М. Л. Горбачук, А. М. Самойленко
(Ін-т математики НАН України, Київ)

МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ ОСТРОГРАДСЬКИЙ І ЙОГО РОЛЬ У РОЗВИТКУ МАТЕМАТИКИ

*Ім'я Остроградського належить
до імен, однаково дорогих
для всіх, кому близькі інтереси
науки і просвіти.*

О. Ляпунов

24 вересня минає 200 років з дня народження Михайла Васильовича Остроградського — видатного українського математика, чиї праці увійшли в золотий фонд науки, залишивши за собою глибокі сліди довготривалого впливу на розвиток математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики й механіки. Його увага завжди була зосереджена на надзвичайно важливих для того часу проблемах як теоретичного, так і практичного спрямування. Подібно до Лагранжа, у різних за своєю природою задачах він намагався відшукати принципові важелі, щоб знайти загальний підхід до їх розв'язання, і, врешті-решт, знаходив оригінальні шляхи для досягнення поставленої мети.

Дослідження М. В. Остроградського охоплюють всю гаму питань, над якими в той час працювали видатні європейські математики — Н. Абель, В. Гамільтон, К. Гаусс, О. Коші, Ж. Лагранж, П. Лаплас, Ж. Ліувілль, С. Пуассон, Ж. Фур'є, К. Якобі та ін. Тому нерідко його результати перетинаються з результатами останніх, але анітрохи не поступаються їм ні ступенем загальності розглядуваних проблем, ні строгістю й оригінальністю викладу, ні ефективністю щодо застосувань. Він був зіркою першої величини в сузір'ї цих визначних особистостей.

Щоб краще зрозуміти ціну наукової спадщини М. В. Остроградського, треба, принаймні, в загальних рисах охарактеризувати епоху, в якій формувався світогляд ученого, проходила його наукова діяльність. Вона припадає, головним чином, на першу половину 19-го століття — один з найвизначніших і найпродуктивніших в історії розвитку точного природознавства періодів. Так, на початку століття з'явились такі фундаментальні твори, як п'ятитомний „Трактат з небесної механіки" (1799–1825) Лапласа й двотомна „Аналітична механіка" (1811–1815) Лагранжа. В цих глибоких за змістом і майстерних за викладом працях було підсумовано і систематизовано результати попередників з механіки та астрономії і закладено міцні підвалини для подальших досліджень у цих розділах науки. Цілком можливо, що загальні методи, викладені в названій праці Лагранжа, найбільше вплинули на формування наукового світогляду М. В. Остроградського. В багатьох своїх роботах і лекціях він значно доповнив і узагальнив їх.

Іншим важливим моментом у розвитку математики цього періоду є відчутне розширення сфери застосувань математичного аналізу до розв'язання нових задач природознавства. Фактично до кінця 18-го століття математичної фізики, як такої, ще не існувало. Такі її складові, як математична теорія притягання, теорії пружності, поширення світла і тепла, капілярності, магнетизму, тощо, ще чекали свого розвитку. І лише в першій половині 19-го століття настає друга після Х. Гюйгенса, І. Ньютона і Г. Лейбніца фаза в розвитку точного природознавства: Коші виводить загальні рівняння світового ефіру й будує теорію світла; Лагранж, Лаплас, Лежандр, Пуассон, Гаусс, Грін створюють теорію притягання, а Фур'є — аналітичну теорію тепла; Коші, Нав'є, Пуассон закладають основи теорії пружності; Ампер, Грін, Гаусс засновують теорію магнетизму; небесна механіка збагачується глибокими дослідженнями Гаусса в теорії збурень, а класична механіка утверджує нові принципи — найменшого примусу Гаусса, стаціонарної дії Гамільтона та ін. Всі ці нові розділи математичної фізики, що виникли в кінці 18-го — першій половині 19-го століть, вимагали розширення рамок математичного аналізу. Особливо це стосувалось випадку функцій багатьох змінних і пов'язаного з ним різкого переходу від звичайних диференціальних рівнянь до рівнянь з частинними похідними.

Отже, перша половина 19-го століття, як зазначив В. А. Стеклов у своєму виступі на святкуванні 100-річного ювілею М. В. Остроградського, —„ це був щасливий час, коли ледь не кожен день збагачувався новими ідеями, новими відкриттями в галузі математичної фізики, і разом з тим, математичного аналізу. Можна, не перебільшуючи, сказати, що до ідей того часу небагато додалось, і сучасна наука приводить у більш струнку систему і розвиває ідеї великих мислителів тієї епохи, розширює сферу їх застосувань, удосконалює доведення". М. В. Остроградський був причетний майже до всіх перелічених розділів математичної фізики. Що ж до теорій тепла, пружності й притягання, так само, як і гідродинаміки, то тут його роботи за своєю значущістю не поступаються працям названих корифеїв того часу.

