УДК 517.911

А. Е. Зернов, Т. В. Мелешко (Одес. политехн. ун-т)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

We consider the singular Cauchy problem for a nonlinear differential equation unsolved with respect to a derivative of unknown function. We prove the existence of continuously differentiable solutions, investigate the asymptotic behavior of these solutions near the initial point, and determine their number.

Розглядається сингулярна задача Коші для нелінійного диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної невідомої функції. Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків, досліджено асимптотичну поведінку цих розв'язків навколо початкової точки та визначено їх кількість.

В настоящей работе проведен качественный анализ сингулярной задачи Коши для некоторого дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной неизвестной функции. Вопросы существования и асимптотического поведения решений сингулярных задач Коши исследовались, например, в работах [1 – 5]. Задачи Коши для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных неизвестных, изучались, например, в работах [6 – 9].

В первом пункте рассматривается вопрос о существовании у задачи Коши

$$\alpha(t)x' = F(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x\colon (0, \tau) \to \mathbb{R},$$

где $\alpha(t) \to 0$, $\alpha(t)/t \to +\infty$, $t \to +0$, непрерывно дифференцируемого решения x такого, что $x'(t) \to 0$, $t \to +0$. Указываются асимптотические оценки как для x, так и для x'. Решение с такими свойствами единственно.

Во втором пункте рассматривается вопрос о существовании у этой задачи Коши непрерывно дифференцируемых решений существенно другого вида — таких, что $x'(t) \to +\infty$, $t \to +0$. Оказывается, что такие решения могут быть найдены, если правая часть уравнения содержит нелинейные слагаемые вида dxx' и $et(x')^2$ (d, e — постоянные). Кроме того, в отличие от п. 1 оказывается, что при некоторых условиях рассматриваемая задача Коши имеет бесконечное множество решений, производная каждого из которых неограниченно растет при $t \to +0$. Исследуется асимптотическое поведение $x(t)$, $x'(t)$ при $t \to +0$, определяется число решений требуемого типа. При этом как условия, так и полученные результаты являются конструктивными; даны достаточные условия существования непустого множества непрерывно дифференцируемых решений с конкретными асимптотическими свойствами.

Следуя Ф. Хартману [1, с. 52], определим точки строгого входа и строгого выхода.

Определение 1. *Пусть*

$$\Phi = \{(t, x)\colon 0 < t \le \nu,\ |x - f_1(t)| = f_2(t)\},$$

$$G = \{(t, x)\colon 0 < t \le \nu,\ |x - f_1(t)| < f_2(t)\},$$

где ν *— постоянная,* $\nu > 0$, $f_i\colon (0, \nu] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, *— непрерывные функции. Пусть* G_0 *— открытое* (t, x)*-множество,* $G \cup \Phi \subset G_0$, *а* $F\colon G_0 \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция. Тогда точка* $(t_0, x_0) \in \Phi$ *называется точкой строгого входа (или точкой строгого выхода) для множества* G *по отношению к уравнению* $x' = F(t, x)$, *если для каждого решения* $x = x(t)$ *этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию* $x(t_0) = x_0$, *существует* $\delta > 0$ *такое, что:*

© А. Е. ЗЕРНОВ, Т. В. МЕЛЕШКО, 2001

а) *при* $0 < t_0 < \nu$ $(t, x(t)) \in G$ *для* $t_0 - \delta < t < t_0$ *и* $(t, x(t)) \in \overline{G}$ *для* $t_0 < t < t_0 + \delta$ (*или* $(t, x(t)) \in \overline{G}$ *для* $t_0 - \delta < t < t_0$ *и* $(t, x(t)) \in G$ *для* $t_0 < t < t_0 + \delta$);

б) *при* $t_0 = \nu$ $(t, x(t)) \in G$ *для* $\nu - \delta < t < \nu$ (*или* $(t, x(t)) \notin \overline{G}$ *для* $\nu - \delta < t < \nu$).

1. Рассмотрим задачу Коши

$$\alpha(t)x' = F(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha : (0, \tau] \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция,

$$\lim_{t\to+0} \alpha(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} \frac{\alpha(t)}{t} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+0} t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \alpha_0, \qquad 0 \le \alpha_0 \le 1,$$

$F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\mathcal{D} = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau],\ |x| < r\xi(t),\ |y| < r\xi'(t)\}$, $\xi : (0, \tau] \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $r > 1$,

$$\lim_{t\to+0} \xi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} \xi'(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} t\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \xi_0, \quad 0 < \xi_0 \le +\infty,$$

$$|F(t, x_1, y) - F(t, x_2, y)| \le l_x\alpha(t)|x_1 - x_2|, \qquad (t, x_i, y) \in \mathcal{D}, \quad i \in \{1, 2\},$$

$$|F(t, x, y_1) - F(t, x, y_2)| \le l_y\alpha(t)|y_1 - y_2|, \qquad (t, x, y_i) \in \mathcal{D}, \quad i \in \{1, 2\},$$

l_x, l_y — положительные постоянные, $l_x + l_y < 1$.

Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $\omega : (0, \tau] \to (0, +\infty)$ такая, что

$$|\alpha(t)\xi'(t) - F(t, \xi(t), \xi'(t))| \le \omega(t), \qquad t \in (0, \tau],$$

и

$$\lim_{t\to+0} \omega(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} \frac{t\omega(t)}{\alpha(t)\xi(t)} = 0, \qquad \lim_{t\to+0} t\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} = \omega_0, \quad 1 + \omega_0 - \alpha_0 > 0.$$

Определение 2. *Пусть* ρ — *постоянная,* $\rho \in (0, \tau]$. *Будем называть* ρ-*решением задачи* (1), (2) *непрерывно дифференцируемую функцию* $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющую при* $t \in (0, \rho]$ *уравнению* (1) *и неравенствам*

$$|x(t)| < r\xi(t), \qquad |x'(t)| < r\xi'(t). \tag{3}$$

Обозначим через $\mathcal{U}(\rho, M, q)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} |x(t) - \xi(t)| &\le M\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)}, \\ |x'(t) - \xi'(t)| &\le qM\frac{\omega(t)}{\alpha(t)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь ρ, M, q — положительные постоянные, $\rho \le \tau$.

Теорема 1. *Существуют такие* ρ, M, q, *что задача* (1), (2) *имеет* ρ-*решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$, *и притом единственное.*

Доказательство. Прежде всего выберем постоянные ρ, M, q. Необходимо, чтобы выполнялись условия

$$1+\omega_0-\alpha_0 < q < \frac{1+\omega_0-\alpha_0}{l_y},$$

$$ql_y + \frac{1}{M} < 1+\omega_0-\alpha_0.$$

Условия, определяющие выбор ρ, здесь не приводим ввиду их громоздкости. Отметим лишь, что $\rho > 0$ достаточно мало и выбор постоянных ρ, M, q обеспечивает законность всех дальнейших рассуждений.

Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,\rho]} (|x(t)| + |x'(t)|)$. Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $x: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет при $t \in (0, \rho]$ неравенствам (4). Рассмотрим уравнение

$$x' = (\alpha(t))^{-1} F(t, u(t), u'(t)), \tag{5}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \{(t, x)\colon t \in (0, \rho],\ |x| < r\xi(t)\}.$$

В $\mathcal{D}_0$ для (5) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Положим

$$\Phi_1 = \left\{(t,x)\colon t\in(0,\rho],\ |x-\xi(t)| = M\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)}\right\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{(t,x)\colon t\in(0,\rho],\ |x-\xi(t)| < M\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)}\right\},$$

$$H = \left\{(t,x)\colon t=\rho,\ |x-\xi(\rho)| < M\frac{\rho\omega(\rho)}{\alpha(\rho)}\right\}.$$

Можно считать, что $\overline{\mathcal{D}_1}\setminus\{(0,0)\} \subset \mathcal{D}_0$. Пусть вспомогательная функция $A_1: \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_1(t,x) = (x-\xi(t))^2\left(\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)}\right)^{-2}$$

и $a_1: \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_1 в силу уравнения (5). Легко видеть, что $a_1(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_1$, поэтому [7, с. 758] все точки Φ_1 — точки строгого выхода для $\mathcal{D}_1$ по отношению к (5). Отсюда следует, что хотя бы одна из интегральных кривых (5), пересекающих H, определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0, \rho]$. Обозначим эту интегральную кривую через $\mathcal{J}_0: (t, x_u(t))$.

