УДК 519.61

А. М. Гомилко (Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев),
В. Ф. Ковальчук (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

We find asymptotic formulas for bounded solutions x_k of an infinite system of linear algebraic equations that appear when investigating axially symmetric problem in the theory of potential for exterior of two spheres with equal radii depending on a parameter which characterizes the approach of spheres and also for $k \to \infty$.

Знайдено асимптотичні формули для обмежених розв'язків x_k нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникає при дослідженні осесиметричної задачі теорії потенціалу для зовнішності двох сфер однакового радіуса, в залежності від параметра, що характеризує зближення сфер, а також при $k \to \infty$.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$x_k - \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\,\alpha^{n+k+1} x_n = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\delta \in [-1, 1]$ и $\alpha \in (0, 1/2)$ — вещественные параметры. Такого рода системы возникают при построении решений осесимметричных граничных задач для уравнения Лапласа во внешности двух сфер одинакового радиуса [1, 2]. На основании равенств [3, с. 710]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\,\alpha^{n+k+1} = (\alpha/(1-\alpha))^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

и неравенств $0 < \alpha(1-\alpha)^{-1} < 1$, $|\delta| \le 1$ заключаем, что система (1) является вполне регулярной [4] (гл. 1). Таким образом, для любой ограниченной последовательности $f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$ система уравнений (1) имеет единственное решение $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$ и это решение представляется рядом Неймана

$$x_k := \sum_{j=0}^{\infty} x_k^{(j)}, \quad x_k^{(j+1)} = \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!}\,\alpha^{n+k+1} x_k^{(j)}, \quad x_k^{(0)} = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

В данной статье исследуется вопрос об асимптотическом поведении ограниченного решения системы (1) при $\alpha \to 1/2$. Для задачи о расчете электростатического поля в пространстве, содержащем два сферических проводника одинакового радиуса r_0, центры которых расположены на расстоянии $2a$, $\alpha = r_0/(2a)$ и соотношение $\alpha \to 1/2$ означает, что проводящие сферы неограниченно сближаются. Второй вопрос, рассмотренный в статье, связан с изучением асимптотического поведения решения $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ системы (1) при $k \to \infty$. Полученные асимптотики относятся к специальному случаю правой части системы, когда $f_k = \delta_{0k}$ (δ_{mk} — символ Кронекера). При этом выводы об асимптотическом поведении решений для общих правых частей могут быть сделаны на основании рекуррентных формул, связывающих решения системы при правых частях $f_k = \delta_{mk}$ для $m = 0, 1, \ldots$ Такие формулы были получены в [5] для значения $\delta = 1$, а в данной статье показано, что они имеют место и для произвольного значения параметра $\delta \in [-1, 1]$.

Далее считаем, что все встречающиеся последовательности занумерованы значениями индекса от нуля до бесконечности, а в выражении $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ будем опускать индексы и писать $\{x_k\}$.

2. Решение системы уравнений (1). Рекуррентные формулы. Введем обозначение $\nu = \alpha^{-1} \in (2, \infty)$. Определим в пространстве ограниченных последовательностей l_∞ линейные ограниченные функционалы A_k и оператор A:

$$A_k x = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad Ax = y,$$

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \alpha^{n+k+1} x_n, \quad x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}. \tag{4}$$

Для значений индекса $m = 0, 1, \ldots$ обозначим через $x(m) = \{x_k(m)\} \in l_\infty$ решение системы уравнений (1) в случае правой части $f_k = \delta_{km}$:

$$x_k(m) - \delta A_k\{x_n(m)\} = \delta_{km}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

В работе [5] при значении параметра $\delta = 1$ получены рекуррентные формулы, связывающие между собой решения $x(m)$. Эти формулы имеют вид

$$m x_k(m) = k x_{k-1}(m-1) + \nu(m-1-k) x_k(m-1) +$$
$$+ (k+1) x_{k+1}(m-1) - (m-1) x_k(m-2), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

причем считается, что $x_k(-1) = 0$ и $x_{-1}(j) = 0$. При выводе этих формул в [5], следуя общей идее работы [2], исследовались аналитические продолжения функций

$$\Phi_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(j) z^n, \quad |z| < 1, \quad j = 0, 1, \ldots$$

С другой стороны, имея в распоряжении формулы (6), можно непосредственно проверить, что они остаются справедливыми и в случае произвольного значения параметра $\delta \in [-1, 1]$.

