{(n)}(x)$ функций $f(\cdot) \in H_\omega$ в метрике пространства H_{ω^*}, определяемой равенством (1).

Отметим, что вопросы, связанные с оценками уклонений линейных средних сумм Фурье в метрике пространства H_{ω^*}, рассматривались в работах [1–3].

2. В дальнейшем нам понадобится одно вспомогательное предложение. С этой целью обозначим

$$v_{n,p}(x, y) = v_{n,p}(f; x, y) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(x) - \rho_k(x)|^p \right\}^{1/p}.$$

Лемма. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда при* $f(\cdot) \in H_\omega$

$$v_{n,p}(x, y) = O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{1-\beta/\eta}, \quad p > 0, \tag{3}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n, x, y *и зависящая, возможно, от* $f(\cdot)$.

Доказательство. В силу неравенства для средних [4, с. 41] $v_{n,p}(x, y)$ с ростом параметра p не убывает. Тогда можно считать $p \ge 2$. Положим

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

$$D_k(t) = \frac{\sin(k + 1/2)t}{2\sin t/2}$$

и запишем следующие представления:

$$\rho_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) D_k(t)\, dt,$$

$$\rho_k(x) - \rho_k(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\varphi_x(t) - \varphi_y(t)) D_k(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^{\pi} \right] (\varphi_x(t) - \varphi_y(t)) D_k(t)\, dt.$$

В силу неравенства Минковского имеем

$$v_{n,p}(x, y) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\varphi_x(t) - \varphi_y(t)) D_k(t)\, dt \right|^p \right\}^{1/p} \le$$

$$\le \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/n} (\varphi_x(t) - \varphi_y(t)) D_k(t)\, dt \right|^p \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} (\varphi_x(t) - \varphi_y(t)) D_k(t)\, dt \right|^p \right\}^{1/p} = J_{n,p}^{(1)}(x, y) + J_{n,p}^{(2)}(x, y). \tag{4}$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое правой части (4) с учетом того, что

$$\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right| \le 4K_1\omega(|x-y|). \tag{5}$$

Поскольку $|D_k(t)| \le k+1 \le 2n,\ n \le k \le 2n-1,$ в силу (5) имеем

$$J_{n,p}^{(1)}(x,y) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right)D_k(t)\,dt\right|^p\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\int\limits_0^{\pi/n}\left|\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right|\left|D_k(t)\right|dt\right)^p\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \frac{16K}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(n\int\limits_0^{\pi/n}\omega(|x-y|)\,dt\right)^p\right\}^{1/p} = O(1)\omega(|x-y|). \tag{6}$$

Далее используем следующее представление ядра $D_k(t)$:

$$D_k(t) = \frac{\sin kt}{2\operatorname{tg}(t/2)} + \frac{1}{2}\cos kt.$$

Запишем величину $J_{n,p}^{(2)}(x,y)$ в виде

$$J_{n,p}^{(2)}(x,y) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/n}^{\pi}\frac{\left(\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right)}{2\operatorname{tg}(t/2)}\sin kt\,dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/n}^{\pi}\frac{\left(\varphi_x(t)-\varphi_y(t)\right)}{2}\cos kt\,dt\right|^p\right\}^{1/p}.$$

Положим

$$\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n) = \begin{cases}\dfrac{\varphi_x(t)-\varphi_y(t)}{2\operatorname{tg}(t/2)}, & t\in\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right];\\ 0, & t\in[-\pi,\pi]\setminus\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right],\end{cases}$$

$$\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n) = \begin{cases}\dfrac{\varphi_x(t)-\varphi_y(t)}{2}, & t\in\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right];\\ 0, & t\in[-\pi,\pi]\setminus\left[\dfrac{\pi}{n},\pi\right],\end{cases}$$

и

$$\Phi_{x,y}^{(i)}(t,n) = \Phi_{x,y}^{(i)}(t+2\pi,n), \qquad t\in\mathbb{R}, \quad i=1,2.$$

Тогда имеем

$$J_{n,p}^{(2)}(x,y) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\sin kt\,dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\cos kt\,dt\right|^p\right\}^{1/p} =$$

$$= 2\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|b_k\left(\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right)+a_k\left(\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right)\right|^p\right\}^{1/p},$$

где $a_k(t),\ b_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(\cdot)$.