Покажем теперь, что $\mathcal{J}_0: (t, x_u(t))$ — единственная интегральная кривая уравнения (5), расположенная в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Для этого строим однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi_2(\nu) = \left\{(t,x)\colon t\in(0,\rho],\ |x-x_u(t)| = \nu\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)}(-\log t)\right\},$$

где $\nu \in (0, \nu_0]$ — параметр. Пусть

$$\mathcal{D}_2(\nu) = \left\{(t,x)\colon t\in(0,\rho],\ |x-x_u(t)| < \nu\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)}(-\log t)\right\}$$

для каждого $\nu\in(0,\nu_0]$. Можно считать, что

$$\overline{\mathcal{D}_1}\setminus\{(0,0)\}\subset\mathcal{D}_2(\nu_0),\quad \overline{\mathcal{D}_2}(\nu_0)\setminus\{(0,0)\}\subset\mathcal{D}_0.$$

Пусть вспомогательная функция $A_2\colon\mathcal{D}_0\to[0,+\infty)$ определена равенством

$$A_2(t,x) = (x-x_u(t))^2\left(\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)}(-\log t)\right)^{-2}.$$

Пусть $a_2\colon\mathcal{D}_0\to\mathbb{R}$ — производная функции A_2 силу уравнения (5). Нетрудно убедиться в том, что $a_2(t,x)<0$ при всех $(t,x)\in\mathcal{D}_0$, $x\neq x_u(t)$. Отсюда следует [7, с. 759], что при $t\to+0$ все интегральные кривые уравнения (5), кроме интегральной кривой $\mathcal{J}_0\colon(t,x_u(t))$, выходят из множества $\overline{\mathcal{D}_2}\setminus\{(0,0)\}$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что

$$|x_u(t)-\xi(t)| \le M\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)},\quad |x_u'(t)-\xi'(t)| \le qM\frac{\omega(t)}{\alpha(t)},\quad t\in(0,\rho].$$

Доопределим x_u, x_u' при $t=0$, полагая $x_u(0)=0$, $x_u'(0)=0$. Тогда функция $x_u\colon[0,\rho]\to\mathbb{R}$ принадлежит множеству $\mathcal{U}$. Определим оператор $T\colon\mathcal{U}\to\mathcal{U}$, полагая $(Tu)(t)=x_u(t)$. Докажем, что T — сжимающий оператор. Рассмотрим любые фиксированные функции $u_i\in\mathcal{U}$, $i\in\{1,2\}$, и обозначим $Tu_i=x_i$, $i\in\{1,2\}$. Если $u_1=u_2$, то и $x_1=x_2$. Пусть теперь $\|u_1-u_2\|=h$, $h>0$. Будем исследовать асимптотическое поведение при $t\to+0$ интегральных кривых уравнения

$$x' = (\alpha(t))^{-1}F(t,u_1(t),u_1'(t)). \tag{6}$$

Положим

$$\Phi_3 = \{(t,x)\colon t\in(0,\rho],\ |x-x_2(t)|=\gamma th\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(t,x)\colon t\in(0,\rho],\ |x-x_2(t)|<\gamma th\},$$

где γ — положительная постоянная, удовлетворяющая условию $\gamma>(l_x+l_y)^{-1}$. Можно считать, что $\overline{\mathcal{D}_3}\setminus\{(0,0)\}\subset\mathcal{D}_0$. Пусть вспомогательная функция $A_3\colon\mathcal{D}_0\to[0,+\infty)$ определяется равенством $A_3(t,x)=(x-x_2(t))^2t^{-2}$ и $a_3\colon\mathcal{D}_0\to\to\mathbb{R}$ — производная функции A_3 в силу уравнения (6). Нетрудно убедиться в том, что $a_3(t,x)<0$ при $(t,x)\in\Phi_3$. Отсюда следует [7, с. 758, 759], что все точки Φ_3 — точки строгого выхода для $\mathcal{D}_3$ по отношению к (6). Поскольку $x_i\in\mathcal{U}$, $i\in\{1,2\}$, то

$$|x_1(t)-x_2(t)| \le 2M\frac{t\omega(t)}{\alpha(t)} < \gamma th,$$

если $t\in(0,t(h)]$, где постоянная $t(h)\in(0,\rho]$ достаточно мала. Значит, если $t\in(0,t(h)]$, то интегральная кривая $\mathcal{J}\colon(t,x_1(t))$ уравнения (6) лежит в $\mathcal{D}_3$. На основании изложенного, если t возрастает от $t=t(h)$ до $t=\rho$, то интегральная кривая $\mathcal{J}$ должна оставаться в $\mathcal{D}_3$. Таким образом, указанная интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0, \rho]$. Это означает, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \gamma t h, \quad t \in (0, \rho]. \tag{7}$$

Из тождеств $x_i'(t) = (\alpha(t))^{-1} F(t, u_i(t), u_i'(t))$, $t \in (0, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$, следует $|x_1'(t) - x_2'(t)| \le (l_x + l_y)h$, $t \in (0, \rho]$, и поэтому ввиду (7)

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le (l_x + l_y + \gamma t)h, \quad t \in (0, \rho].$$

Положим $\theta = (1 + l_x + l_y)/2$; очевидно, $0 < \theta < 1$. Поскольку $\rho > 0$ достаточно мало, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le \theta h, \quad t \in (0, \rho].$$

Поэтому $\| x_1 - x_2 \| \le \theta h$, или $\| T u_1 - T u_2 \| \le \theta \| u_1 - u_2 \|$.