Лемма 1. *Решения* $x(j)$ *системы уравнений* (1) *связаны между собой рекуррентными соотношениями* (6).

Доказательство. Непосредственно из определения функционалов A_k имеем равенства

$$A_k\{n x_{n-1}\} = (k+1) A_{k+1}\{x_n\}, \quad x_{-1} = 0,$$

$$A_k\{\nu(m-n) x_n\} = \nu m A_{k+1}\{x_n\} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n-1)!\,k!} \alpha^{n+k} x_n,$$

$$A_k\{(n+1) x_{n+1}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} n \alpha^{n+k} x_n.$$

Если обозначить через $y_k(m)$ правую часть соотношений (6), то получим

$$A_k\{y_n(m)\} = (k+1) A_{k+1}\{x_n(m-1)\} + \nu(m-1) A_k\{x_n(m-1)\} -$$
$$- (m-1) A_k\{x_n(m-2)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+k-1)! - (n+k)!}{(n-1)!\,k!} \alpha^{n+k} x_n(m-1).$$

При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+k-1)! - (n+k)!}{(n-1)!\,k!} \alpha^{n+k} x_n = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} \alpha^{n+k} x_n -$$

$$- \nu k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \alpha^{n+k+1} x_n(m-1) = -k\alpha^k x_0 + kA_{k-1}\{x_n\} +$$
$$+ \nu k \alpha^{k+1} x_0 - \nu k A_k\{x_n\} = kA_{k-1}\{x_n\} - \nu k A_k\{x_n\},$$

и, таким образом, справедливы соотношения

$$A_k\{y_n(m)\} = kA_{k-1}\{x_n(m-1)\} + \nu(m-1-k)A_k\{x_n(m-1)\} +$$
$$+ (k+1)A_{k+1}\{x_n(m-1)\} - (m-1)A_k\{x_n(m-2)\}.$$

Используя здесь равенства (5), получаем

$$\delta A_k\{y_n(m)\} = kx_{k-1}(m-1) - k\delta_{k-1\,m-1} + \nu(m-1-k)x_k(m-1) -$$
$$- \nu(m-1-k)\delta_{k\,m-1} + (k+1)x_{k+1}(m-1) - (k+1)\delta_{k+1\,m-1} -$$
$$- (m-1)x_k(m-2) + (m-1)\delta_{k\,m-2} = y_k(m) + m\delta_{km}.$$

Таким образом, имеем

$$y_k(m) - \delta A_k\{y_n(m)\} = m\delta_{km}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

и, в силу единственности решения системы (1) в пространстве l_∞, заключаем, что $\{y_k(m)\} = \{mx_k(m)\}$, $m = 1, 2, \ldots$ Лемма доказана.

Введем в рассмотрение дробно-линейное преобразование T:

$$Tz = (\nu - z)^{-1}, \quad z \in C.$$

Решение уравнения $Tz = z$ показывает, что точки

$$\beta = \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4}}{2} \in (0, 1), \quad \beta^{-1} = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 4}}{2} \in (1, \infty)$$

являются неподвижными точками преобразования T. Согласно формулам (2), для значений функционалов A_k на последовательности $\{z^{n+1}\} \in l_\infty$, где $z \in [-1, 1]$, имеем равенства

$$A_k\{z^{n+1}\} = z(Tz)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

Эти равенства позволяют получить для решения $x(0)$, определенного формулами (3), простое выражение в виде одинарного ряда. А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Решение* $\{x_k(0)\}$ *системы уравнений* (1) *имеет вид*

$$x_k(0) = \delta_{k0} + (1-\beta^2)\beta^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\beta^{2n})^k}{(1-\beta^{2n+2})^{k+1}} (\delta\beta)^n, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Доказательство. Используя равенства (2), (3) и обозначения (4), получаем следующие выражения для первых двух слагаемых $\{x_k^{(j)}(0)\}$ ряда Неймана (3), представляющего решение $x(0)$:

$$x_k^{(0)}(0) = \delta_{k0}, \quad x_k^{(1)}(0) = \delta A_k\{\delta_{n0}\} = \delta\alpha^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Далее, если последовательность $\{x_n^{(j)}\} \in l_\infty$ имеет вид $x_n^{(j)} = c_j z_j^{n+1}$ с некоторыми постоянными c_j и $z_j \in (-1, 1)$, то на основании (7) имеем