До нових ідей в математиці спонукали не лише потреби й запити фізики і техніки. Перша половина 19-го століття відкрила глибокі й життєдайні внутрішні джерела розвитку цієї науки. Так, в 1801 р. вийшов у світ знаменитий трактат Гаусса „Арифметичні дослідження", де теорія чисел, що протягом тисячоліття була об'єднанням не завжди навіть пов'язаних між собою окремих результатів, представлена як повноправна наука нарівні з алгеброю, геометрією і аналізом, яка своїми ідеями і конструкціями істотно впливала на їхній розвиток упродовж останніх двох століть. Разом з наступними дослідженнями Гаусса і Лагранжа, Абеля і Галуа з розв'язності алгебраїчних рівнянь згадана книга відкрила нову еру в розвитку математики — так звану „епоху арифметизації". Як стверджував Л. Кронекер, „весь подальший розвиток арифметики в її систематизованому вигляді, як і майже всього, що дала математика нашого (19-го) століття стосовно фундаментальних ідей, асоціюється з іменем Гаусса".

„Арифметичні дослідження" Гаусса і його досягнення в алгебрі та геометрії не лише збагатили математику першокласними результатами, а й вернули їй втрачену було елінську строгість. Поняття математичної строгості й вимога дотримуватись змісту, закладеного в ньому, започатковані ще стародавніми греками. Нагадаємо, що роль ідеалу „строгості" не завжди була однаковою в розвитку тієї чи іншої науки. В часи бурхливого росту її продуктивності строгість нерідко відходила на задній план, поступаючись тенденції відкриття якнайбільшої кількості фактів. Так сталось і з математичним аналізом у 18-му столітті, в період його народження і посиленого розвитку. Зліт творчої фантазії й жага відкриттів сприяли створенню такого, що було не тільки не досить обґрунтованим, але й часто-густо невірним. Взагалі 18-те століття було періодом експериментування в аналізі, коли більшість математиків не дуже дбали про обґрунтування своїх результатів. Про це свідчать хоча б такі слова Абеля: „В аналізі настільки відсутні якийсь порядок або система, що здається незрозумілим, як взагалі хтось може його вивчати. Але найгірше те, що він ніколи не викладався і не викладається з усією строгістю".

Обґрунтування математичного аналізу і стало першочерговою проблемою для початку 19-го століття. Воно почалось з робіт Гаусса, Абеля, Діріхле і систематично проводилось Коші в його лекціях з цієї дисципліни (дуже імовірно, що їх слухав М. В. Остроградський), прочитаних у Політехнічній школі і виданих згодом (1821–1828) у трьох томах. Ці книги мали виняткове значення, оскільки тут уперше математичний аналіз викладається послідовно на базі теорії границь. Коші розпочав докорінну перебудову його основ, зробивши перші кроки в сторону „арифметизації" аналізу, яка невдовзі й послужила фундаментом для досліджень Вейєрштрасса, котрий і завершив його побудову. М. В. Остроградський безпосередньо брав активну участь в розробці принципових положень аналізу функцій багатьох змінних і варіаційного числення, приділяв велику увагу теорії інтегрування алгебраїчних функцій. Цикл його робіт у цьому напрямі був, безперечно, вагомим внеском в започатковану Абелем, Гауссом і Якобі теорію алгебраїчних функцій і поряд з дослідженнями Ліувілля помітно вплинув на подальший її розвиток. Як відомо, в другій половині 19-го століття ця теорія підносилась як найвище досягнення математичного аналізу. Кожен з видатних математиків, включаючи Б. Рімана, К. Вейєрштрасса, П. Л. Чебишова, А. Пуанкаре, Ф. Клейна та ін., вважав за честь проявити себе в ній. Що ж до строгості робіт М. В. Остроградського з математичної фізики і механіки, то їх виклад не повністю задовольняє умови сьогодення, але в порівнянні з його сучасниками, що працювали в цих напрямах, це був значний крок вперед. Про це свідчать хоча б посилання на них самого Коші у названих вище книгах. Повнота і строгість результатів М.В. Остроградського цілком задовольняли великого вченого.