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Значит, $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — сжимающий оператор, что и требовалось доказать.

Применение принципа Банаха сжатых отображений к оператору $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ завершает доказательство теоремы 1.

2. Рассматривается задача Коши (1), (2), где $\alpha : (0, \tau] \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\lim_{t \to +0} \alpha(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +0} \frac{\alpha(t)}{t} = +\infty, \qquad \lim_{t \to +0} \frac{\alpha^3(t)}{t} = 0,$$

$$\lim_{t \to +0} \frac{t}{\alpha^2(t)} = c_\alpha, \quad 0 \le c_\alpha < +\infty,$$

$t \dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \lambda + \omega(t)$, $t \in (0, \tau]$, где $0 < \lambda < 1$, $\omega : (0, \tau] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\omega(t) = O\left(\dfrac{\alpha^3(t)}{t}\right)$, $t \to +0$,

$$F(t, x, x') = at + bx + dxx' + et(x')^2 + f(t, x, x').$$

Здесь a, b, d, e — постоянные, $e \ne 0$, $d + \lambda e \ne 0$, причем либо $1 - d/e > 4\lambda$, либо $1 - d/e < 3\lambda$, $f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\mathcal{D}_1 = \{(t, x, y) : t \in \in (0, \tau],\ |x| < r_1 \alpha(t),\ |y| < r_2 \alpha(t)/t\}$,

$$|f(t, x, y)| \le K\alpha(t), \quad (t, x, y) \in \mathcal{D}_1,\ K \text{ — положительная постоянная},$$

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \le l_x \frac{\alpha^4(t)}{t} \left(-\log\left(\frac{\alpha^3(t)}{t}\right) \right) |x_1 - x_2|, \quad (t, x_i, y) \in \mathcal{D}_1,$$

$$|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \le l_y \alpha^4(t) \left(-\log\left(\frac{\alpha^3(t)}{t}\right) \right) |y_1 - y_2|, \quad (t, x, y_i) \in \mathcal{D}_1,$$

где l_x, l_y — положительные постоянные, $i \in \{1, 2\}$.

Определение 3. *Пусть* ρ *— постоянная,* $\rho \in (0, \tau]$. *Будем называть* ρ*-решением задачи* (1), (2) *непрерывно дифференцируемую функцию* $x : (0, \rho] \to \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющую при* $t \in (0, \rho]$ *уравнению* (1) *и неравенствам*

$$|x(t)| < r_1 \alpha(t), \qquad |x'(t)| < r_2 \frac{\alpha(t)}{t}. \tag{8}$$

Пусть $c = (d + \lambda e)^{-1}$. Будем предполагать, что $|c| < r_1$, $(\lambda + 2)|c| < r_2$. Обозначим через $\mathcal{U}(\rho, M, q)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам

$$|x(t) - c\alpha(t)| \leq M\frac{\alpha^4(t)}{t}, \qquad \left|x'(t) - \frac{\lambda c\alpha(t)}{t}\right| \leq (q+1)M\frac{\alpha^4(t)}{t^2}, \tag{9}$$

где q — постоянная, $q > \left|\dfrac{d-e}{e}\right|$, ρ, M — постоянные, $0 < \rho \leq \tau$, $M > 0$.

Теорема 2. *Существуют* ρ, M, q *такие, что задача* (1), (2) *имеет непустое множество* ρ*-решений, принадлежащих множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$. *При этом*:

а) *если* $1 - d/e > 4\lambda$, *то таких решений бесконечно много; при любом выборе постоянной* ξ, *удовлетворяющей условию* $|\xi - c\alpha(\rho)| < M\alpha^4(\rho)/\rho$, *существует единственное* ρ*-решение* $x_\xi \in \mathcal{U}(\rho, M, q)$ *такое, что* $x_\xi(\rho) = \xi$;

б) *если* $1 - d/e < 3\lambda$, *задача* (1), (2) *имеет единственное* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

Доказательство. Прежде всего выбираем ρ, M. Условия, определяющие этот выбор, здесь не приводятся ввиду их громоздкости; укажем только, что ρ достаточно мало, M достаточно велико и выбор ρ, M обеспечивает законность всех последующих рассуждений.