$$x_k^{(j+1)} \equiv A_k\{c_j z_j^{n+1}\} = \delta c_j z_j (Tz_j)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Из выражений (3), (9), (10) следует, что решение $x(0) = \{x_k(0)\}$ можно представить в виде

$$x_k(0) = \delta_{k0} + \delta\alpha^{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1}\alpha(T^n\alpha)^{k+1}\left(\prod_{s=0}^{n-1}(T^s\alpha)\right). \tag{11}$$

Рассмотрим числовую последовательность $q_{s+1} = Tq_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, $q_0 = \alpha$. Поскольку $\alpha = \beta/(\beta^2+1)$, то

$$q_1 = \frac{\beta}{\beta^2+1} = \frac{\beta(1-\beta^2)}{1-\beta^4}, \quad q_2 = \frac{1}{\beta+\beta^{-1}-q_1} = \frac{\beta(1-\beta^4)}{1-\beta^6},$$

а тогда по индукции нетрудно доказать, что

$$q_s = \frac{\beta(1-\beta^{2s})}{1-\beta^{2s+2}}, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad \prod_{s=1}^{n-1} q_s = \frac{\beta^n(1-\beta^2)}{1-\beta^{2n+2}}, \quad n \geq 1. \tag{12}$$

Тогда, согласно (11), (12), имеем выражения

$$x_k(0) = \delta_{k0} + \delta q_0^{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1}\left(\prod_{s=1}^{n-1} q_s\right) q_j^{k+1} =$$

$$= \delta_{k0} + (1-\beta^2)\beta^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\beta^{2n})^k}{(1-\beta^{2n+2})^{k+1}} (\delta\beta)^n, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Лемма доказана.

Преобразуем полученные выражения (8) к интегральному виду, удобному для исследования асимптотических свойств решения. Введем в рассмотрение числа

$$\zeta = -\ln\beta, \quad \xi = \pi/(2\zeta), \quad \eta = \ln|\delta|/\ln\beta.$$

Пусть в комплексной плоскости проведен разрез вдоль отрицательной полуоси $z \in (-\infty, 0]$. Определим мероморфные в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функции $U^{(j)}(z) = U^{(j)}_{\beta,\eta}(z)$:

$$U^{(1)}(z) = \frac{1}{z^{(1+\eta)/2}\sinh(i\xi\ln z)}, \quad U^{(2)}(z) = \frac{\coth(i\xi\ln z)}{z^{(1+\eta)/2}},$$

причем считаем, что $\ln 1 = 0$ и $1^{(1+\eta)/2} = 1$. Функции $U^{(j)}(z)$, $j = 1, 2$, при $\operatorname{Re} z > 0$ имеют простые полюсы в точках $z_n = \beta^{-2n}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, с вычетами

$$\operatorname{res}_{z=\beta^{-2n}} U^{(1)}(z) = (-1)^n \frac{|\delta|^n}{i\xi\beta^n}, \quad \operatorname{res}_{z=\beta^{-2n}} U^{(2)}(z) = \frac{|\delta|^n}{i\xi\beta^n}. \tag{13}$$

На основании (13) получаем следующие выражения для вычетов:

$$\operatorname{res}_{z=\beta^{-2n}} U^{(j)}(z) \frac{(1-z)^k}{(\beta^2-z)^{k+1}} = \frac{i((-1)^j|\delta|\beta)^n(1-\beta^{2n})^k}{\xi(1-\beta^{2n+2})^{k+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$\operatorname{res}_{z=1} U^{(j)}(z) \frac{(1-z)^k}{(\beta^2-z)^{k+1}} = \frac{i}{\xi(1-\beta^2)}\delta_{k0}, \tag{15}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда для любого $\mu \in (\beta^2, 1)$, используя теорему о вычетах, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} U^{(j)}(z)\frac{(1-z)^k}{(\beta^2-z)^{k+1}}\,dz =$$

$$= \frac{\delta_{k0}}{\xi(1-\beta^2)} + \frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\beta^{2n})^k}{(1-\beta^{2n+2})^{k+1}}((-1)^j|\delta|\beta)^n,$$