Наукова творчість М. В. Остроградського повнокровна, різноманітна і водночас своєрідна. Всього за 6 років перебування в Парижі — тодішньому центрі математичних досліджень — він зумів увійти в коло найрізноманітніших нових ідей і теорій, зосередитись на найважливіших проблемах, над якими працювала плеяда французьких геніїв (Лаплас, Пуассон, Коші, Фур'є та ін.), і досягти успіхів у їх розв'язанні, випереджаючи останніх в багатьох питаннях. У мемуарі „Про визначені інтеграли, взяті між уявними межами", поданому Паризькій академії в 1825 р., Коші написав про це так: „Нарешті молодий росіянин, обдарований неабиякою проникливістю і дуже вправний в аналізі нескінченно малих, мос'є Остроградський теж удався до застосування цих інтегралів і перетворення їх на звичайні, дав нове доведення формул, згаданих вище, і повідомив інші, які я наводжу ...". У своїх працях, як ми вже відзначали, Коші неодноразово посилався на нашого земляка. Він давав відзиви на його наукові роботи і був одним з численної групи французьких математиків, котрі гаряче підтримали кандидатуру М. В. Остроградського у „безсмертники" Паризької академії наук. В 1856 р. його обрали членом-кореспондентом цієї академії.

Справжній математичний дебют М. В. Остроградського відбувся 1826 р., коли він представив Паризькій академії „Мемуар про поширення хвиль у циліндричному басейні". За різних додаткових фізичних припущень проблемою поширення хвиль на поверхні важкої води займалися Ньютон, Лаплас, Лагранж, Коші, Пуассон. В 1816 р. вона була навіть висунута на здобуття премії академії. Головна заслуга М. В. Остроградського в цьому питанні полягає в тому, що він уперше розглянув цю проблему в замкненому циліндрі скінченної глибини. Присутні на доповіді Пуассон і Коші високо оцінили подані результати, після чого було ухвалено опублікувати їх в „Записках учених, сторонніх академії". То була велика честь для 25-річного М. В. Остроградського. Успіх зміцнив репутацію молодого вченого, і його було рекомендовано на місце професора в Коледжі Генріха IV. Між ним і математиками Франції, такими, як О. Коші, С. Пуассон, Ж. Штурм, Г. Ламе та ін., встановились і довго зберігались теплі стосунки.

У 1828 р. М. В. Остроградський переїхав до Петербурга. З радістю прийняли його до свого товариства математики міста. Вони вже знали про його математичні досягнення. Невдовзі він стає першим математиком Росії. Популярність його зростала з часом і супроводжувала упродовж всього життя. „Бути тобі Остроградським" — таким було побажання рідних і друзів молодим людям, яких виряджали за кордон на навчання.

Окрилений першими успіхами, М. В. Остроградський ставить перед собою грандіозне завдання — викласти за допомогою математики різні розділи математичної фізики. В одному з своїх рапортів, поданих Петербурзькій академії 1830 р., він пише: „Наступники Ньютона розвинули у всій докладності великий закон всесвітнього тяжіння і зуміли піддати математичному аналізові численні важливі питання загальної фізики й фізики невагомих речовин. Сукупність їхніх праць про систему світу складає безсмертні фоліанти „Небесної механіки", з яких астрономи ще довго черпатимуть елементи своїх таблиць. Але фізико-математичні теорії ще не об'єднані в одне ціле, вони розсіяні в багатьох зібраннях академічних мемуарів, досліджуються за допомогою різних методів, часто дуже сумнівних і недосконалих; є також теорії, що склалися, але ще ніде не опубліковані. Я поклав собі за мету об'єднати всі ці теорії, розкрити їх однорідним методом і вказати найважливіші їх застосування. Я вже зібрав необхідні матеріали про рух і рівновагу пружних тіл, про поширення хвиль на поверхні нестисливих рідин, про поширення тепла всередині твердих тіл і, зокрема, всередині земної кулі. Але ці теорії складуть лише необхідну частину всієї праці, що має охопити також розподілення електрики й магнетизму в тілах, здатних бути наелектризованими або намагніченими через електродинамічний вплив, рух електричних флюїдів, рух і рівновагу рідин, дії капілярності, розподіл тепла в рідинах і теорію ймовірностей; у цій останній я розгляну спеціально кілька пунктів, у яких відомий автор „Небесної механіки" був, очевидно, неправий".