Положим $x = y/t$, где y — новая неизвестная функция. Тогда задача Коши (1), (2) примет вид

$$-\lambda ec\alpha(t)(y' - (\lambda+1)c\alpha(t)) = \frac{\alpha(t)}{t}\left(\lambda c(d-e) + \frac{bt}{\alpha(t)}\right)(y - c\alpha(t)) + at^2 +$$
$$+ bct\alpha(t) + (d-2e)\left(\frac{y}{t} - c\alpha(t)\right)(y' - (\lambda+1)c\alpha(t)) + (e-d)\left(\frac{y}{t} - c\alpha(t)\right)^2 +$$
$$+ e(y' - (\lambda+1)c\alpha(t))^2 + tf\left(t, \frac{y}{t}, \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}\right), \tag{10}$$

$$y(0) = 0. \tag{11}$$

Обозначим через $\mathcal{V}(\rho, M, q)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $y: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, которые при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяют неравенствам

$$|y(t) - ct\alpha(t)| \leq M\alpha^4(t), \qquad |y'(t) - (\lambda+1)c\alpha(t)| \leq qM\frac{\alpha^4(t)}{t}. \tag{12}$$

Определение 4. *Пусть* ρ — *постоянная,* $\rho \in (0, \tau]$. *Будем называть* ρ*-решением задачи Коши* (10), (11) *непрерывно дифференцируемую функцию* $y: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющую при* $t \in (0, \rho]$ *уравнению* (10) *и неравенствам*

$$|y(t)| < r_1 t\alpha(t), \qquad |y'(t)| < (\lambda+1)|c|\alpha(t).$$

Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $y: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|y\| = \max\limits_{t \in [0,\rho]} (|y(t)| + |y'(t)|)$. Обозначим через $\mathcal{V}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент которого $y: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам (12) при $t \in (0, \rho]$.

Рассмотрим уравнение

$$y' = (\lambda+1)c\alpha(t) - \frac{1}{\lambda ec\alpha(t)}\left(\frac{\alpha(t)}{t}\left(\lambda c(d-e)+\frac{bt}{\alpha(t)}\right)(y-ct\alpha(t)) + at^2 + \right.$$
$$+ bct\alpha(t) + (d-2e)\left(\frac{y}{t}-c\alpha(t)\right)(v'(t)-c\alpha(t)) + (e-d)\left(\frac{y}{t}-c\alpha(t)\right)^2 +$$
$$\left. + e(v'(t)-(\lambda+1)c\alpha(t))^2 + tf\left(t, \frac{v(t)}{t}, \frac{v'(t)}{t} - \frac{v(t)}{t^2}\right)\right), \tag{13}$$

где $v \in \mathcal{V}$ — произвольная фиксированная функция.

Пусть $\mathcal{D}_2 = \{(t,x): t \in (0,\tau],\ |y| < r_1 t\}$. В $\mathcal{D}_2$ для уравнения (13) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

Положим

$$\Phi_3 = \{(t,y): t \in (0,\rho],\ |y-ct\alpha(t)| = M\alpha^4(t)\},$$
$$\mathcal{D}_3 = \{(t,y): t \in (0,\rho],\ |y-ct\alpha(t)| < M\alpha^4(t)\},$$
$$H = \{(t,y): t = \rho,\ |y-c\rho\alpha(\rho)| < M\alpha^4(\rho)\}.$$

Будем считать, что $\overline{\mathcal{D}_3}\setminus\{(0,0)\} \subset \mathcal{D}_2$. Пусть вспомогательная функция $A_1 : \mathcal{D}_2 \to [0,+\infty)$ определяется равенством $A_1(t,y) = (y-ct\alpha(t))^2(\alpha(t))^{-8}$ и $a_1 : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_1 в силу уравнения (13). Непосредственные вычисления показывают, что $\operatorname{sign} a_1(t,y) = \operatorname{sign}(1-d/e-4\lambda)$ при $(t,y) \in \Phi_1$. Следовательно, если $1-d/e > 4\lambda$, то $a_1(t,y) > 0$ при $(t,y) \in \Phi_1$, и поэтому все точки Φ_1 — точки строгого входа для $\mathcal{D}_3$ по отношению к уравнению (13).