и, значит, для последовательности $x_k(0)$ имеем интегральные представления

$$x_k(0) = c(\beta)\beta^k \int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} U^{(1)}_{\beta,\eta}(z) \frac{(1-z)^k}{(\beta^2-z)^{k+1}}\,dz, \quad k=0,1,\ldots, \quad \delta \in [-1,0), \quad (16)$$

$$x_k(0) = c(\beta)\beta^k \int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} U^{(2)}_{\beta,\eta}(z) \frac{(1-z)^k}{(\beta^2-z)^{k+1}}\,dz, \quad k=0,1,\ldots, \quad \delta \in (0,1], \quad (17)$$

с постоянной $c(\beta) = (1-\beta^2)/(4\zeta)$. Отметим, что в формулах (16), (17) при $k \geq 1$ число μ можно выбрать из интервала (β^2, β^{-2}), в частности допускается значение $\mu = 1$.

3. Асимптотика решений системы (1) при $\alpha \to 1/2$. Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении решения $x(0) = x(0;\beta)$ системы уравнений (1) при $\beta = (1-\sqrt{1-4\alpha^2})/(2\alpha) \to 1$, т. е. когда параметр $\alpha \to 1/2$. Если значение $\delta \in (-1, 1)$, то, исходя из равенств

$$\lim_{\beta\to 1} (1-\beta^2) \frac{(1-\beta^{2n})^k}{(1-\beta^{2n+2})^{k+1}} = \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k,$$

непосредственно из (8) при $\beta \to 1$ получаем выражения

$$\lim_{\beta\to 1} x_k(0) = \delta_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{\delta^n}{n+1} \quad k = 0, 1, 2\ldots \quad (18)$$

При этом сходимость является равномерной по k, и предельная последовательность представляет собой решение системы (1) для правой части $f_k = \delta_{k0}$ и соответствующего значения параметра $\delta \in (-1, 1)$.

Более интересным и важным, с точки зрения приложений, является случай, когда значение параметра $\delta = \pm 1$. При $\delta = -1$ результат (18) остается справедливым, однако требует специального доказательства.

Теорема 1. *Для значения параметра* $\delta = -1$ *решение* $x(0) = x(0;\beta)$ *системы уравнений* (1) *имеет покоординатный предел при* $\beta \to 1$:

$$\lim_{\beta\to 1} x_k(0) = \delta_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2\ldots \quad (19)$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное представление (16) решения $x(0)$ системы (1) в случае $\delta = -1$. Положим $\mu = \beta \in (\beta^2, 1)$ и выполним в (16) замену переменной интегрирования

$$t = \zeta^{-1} \ln z = \zeta^{-1} \{\ln(\beta^2 + s^2)^{1/2} + i \arg(\beta + is)\}, \quad s \in R, \quad (20)$$

так что $\lim_{s\to\pm\infty} |t(s)| = \infty$. Тогда получим

$$\frac{x_k(0)}{(c(\beta)\beta^k)} = G_k(\beta), \quad G_k(\beta) = \zeta \int_\gamma \frac{(1-e^{\zeta t})^k}{(e^{-2\zeta} - e^{\zeta t})^{k+1}} \frac{e^{\zeta t/2}}{\sinh(\pi i t/2)}\,dt. \quad (21)$$

При этом контур γ симметрично расположен относительно действительной оси, которую он пересекает в единственной точке $t = -1$, и находится в полуполосе $\operatorname{Re} t \geq -1$, $|\operatorname{Im} t| < \pi/(2\zeta)$. Подынтегральная функция в (21) является мероморфной и имеет полюсы в точках $t = 2k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, и $t = -2 + 2\pi i n/\zeta$, $n = 0, \pm 1, \ldots$

Таким образом, используя лемму Жордана [6], можем деформировать контур γ, не меняя значения интеграла $G_k(\beta)$, к оси $\operatorname{Re} t = -1$. Тогда, полагая $t = -1 + is$, после простых преобразований получаем

$$G_k(\beta) = -\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\zeta} - e^{i\zeta s})^k}{(e^{-\zeta} - e^{i\zeta s})^{k+1}} \frac{e^{\zeta(1+is)/2}}{\cosh(\pi s/2)} ds. \tag{22}$$