Применяя неравенство Минковского к правой части последнего равенства, находим

$$J_{n,p}^{(2)}(x,y) \le 2\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|b_k\left(\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right)\right|^p\right\}^{1/p} + 2\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|a_k\left(\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right)\right|^p\right\}^{1/p}. \quad (7)$$

Далее, вследствие неравенства

$$2\operatorname{tg}\frac{t}{2} \ge t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad (8)$$

функция $\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)$ при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ принадлежит пространству $L_{p'} = L_{p'}(0, 2\pi)$, $1 < p' \le 2$, где

$$L_{p'} = \left\{ f : \|f\|_{p'} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p'} dt\right)^{1/p'} < \infty \right\}.$$

Функция $\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)$, очевидно, также принадлежит $L_{p'}$.

Используя неравенство Хаусдорфа–Юнга [5, с. 153], получаем

$$J_{n,p}^{(2)}(x,y) \le \frac{2}{n^{1/p}}\left(\left\|\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right\|_{p'} + \left\|\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right\|_{p'}\right), \quad (9)$$

Принимая во внимание соотношения (5) и (8), находим

$$\left\|\Phi_{x,y}^{(1)}(t,n)\right\|_{p'} = \left(\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\frac{(\varphi_x(t)-\varphi_y(t))}{2\operatorname{tg}(t/2)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} \le$$

$$\le 4K_1\omega(|x-y|)\left(\int_{\pi/n}^{\pi}\frac{dt}{t^{p'}}\right)^{1/p'} = O(1)n^{1/p}\omega(|x-y|). \quad (10)$$

Аналогично

$$\left\|\Phi_{x,y}^{(2)}(t,n)\right\|_{p'} = O(1)\omega(|x-y|). \quad (11)$$

Сопоставляя соотношения (9)–(11), получаем

$$J_{n,p}^{(2)}(x,y) = O(1)\omega(|x-y|). \quad (12)$$

Объединяя (4), (6) и (12), находим

$$\upsilon_{n,p}(x,y) = O(1)\omega(|x-y|) \quad \forall x, y, \quad (13)$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, x, y и зависящая, возможно, от $\varphi(\cdot) \in H_\omega$.

С другой стороны, в силу неравенства Минковского

$$\upsilon_{n,p}(x,y) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(x)-\rho_k(y)|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}(|\rho_k(x)|+|\rho_k(y)|)^p\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(x)|^p\right\}^{1/p} + \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(y)|^p\right\}^{1/p}. \quad (14)$$

В силу известного результата Л. Д. Гоголадзе [6]

$$\left\|\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(x)|^p\right\}^{1/p}\right\|_C \le A^{(p)}E_n(f),$$

где $A^{(p)}$ — константа, зависящая только от p, $E_n(f)$ — величина наилучшего приближения функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами порядка не превышающего n, и известного неравенства Джексона [5, с. 190]

$$E_n(f) \le A\omega\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

где $\omega(f; t)$ — модуль непрерывности функции $f(\cdot)$, A — абсолютная константа, получаем оценку

$$\left\| \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(x)|^p \right\}^{1/p} \right\|_C \le A_1^{(p)} \omega\left(f; \frac{1}{n}\right). \tag{15}$$

Принимая во внимание, что $f(\cdot) \in H_\omega$, из (15) находим

$$\left\| \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(x)|^p \right\}^{1/p} \right\|_C \le A_2^{(p)} \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Сопоставляя оценки (14) и (16), получаем

$$v_{n,p}(x, y) \le 2A_2^{(p)} \omega\left(\frac{1}{n}\right) = O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{17}$$

Таким образом, вследствие соотношений (13) и (17) окончательно имеем

$$v_{n,p}(x, y) = \left(v_{n,p}(x, y)\right)^{\beta/\eta} \left(v_{n,p}(x, y)\right)^{1-\beta/\eta} =$$

$$= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta}, \quad 0 \le \beta < \eta \le 1.$$

Лемма доказана.