Действительно, пусть $\mathcal{J}_p : (t, y_p(t))$ — интегральная кривая (13), проходящая через любую точку $P(t_0, y_0) \in \Phi_1$. Тогда $A_1(t_0, y_p(t_0)) = M^2$, $a_1(t_0, y_p(t_0)) > 0$. Поэтому если $0 < t_0 < \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\operatorname{sign}(A_1(t, y_p(t)) - A_1(t_0, y_p(t_0))) = \operatorname{sign}(t-t_0), \quad |t-t_0| < \delta,$$

т. е.

$$\operatorname{sign}(|y_p(t)-ct\alpha(t)|(\alpha(t))^{-4} - M) = \operatorname{sign}(t-t_0), \quad |t-t_0| < \delta.$$

Значит, $(t, y_p(t)) \in \mathcal{D}_3$ при $t_0 - \delta < t < t_0$ и $(t, y_p(t)) \notin \overline{\mathcal{D}_3}$ при $t_0 < t < t_0 + \delta$.

Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что $A_1(t, y_p(t)) < A_1(t_0, y_p(t_0))$, т. е.

$$|y_p(t) - ct\alpha(t)|(\alpha(t))^{-4} < M, \quad \rho-\delta < t < \rho,$$

а это означает, что $(t, y_p(t)) \in \mathcal{D}_3$ при $t \in (\rho-\delta, \rho)$. Утверждение доказано. Отсюда следует, что каждая из интегральных кривых уравнения (13), пересекающих H, остается в $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0,\rho]$.

Если же $1-d/e < 3\lambda$, то [7, с. 758] все точки Φ_1 — точки строгого выхода для $\mathcal{D}_3$ по отношению к (13), и поэтому хотя бы одна из интегральных кривых, пересекающих H, остается в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0,\rho]$. Обозначим эту интегральную кривую через $\mathcal{J}_0 : (t, y_u(t))$.

Пусть $1-d/e > 4\lambda$. Рассмотрим любую фиксированную точку $G(\rho, y_G) \in H$ и обозначим через $\mathcal{J}_G : (t, y_{vG}(t))$ интегральную кривую (13), проходящую через точку G (т. е. $y_{vG}(t) = y_G$). Нетрудно убедиться в том, что

$$|y_{vG}(t)-ct\alpha(t)| \le M\alpha^4(t), \qquad |y'_{vG}(t)-(\lambda+1)c\alpha(t)| \le qM\frac{\alpha^4(t)}{t}, \quad t\in(0,\rho].$$

Доопределим y_{vG}, y'_{vG} при $t=0$, полагая $y_{vG}(0)=0$, $y'_{vG}(0)=0$. Тогда функция $y_{vG}:[0,\rho]\to\mathbb{R}$ принадлежит множеству $\mathcal{V}$. Определим оператор $T_G:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$, полагая $(T_Gv)(t)=y_{vG}(t)$. Поскольку выбор точки $G\in H$ произволен, то определено однопараметрическое семейство операторов $\mathbb{T}=\{T_G: G\in H\}$.

Пусть теперь $1-d/e<3\lambda$. Докажем, что $\mathcal{J}_0:(t,y_v(t))$ — единственная интегральная кривая (13), расположенная в $\mathcal{D}_3$ при всех $t\in(0,\rho]$. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство кривых (где $\nu\in(0,\nu_0]$ — параметр):

$$\Phi_2(\nu) = \left\{(t,y): t\in(0,\rho],\ |y-y_v(t)| = \nu\alpha^4(t)\left(-\log\frac{\alpha^3(t)}{t}\right)\right\}.$$

Пусть, кроме того,

$$\mathcal{D}_4(\nu) = \left\{(t,y): t\in(0,\rho],\ |y-y_v(t)| < \nu\alpha^4(t)\left(-\log\frac{\alpha^3(t)}{t}\right)\right\}.$$

Можно считать, что $\overline{\mathcal{D}_3}\setminus\{(0,0)\}\subset\mathcal{D}_4(\nu_0)$, $\overline{\mathcal{D}_4}(\nu_0)\setminus\{(0,0)\}\subset\mathcal{D}_2$.

Пусть вспомогательная функция $A_2:\mathcal{D}_2\to[0,+\infty)$ определяется равенством

$$A_2(t,y) = (y-y_v(t))^2\left[\alpha^4(t)\left(-\log\frac{\alpha^3(t)}{t}\right)\right]^{-2}$$

и $a_2:\mathcal{D}_2\to\mathbb{R}$ — производная функции A_2 в силу уравнения (13). С помощью непосредственных вычислений можно проверить, что $a_2(t,y)<0$ при $(t,y)\in\mathcal{D}_2$, $y\ne y_v(t)$. Отсюда следует [7, с. 759], что при $t\to+0$ все интегральные кривые уравнения (13), за исключением $\mathcal{J}_0:(t,y_v(t))$, выходят из множества $\overline{\mathcal{D}_3}\setminus\{(0,0)\}$, что и требовалось доказать.