В формуле (22) можно перейти к пределу по $\zeta \to 0$, если воспользоваться соотношением

$$\lim_{\zeta\to 0} \frac{\zeta(e^{\zeta} - e^{i\zeta s})^k}{\zeta(e^{-\zeta} - e^{i\zeta s})^{k+1}} = \frac{i}{s-i}\left(\frac{s+i}{s-i}\right)^k. \tag{23}$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\beta\to 1} G_k(\beta) = \lim_{\zeta\to 0} G_k(\beta) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s+i)^k}{(s-i)^{k+1}} \frac{ds}{\cosh(\pi s/2)}. \tag{24}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться в интеграле (24) формулой Коши о вычетах, замыкая действительную ось через нижнюю полуплоскость и вычисляя вычеты в точках $s = i(1-2n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Кроме того, возвращаясь к выражениям (21), следует учесть соотношение $\lim_{\beta\to 1} c(\beta) = 1/2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для решений* $x(0) = x(0;\beta)$ *системы уравнений* (1) *при значении параметра* $\delta = 1$ *справедливы асимптотические формулы*

$$x_k(0) = -\ln\varepsilon + O(1), \quad \varepsilon = 1-\beta \to 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Использовав равенства (17) при $\delta = 1$ и $\mu = \beta$, представим $x_k(0)$ в виде

$$x_k(0) = 2c(\beta)\beta^k \operatorname{Re}\{G_{1,k}(\beta) + G_{2,k}(\beta)\}, \quad \beta \in (0,1), \tag{25}$$

где

$$G_{1,k}(\beta) = \int_{\beta}^{\beta+i\infty} \frac{z^{1/2}(1-z)^k}{(\beta^2 - z)^{k+1}} [1 + \coth(i\xi/2\ln z)] dz,$$

$$G_{2,k}(\beta) = -\int_{\beta}^{\beta+i\infty} \frac{z^{1/2}(1-z)^k}{(\beta^2 - z)^{k+1}} dz.$$

Преобразуем интеграл $G_{1,k}(\beta)$, а именно, выполним замену переменной (20), с тем отличием, что теперь $s \ge 0$. Тогда получаем выражение

$$G_{1,k}(\beta) = \zeta \int_{\gamma+} \frac{(1 - e^{\zeta t})^k}{(e^{-2\zeta} - e^{\zeta t})^{k+1}} [1 + \coth(\pi i t/2)] e^{\zeta t/2} dt,$$

где γ_+ является частью контура γ, которая расположена в полуплоскости $\operatorname{Im} t \ge 0$ и начинается в точке $t = -1$. Деформируя контур γ до полуоси $\operatorname{Re} t = -1$, $\operatorname{Im} t \ge 0$ и полагая $t = -1 + is$, $s \ge 0$, получаем

$$G_{1,k}(\beta) = i\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\zeta} - e^{i\zeta s})^k}{(e^{-\zeta} - e^{i\zeta s})^{k+1}} [1 - \tanh(\pi s/2)] e^{\zeta(1+is)/2} ds,$$

а переходя здесь к пределу $\zeta \to 0$ и используя (23), заключаем, что

$$\lim_{\beta\to 1} G_{1,k}(\beta) = \lim_{\zeta\to 0} G_{1,k}(\beta) = -\int_0^{\infty} \frac{(s+i)^k}{(s-i)^{k+1}} [1 - \tanh(\pi s/2)] ds. \tag{26}$$

Рассмотрим интеграл $G_{2,k}(\beta)$. Здесь выполним замену переменной

$$t = \frac{z-\beta}{z-\beta^2}, \qquad z = \frac{\beta(1-\beta t)}{1-t}.$$

При этом полуось $z = \beta + is$, $s > 0$, преобразуется в дугу окружности, лежащую в нижней полуплоскости и соединяющую точки $t = 0$ и $t = 1$. Деформируя эту дугу в отрезок $t \in [0, 1]$, получаем выражение

$$G_{2,k}(\beta) = \frac{(1+\beta)^k}{\beta^{k+1/2}} \int_0^1 \frac{(t-1/(\beta+1))^k}{\sqrt{(1-t)(1-\beta t)}}\, dt.$$

Тогда, используя асимптотику полного эллиптического интеграла первого рода [7]

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\ln(1-k^2)^{1/2} + O(1), \qquad k \to 1,$$

получаем соотношение

$$G_{2,k}(\beta) = \frac{1}{\beta^{1/2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-\beta t)}} + O(1) = \frac{2}{\beta^{1/2}} K(\beta^{1/2}) + O(1) =$$
$$= -\ln\varepsilon + O(1), \qquad \varepsilon = 1-\beta \to 0.$$

Отсюда и из (25), (26) получаем утверждение теоремы.