3. Основное утверждение данной работы содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* (λ_k) — *невозрастающая последовательность неотрицательных чисел* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда при* $p \ge 1$ *и* $f(\cdot) \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *имеет место соотношение*

$$\left\| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \ne y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left\{ n\lambda_n \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} + \sum_{k=n}^{2n-1} \lambda_k \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p}, \tag{18}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}$ *и зависящая, вообще говоря, от* $f(\cdot) \in H_\omega$.

Заметим, что величина

$$\sup_{-\infty < x, y < \infty,\ x \ne y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)}$$

при фиксированных $\omega^*(\cdot)$ и $\omega(\cdot)$ зависит от выбора параметров β и η. Так, в частности, если положить $\omega(t) = t^\alpha$, $\omega^*(t) = t^\gamma$, $0 \le \gamma < \alpha \le 1$, $\beta = \gamma$, $\eta = \alpha$, то

$$\sup_{-\infty < x, y < \infty,\ x \ne y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} = 1.$$

Доказательство. Требуется оценить величину

$$\left\| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) \right\|_{\omega^*} = \left\| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) \right\|_C + \sup_{-\infty < x, y < \infty, \ x \neq y} \frac{\left| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) - h_{p,\lambda}^{(n)}(y) \right|}{\omega^*(|x-y|)}. \tag{19}$$

Применяя неравенство

$$\left| \|a\|_{l_p} - \|b\|_{l_p} \right| \leq \|a-b\|_{l_p}, \quad p \geq 1,$$

где

$$l_p = \left\{ a = (a_k) : \|a\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

с учетом условия на (λ_k) для слабых x, y получаем

$$\left| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) - h_{p,\lambda}^{(n)}(y) \right| \leq \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(x) - \rho_k(y)|^p \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1} \lambda_k |\rho_k(x) - \rho_k(y)|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{2^\nu n} \sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1} |\rho_k(x) - \rho_k(y)|^p \right\}^{1/p}. \tag{20}$$

Пусть $f(\cdot) \in H_\omega$ и $0 \leq \beta < \eta \leq 1$. Тогда в силу соотношения (3), согласно (20), получаем

$$\left| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) - h_{p,\lambda}^{(n)}(y) \right| = O(1) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{2^\nu n} 2^\nu n \left[(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left(\omega\left(\frac{1}{2^\nu n} \right) \right)^{1-\beta/\eta} \right]^p \right\}^{1/p} =$$

$$= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{2^\nu n} 2^\nu n \left(\omega\left(\frac{1}{2^\nu n} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p} =$$

$$= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left\{ n\lambda_n \left(\omega\left(\frac{1}{n} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{2^\nu n} 2^{\nu-1} n \left(\omega\left(\frac{1}{2^\nu} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p} =$$

$$= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left\{ n\lambda_n \left(\omega\left(\frac{1}{n} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=2^{\nu-1}n}^{2^\nu n-1} \lambda_k \left(\omega\left(\frac{1}{k} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p} =$$

$$= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left\{ n\lambda_n \left(\omega\left(\frac{1}{n} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \left(\omega\left(\frac{1}{k} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p}.$$

Таким образом,

$$\sup_{-\infty < x, y < \infty, x \neq y} \frac{\left| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) - h_{p,\lambda}^{(n)}(y) \right|}{\omega^*(|x-y|)} = O(1) \sup_{-\infty < x, y < \infty, x \neq y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left\{ n\lambda_n \left(\omega\left(\frac{1}{n} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \left(\omega\left(\frac{1}{k} \right) \right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p}. \tag{21}$$

Аналогично, с учетом неравенства (16) имеем

$$\left\| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) \right\|_C = O(1)\left\{ n\lambda_n\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^p \right\}^{1/p}. \tag{22}$$

Из соотношений (19), (21), (22) окончательно находим

$$\left\| h_{p,\lambda}^{(n)}(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ n\lambda_n\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p},$$

$O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Приведем некоторые утверждения и оценки, вытекающие из доказанной теоремы. В частности, полагая в соотношении (18) $n = 1$, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* (λ_k) — *невозрастающая последовательность неотрицательных чисел и* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда при* $p \ge 1$

$$\left\| h_{p,\lambda}(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{-\infty < x, y < \infty,\, x \neq y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p} \tag{23}$$

$$\forall f(\cdot) \in H_\omega,$$

где $h_{p,\lambda}(x) = h_{p,\lambda}^{(1)}(x)$.