Нетрудно убедиться в том, что

$$|y_v(t)-ct\alpha(t)| \le M\alpha^4(t), \qquad |y'_v(t)-(\lambda+1)c\alpha(t)| \le qM\frac{\alpha^4(t)}{t}, \quad t\in(0,\rho].$$

Если доопределить y_{vG}, y'_{vG} при $t=0$, полагая $y_v(0)=0$, $y'_v(0)=0$, то функция $y_v:[0,\rho]\to\mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{V}$. Определим оператор $T:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$, положив $(Tv)(t)=y_v(t)$.

Докажем теперь, что все операторы $T_G\in\mathbb{T}$ — сжимающие. Пусть $G(\rho, y_G)\in H$ — произвольная фиксированная точка. Рассмотрим соответствующий оператор $T_G:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$. Выберем любые фиксированные функции $v_i\in\mathcal{V}$, $i\in\{1,2\}$, и обозначим $T_Gv_i=y_i$, $i\in\{1,2\}$. Если $v_1=v_2$, то и $y_1=y_2$. Пусть $\|v_1-v_2\|=h$, $h>0$.

Рассмотрим уравнения

$$y' = (\lambda+1)c\alpha(t) - \frac{1}{\lambda ec\alpha(t)}\left(\left(\lambda c(d-e)+\frac{bt}{\alpha(t)}\right)(y-ct\alpha(t))\frac{\alpha(t)}{t} + at^2 + \right.$$

$$\left. + bct\alpha(t) + (d-2e)\left(\frac{y}{t}-c\alpha(t)\right)(v'_i(t)-c\alpha(t)) + (e-d)^2\left(\frac{y}{t}-c\alpha(t)\right)^2 + \right.$$

$$+\; e(v_i'(t)-(\lambda+1)c\alpha(t))^2 + tf\left(t, \frac{v_i(t)}{t}, \frac{v_i'(t)}{t} - \frac{v_i(t)}{t^2}\right)\Bigg), \quad i \in \{1, 2\}. \qquad (14)$$

Положим

$$\Phi_3 = \left\{(t,y)\colon t\in(0,\rho],\ |y-y_2(t)| = \gamma h\alpha^3(t)\left(-\log\left(\frac{\alpha^3(t)}{t}\right)\right)\right\},$$

$$\mathcal{D}_5 = \left\{(t,y)\colon t\in(0,\rho],\ |y-y_2(t)| < \gamma h\alpha^3(t)\left(-\log\left(\frac{\alpha^3(t)}{t}\right)\right)\right\},$$

где γ — постоянная, удовлетворяющая условию $\gamma > (l_x + l_y)|\lambda ec(1 - d/e - 3\lambda)|^{-1}$. Можно считать, что $\overline{\mathcal{D}_5}\setminus\{(0, 0)\} \subset \mathcal{D}_2$. Пусть вспомогательная функция $A_3 : \mathcal{D}_2 \to [\,0, +\infty)$ определяется равенством $A_3(t, y) = (y - y_2(t))^2\left(\alpha^3(t)\left(-\log\frac{\alpha^3(t)}{t}\right)\right)^{-2}$ и $A_3 : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_3 в силу уравнения $(14)_1$. Непосредственные вычисления показывают, что если выполнено условие $|y - ct\alpha(t)| \le M\alpha^4(t)$, $t \in (0, \rho]$, то $a_3(t, y) > 0$ при $(t, y) \in \Phi_3$. Иначе говоря, если мы рассматриваем лишь часть Φ_3, — ту часть, которая расположена в $\mathcal{D}_3$ и на ее границе Φ_1, — то для этой части кривой Φ_3 все ее точки — точки строгого входа для $\mathcal{D}_5$ по отношению к уравнению (14), $i = 1$ (см. аналогичное рассуждение для Φ_1, проведенное выше). При этом, в соответствии с определением оператора T_G, $y_1(\rho) = y_2(\rho) = y_G$.