4. Асимптотика решений системы (1) при $k \to \infty$. Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении решения $x(0) = \{x_k(0)\}$ при $k \to \infty$. При этом считаем, что параметры $\delta \in [-1, 1]$, $\delta \neq 0$, и $\alpha \in (0, 1/2)$. Далее понадобится следующая простая лемма.

Лемма 3. *Пусть b — вещественная и a, l, q — положительные постоянные, а p_n — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая оценкам*

$$|p_n| \leq c_0 n^l e^{-\pi a n/2}, \qquad c_0 > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть функция

$$F(s) = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\Gamma(s+1+r_n)}, \qquad r_n = q + i(b-an), \tag{27}$$

определена при $s > \max\{0, l-q+1/2\}$. Тогда справедливо соотношение

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{s^{r_n}} + O(s^{-1-q}), \qquad s \to \infty. \tag{28}$$

Доказательство. Будем пользоваться обозначением $k(s) = [s]$ — целая часть числа s. Согласно формуле Стирлинга [8, с. 24], имеем равномерную по $n = 1, 2, \ldots$ асимптотику

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1+r_n)} = e^{\omega(n,s)}(1 + O(s^{-1})), \qquad s \to \infty, \tag{29}$$

$$\omega(n, s) = r_n + (s+1/2)\ln(s+1) - (s+1/2+r_n)\ln(s+1+r_n).$$

В частности, при $n \geq s \geq l + 3/2$ для любого $t > 0$ выполняется оценка

$$|e^{\omega(n,s)}| \leq c_t n^{-l-2} s^{-t} e^{\pi a n/2}, \tag{30}$$

а при $n \leq k(s)$ имеем

$$|e^{\omega(n,s)}| \le cs^{-q}e^{ran}, \quad r = \arctan(|b|+a) \le \pi/2. \tag{31}$$

Используя условия леммы и неравенства (30), взятые для $t = q+1$, при $s \ge \ge l+3/2$ имеем

$$\sum_{n=k(s)}^{\infty} |p_n| \left(|e^{\omega(n,s)}| + |s^{-r_n}| \right) \le cs^{-q-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + cs^{-q} \sum_{n=k(s)}^{\infty} n^l e^{-\pi a n/2} \le cs^{-q-1},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от s. С другой стороны, на основании (31) получаем неравенство

$$\sum_{n=1}^{k(s)} |p_n||e^{\omega(n,s)}| \le cs^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} n^l e^{-(\pi/2-s)an} \le cs^{-q}, \quad s \ge 1.$$

Таким образом, для доказательства утверждения (28) достаточно показать справедливость соотношения

$$R(s) \equiv \sum_{n=1}^{k(s)} n^l e^{-\pi a n/2} |s^{r_n} e^{\omega(n,s)} - 1| = O(s^{-1}), \quad s \to \infty. \tag{32}$$

Используя простую оценку $|e^z - 1| \le |z|e^{|\mathrm{Re}\, z|}$ и оценку (31), имеем

$$R(s) \le c \sum_{n=1}^{k(s)} n^l e^{-(\pi/2-r)an} |\omega(n,s) + r_n \ln s|. \tag{33}$$

Далее, на основании неравенств $|\ln(1+z)| \le |z|$, $|\ln(1+z) - z| \le 3/2|z|^2$, справедливых при $\mathrm{Re}\, z \ge 0$, получаем

$$|\omega(n,s) + r_n \ln s| \le |r_n||\ln(1+(1+r_n)s^{-1})| + |r_n| \left| 1 - \frac{s+1/2}{s+1} \right| +$$

$$+ (s+1/2) \left| \ln\left(1 + \frac{r_n}{s+1}\right) - \frac{r_n}{s+1} \right| \le c(n+1)^2 s^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s \ge 1.$$

Тогда из (33) выводим соотношение (32). Лемма доказана.