Заметим, что в приведенных выше рассуждениях можно было полагать, что последовательность (λ_k) зависит не только от k, но и от некоторого параметра r. Стало быть, подбирая последовательности $\left(\lambda_k^{(r)}\right)$ так, чтобы при каждом фиксированном r последовательность $\left(\lambda_k^{(r)}\right)$ не возрастала, в силу соотношения (23) имеем

$$\left\| h_{p,\lambda}(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{-\infty < x, y < \infty,\, x \neq y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(r)}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p}.$$

Отсюда, в частности, получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть* $\left(\lambda_k^{(n)}\right)$, $\lambda_k^{(n)} = 0 \;\; \forall k > n$, — *бесконечная прямоугольная матрица неотрицательных чисел, невозрастающая при каждом фиксированном* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 \le \beta < \eta \le 1$. *Тогда при* $p \ge 1$

$$\left\| h_{p,\lambda}(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{-\infty < x, y < \infty,\, x \neq y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} \right\}^{1/p}$$

$$\forall f(\cdot) \in H_\omega, \tag{24}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}$.

Полагая

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)} = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

в силу выпуклости вверх функции $\varphi(u) = u^{\gamma}$, $0 < \gamma \le 1$, согласно неравенству Иенсена [4, с. 96] получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)} \le \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p}\right\}^{1-\beta/\eta}, \quad \gamma = 1 - \frac{\beta}{\eta}.$$

Следовательно, в условиях следствия 2 из соотношения (24) вытекает

$$\left\| h_{p,\lambda}(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{-\infty < x,\, y < \infty,\, x \ne y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p}\right\}^{\frac{1}{p}(1-\beta/\eta)}.$$

Положим теперь

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 1 \le k \le n; \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

$$h_p(x) = h_{p,\lambda}(x) = \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\rho_k(x)|^p\right\}^{1/p}.$$

Тогда согласно соотношению (24) получаем

$$\left\| h_p(x) \right\|_{\omega^*} = O(1) \sup_{-\infty < x,\, y < \infty,\, x \ne y} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{p(1-\beta/\eta)}\right\}^{1/p}, \tag{25}$$

$$0 \le \beta < \eta \le 1, \quad p \ge 1,$$

$O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}$ и зависящая, возможно, от $f \in H_{\omega}$.

Возвращаясь к пространствам H_{γ}, H_{α} (п.1) и полагая $\omega^*(t) = t^{\gamma}$, $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\eta = \alpha$, $\beta = \gamma$, $0 \le \gamma < \alpha \le 1$, на основании соотношения (25) получаем такое утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть* $0 \le \gamma < \alpha \le 1$. *Тогда при* $p \ge 1$ $\forall f \in H_{\alpha}$

$$\left\| h_p(x) \right\|_{\gamma} = \begin{cases} O(1) \dfrac{1}{n^{\alpha-\gamma}}, & \alpha - \gamma < \dfrac{1}{p}; \\ O(1) \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\alpha-\gamma}, & \alpha - \gamma = \dfrac{1}{p}, \end{cases}$$

где $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in \mathbb{N}$ *и зависящие, возможно, от* $f(\cdot) \in H_{\alpha}$, *а норма* $\|\cdot\|_{\gamma}$ *определена равенством* (1′).

1. *Tikam Singh.* The approximation of coninuous functions in the Holder metric // Мат. весн. — 1991. – **43**. – С. 111 – 118.
2. *Prösdorf S.* Zur Konvergens der Fourierreihen Hölderstiger Funktionen // Math. Nachr. – 1975. – **69**. – S. 7 – 14.
3. *Mahapatra P. N., Chandra P.* Degree of approximation of functions in the Holder metric // Acta math. hung. – 1983. – **41**. – P. 67 – 76.
4. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т.2. – 538 с.
6. *Гоголадзе Л. Д.* О сильной суммируемости простых и кратных тригонометрических рядов Фурье // Некоторые вопросы теории функций: Тр. Тбилис. у-та. – 1981. – **2**. – С. 5 – 50.

Получено 14.07.99