Если t уменьшается от ρ до 0, то на основании изложенного интегральная кривая $(t, y_1(t))$ не может пересечь Φ_3. Поэтому указанная интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_5$ при всех $t \in (0, \rho]$. Это означает, что

$$|y_1(t)-y_2(t)| < \gamma h\alpha^3(t)\left(-\log\frac{\alpha^3(t)}{t}\right), \quad t\in(0,\rho]. \qquad (15)$$

При $t \in (0, \rho]$ функции $y_i\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, обращают соответствующие уравнения (14) в тождества, из которых следует, что

$$|y_1'(t)-y_2'(t)| \le \omega_1(t)h, \quad t\in(0,\rho], \qquad (16)$$

где $\omega_1 : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — некоторая непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \omega_1(t) = 0$.

Из (15), (16) получаем $|y_1(t)-y_2(t)| + |y_1'(t)-y_2'(t)| \le \omega_2(t)h$, $t \in (0, \rho]$, где $\omega_2 : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — некоторая непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \omega_2(t) = 0$.

Поскольку $\rho > 0$ достаточно мало, то

$$|y_1(t)-y_2(t)| + |y_1'(t)-y_2'(t)| \le \frac{h}{2}, \quad t\in(0,\rho], \qquad (17)$$

и поэтому $\|y_1 - y_2\| \le h/2$ или $\|T_Gv_1 - T_Gv_2\| \le \|v_1 - v_2\|/2$.

Проведенные рассуждения не зависят ни от выбора функций $v_i \in \mathcal{V}$, $i \in \{1, 2\}$, ни от выбора точки $G \in H$. Значит, каждый из операторов $T_G \in \mathbb{T}$ является сжимающим, что и требовалось доказать.

Докажем, что оператор T — сжимающий. Рассмотрим любые фиксированные функции $v_i \in \mathcal{V}$, $i \in \{1, 2\}$, и обозначим $Tv_i = y_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Пусть $\| v_1 - v_2 \| = h$, $h > 0$. Если $v_1 = v_2$, то и $y_1 = y_2$. Рассмотрим те же уравнения (14), кривую Φ_3, область $\mathcal{D}_5$, вспомогательную функцию $A_3 : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ и ее производную $a_3 : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ в силу уравнения (14) при $i = 1$, что и при рассмотрении оператора T_G. Те же вычисления, что и проведенные нами ранее при рассмотрении оператора T_G, показывают, что если $|y - ct\alpha(t)| \le M\alpha^4(t)$, $t \in (0, \rho]$, то $a_3(t, y) < 0$ при $(t, y) \in \Phi_3$. Это означает, что все точки той части Φ_3, которая расположена внутри или на Φ_1, являются точками строгого выхода для $\mathcal{D}_5$ по отношению к уравнению (14) при $i = 1$ [7, с. 758].

Поскольку $y_i \in \mathcal{V}$, $i \in \{1, 2\}$, то

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le 2M\alpha^4(t) < \gamma h \alpha^3(t)\left(-\log\frac{\alpha^3(t)}{t}\right),$$

если $t \in (0, t(h)]$, где $t(h) \in (0, \rho]$ — достаточно мало. Значит, если $t \in (0, t(h)]$, то интегральная кривая $\mathcal{J} : (t, y_1(t))$ уравнения (14), $i = 1$, лежит в $\mathcal{D}_5$. На основании изложенного выше если t возрастает от $t = t(h)$ до $t = \rho$, то интегральная кривая $\mathcal{J}$ не может иметь общих точек с Φ_3 и поэтому остается в $\mathcal{D}_5$ при всех $t \in (0, \rho]$. Получив теперь, как и ранее, оценки (15), (16), мы снова приходим к (17), откуда следует, что $\| y_1 - y_2 \| < h/2$ или $\| Tv_1 - Tv_2 \| \le \| v_1 - v_2 \| / 2$.

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $v_i \in \mathcal{V}$, $i \in \{1, 2\}$. Значит, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ — сжимающий оператор, что и требовалось доказать. Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно применить к каждому из операторов T, $T_G \in \mathbb{T}$ принцип Банаха сжатых отображений и переформулировать полученные результаты для задачи Коши (1), (2), полагая $x = y/t$.

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
2. *Андреев А. Ф.* Усиление теоремы единственности O-кривой в N_2 // Докл. АН СССР. – 1962. – **146**, № 1. – С. 9 – 10.
3. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
4. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.
5. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Труды Моск. мат. о-ва. – 1959. – **8**. – С. 155 – 198.
6. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения. – 1971. – **7**, № 9. – С. 1575 – 1580.
7. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Там же. – 1992. – **28**, № 2. – С. 756 – 760.
8. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. – 1959. – № 48. – P. 97 – 102.
9. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – **179**, № 2. – P. 317 – 326.

Получено 25.08.99,
после доработки — 21.02.2001