Теорема 3. *Решение* $\{x_k(0)\}$ *системы уравнений* (1) *для значения параметра* $\delta \in [-1, 0)$ *при* $k \to \infty$ *имеет асимптотическое представление*

$$x_k(0) = -\frac{(1-\beta^2)^{1/2-\eta/2}}{\ln\beta} \frac{\beta^k}{k^{1/2+\eta/2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\Gamma(1/2+\eta/2 - ia(n-1/2)) \left((1-\beta^2)k\right)^{ia(n-1/2)} \right] + O(k^{-1}) \right\}. \tag{34}$$

В случае $\delta \in (0, 1]$ *асимптотическая формула для решения* $x_k(0)$ *при* $k \to \to \infty$ *имеет вид*

$$x_k(0) = -\frac{(1-\beta^2)^{1/2-\eta/2}}{\ln\beta} \frac{\beta^k}{k^{1/2+\eta/2}} \left\{ \frac{\Gamma(1/2+\eta/2)}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\Gamma(1/2+\eta/2 - ian) \left((1-\beta^2)k\right)^{ian} \right] + O(k^{-1}) \right\}. \tag{35}$$

В выражениях (34), (35) *число* $a = 2\xi = -\pi/\ln\beta$.

Доказательство. Проведем доказательство лишь формулы (35), т. е. когда параметр $\delta \in (0, 1]$. Асимптотическая формула (34) может быть получена аналогичным образом. При $k \geq 1$, полагая в (17) число $\mu = 1$, получаем

$$x_k(0) = 2c(\beta)\beta^k \operatorname{Re} z_k, \tag{36}$$

где последовательность

$$z_k = \int_1^{1+i\infty} U_{\beta,\eta}^{(2)}(z) \frac{(1-z)^k}{(\beta^2 - z)^{k+1}} dz, \quad \delta \in (0, 1]. \tag{37}$$

Используя разложение

$$\tanh(i\xi \ln z) = -\frac{1+z^{ia}}{1-z^{ia}} = -1-2\sum_{n=1}^{\infty} z^{ian}, \quad z = 1+is, \quad a = -\pi/\ln\beta, \quad s > 0,$$

на основании оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| t^{ian} \right| \leq e^{-a \arctan s}\left(1 - e^{-a \arctan s}\right)^{-1} \leq \frac{s+1}{as}, \quad s > 0,$$

и теоремы Фубини, из (37) получаем

$$z_k = z_{0,k} + 2\sum_{n=1}^{\infty} z_{n,k}, \quad z_{n,k} = \int_1^{1+i\infty} \frac{z^{ian}}{z^{(1+\eta)/2}} \frac{(z-1)^k}{(z-\beta^2)^{k+1}} dz. \tag{38}$$

Далее, для величин $z_{n,k}$ имеем представление

$$z_{n,k} = z_{n,k}^{(0)} + z_{n,k}^{(1)}, \quad z_{n,k}^{(0)} = \int_1^{1+i\infty} (z-\beta^2)^{ian-\eta/2-1/2} \frac{(z-1)^k}{(z-\beta^2)^{k+1}} dz,$$

$$z_{n,k}^{(1)} = \int_1^{1+i\infty} f_n(z) \frac{(z-1)^k}{(z-\beta^2)^{k+1}} dz, \quad f_n(z) = \frac{z^{ian}}{z^{(1+\eta)/2}} - \frac{(z-\beta^2)^{ian}}{(z-\beta^2)^{(1+\eta)/2}}. \tag{39}$$

На основании теоремы Коши контур интегрирования в определении $z_{n,k}^{(0)}$ можно свести к полуоси $z \geq 1$. Тогда, выполняя в полученном интеграле замену переменной $(z-1)/(z-\beta^2) = t-1$ и используя [8, с. 24], получаем выражения

$$z_{n,k}^{(0)} = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2-\eta/2+ian} \int_0^1 t^{-ian+\eta/2-1/2}(1-t)^k dt =$$

$$= \left(1-\beta^2\right)^{-1/2-\eta/2+ian} \frac{\Gamma(1/2+\eta/2-ian)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2+\eta/2-ian)}. \tag{40}$$

Установим оценки для величин $z_{n,k}^{(1)}$. Для функции $f_n(z)$ и ее производных при $z = 1+is$, $s > 0$, верны неравенства

$$\left| f_n^{(m)}(z) \right| \leq c_m (n+1)^{m+2} \left| z \right|^{-3/2-\eta/2-m} e^{-an \arctan s}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Тогда, используя соотношение

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z-1}{z-\beta^2}\right)^{k+1} = \frac{(1-\beta^2)(k+1)}{(1-\beta^2)^2}\left(\frac{z-1}{z-\beta^2}\right)^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

и интегрируя по частям в интеграле, представляющем $z_{n,k}^{(1)}$, получаем равенства

$$z_{n,k}^{(1)} = -\frac{(1-\beta^2)^{-1}}{(k+1)} \int_1^{1+i\infty} \left[f_n(z) + (z-\beta^2) f_n'(z)\right] \frac{(z-1)^{k+1}}{(z-\beta^2)^{k+1}} dz.$$

Из этих равенств вытекают оценки

$$\left|z_{n,k}^{(1)}\right| \le c(n+1)^3 k^{-1} \int\limits_1^{1+i\infty} |z|^{-3/2} \left|\frac{z-1}{z-\beta^2}\right|^{k+1} e^{-ans/(s+1)} |dz|$$

с некоторой постоянной $c>0$, не зависящей от n и k. Учитывая здесь неравенство $|z-1| \le |z-\beta^2|$, где $z=1+is$, $s>0$, при $k \ge 3$ получаем оценку

$$\frac{k}{(n+1)^3}\left|z_{n,k}^{(1)}\right| \le c\int\limits_0^1 \left(\frac{s}{s+1}\right)^{k+1} (s+1)^{-3/2} e^{-ans/(s+1)} ds +$$

$$+\, ce^{-an/2} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{s}{s+1}\right)^{k+1} (s+1)^{-3/2} ds \le$$

$$\le \frac{c}{2^k}\int\limits_0^1 s^4 e^{-ans/2} ds + e^{-an/2}\frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+5/2)} \le c(n+1)^{-5}k^{-1/2}. \qquad (41)$$

Таким образом, на основании (36) и (39)–(41) заключаем, что для последовательности z_k справедливо асимптотическое представление

$$z_k = \frac{\Gamma(k+1)}{(1-\beta^2)^{1/2}}\left\{\frac{\Gamma(1/2+\eta/2)}{\Gamma(k+3/2+\eta/2)} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(1-\beta^2)^{ian}\frac{\Gamma(1/2+\eta/2-ian)}{\Gamma(k+3/2+\eta/2-ian)}\right\} +$$

$$+\, O(k^{-3/2-\eta/2}), \quad k\to\infty.$$

При этом $|\Gamma(1/2+\eta/2-ian)| \le cn^{\eta/2}e^{-\pi an/2}$ и

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2+\eta/2)} = k^{-1/2-\eta/2}(1+O(k^{-1})), \quad k\to\infty$$

(см. [8]), и тогда, используя лемму 3 при $q=(1+\eta)/2$ и $b=0$, получаем соотношение (35).

Формула (34) для значения параметра $\delta\in[-1,0)$ доказывается аналогичным образом. Здесь исходим из формулы (16) и разложения

$$\frac{1}{\sinh(i\xi\ln z)} = -2\sum_{n=1}^{\infty} z^{ia(n-1/2)}, \quad z=1+is, \quad a=-\frac{\pi}{\ln\beta}, \quad s>0,$$

а на заключительном этапе используем лемму 3 при $q=(1+\eta)/2$ и $b=a/2$.

Теорема доказана.

1. *Годин Ю. А., Зильберглейт А. С.* Осесимметричная задача электростатики о диэлектрическом шаре около проводящей полуплоскости // Журн. техн. физики. – 1986. – **56**, вып. 6. – С. 1082–1090.
2. *Гомилко А. М., Диденко Ю. Ф., Ковальчук В. Ф.* Точное решение задачи пространственной теории потенциала для двух сфер. – Киев, 1988. – 40 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.44).
3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: В 3-х. т. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 800 с.
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
5. *Гомилко А. М.* Рекуррентные формулы для решений одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1328–1332.
6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. – М.: Наука, 1967. – Т. 3. – 300 с.
8. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – М.; Л.: Физматгиз, 1963. – 360 с.

Получено 01.02.2000,
после доработки — 20.11.2000