Відверто кажучи, виконання програми зібрання всіх фізичних теорій і викладення їх єдиним методом не під силу жодній людині ні за її фізичними можливостями, ні за законами розвитку науки. Тому ні М. В. Остроградському, ні тим, хто після нього ставив перед собою подібну мету, досягнути її не вдалось. У зв'язку з цим цікаво згадати про Д. Гільберта, котрий, як справжній математик, був стурбований відсутністю порядку в тріумфальній ході фізики на початку 20-го століття і вирішив викласти фізику математично за допомогою аксіоматичного підходу (6-та проблема Гільберта). Але незважаючи на його глибоку віру у всемогутність аксіоматичного методу і його здатність вносити порядок у безладдя, Гільберт зрозумів, що однієї лише математики не досить, щоб розв'язати всі фізичні проблеми. Потративши багато зусиль і часу, аби бути в курсі новітніх фізичних досліджень, він так і не зміг здійснити свій задум щодо фізики. Ще й досі проблема створення єдиної теорії поля залишається нерозв'язаною.

І все ж слід нагадати, що на той час М. В. Остроградський уже одержав чимало вагомих результатів у розв'язанні конкретних фізичних задач, і лише подив викликає та проникливість, завдяки якій він, можливо, перший побачив, що є щось спільне між, здавалося б, дуже далекими галузями фізики, що об'єднує їх як фізично, так і математично. Таким чином, єдиного зведеного викладу тодішньої математичної фізики М. В. Остроградський не дав і не міг дати, але ціла низка пунктів його програми була успішно виконана, в результаті чого було дано вичерпні відповіді на ряд важливих питань з різних її розділів, зокрема на питання про можливість розкладу певного класу функцій за власними функціями диференціальних операторів. Теорія таких розкладів дала змогу поглянути однаково на цілий ряд відмінних з першого погляду задач математичної фізики і дати спільний підхід до їх розв'язання.

В найзагальнішій постановці проблема, про яку йдеться, була сформульована М. В. Остроградським в його доповіді на засіданні Петербурзької академії наук 5 листопада 1828 р. і опублікована у виданні академії 1831 р. французькою мовою під назвою „Note sur la theorie de la chaleur". Тим самим була ознаменована нова доба в розвитку теорії лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема спектральної теорії крайових задач для таких рівнянь. Щоб оцінити значення цієї роботи для подальшої долі математики, коротко зупинимося на історії питання.

Ідея розвинення довільної функції в тригонометричний ряд виникла ще в середині 18-го століття у зв'язку зі спробами описати розв'язки рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad t \ge 0, \qquad 0 \le x \le l < \infty. \tag{1}$$

За це завдання взялися такі видатні математики, як Ж. Даламбер, Л. Ейлер, Д. Бернуллі. Даламбер (1749) і Ейлер (1749) методом характеристик показали, що загальний розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

де φ і ψ — функції, що задовольняють деякі умови гладкості; вони визначаються заданням крайових і початкових умов. Виходячи з досліджень Б. Тейлора (1713) і власних спостережень, Д. Бернуллі (1753) дійшов висновку, що закріплена в точках 0 і l струна коливається за законом

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l} x \cos\frac{n\pi a}{l}(t-\beta_n). \tag{2}$$

Отже, саме формула (2) дає загальний вигляд розв'язку рівняння (1), що задовольняє умову

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Оскільки початкова форма струни ($t = 0$) може задаватися будь-якою функцією $f(x): f(0) = f(l) = 0$, то зображення (2) обумовлює розклад

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad x \in [0, l], \tag{4}$$

для довільної функції $f(x)$ із зазначеною властивістю. Заперечення останнього факту Даламбером і Ейлером (хоча кожен з них розумів функцію посвоєму) і відсутність у Бернуллі формул для обчислювання коефіцієнтів b_n в (4) призвели до повного забуття цього геніального відкриття на 50 з лишнім років.

Бернуллі ж був глибоко переконаний, що запропонований ним спосіб розв'язання задачі (1), (3) через розклад (2), відомий нині як принцип суперпозиції хвиль, є природнішим і простішим, ніж метод Ейлера і Даламбера. В одному з листів він писав з цього приводу: „Не для таких абстрактних питань моя теорія може бути корисною. Я більше дивуюся скарбові, що був прихований, а саме, можливості звести існуючі в природі і, як нам здається, не підпорядковані жодному законові рухи до простих ізохронних, якими природа користується в більшості своїх дій". Зауважимо, що згаданий вище метод Даламбера–Ейлера відшукання розв'язку (1), що задовольняє задану початкову умову, давав розв'язок задачі в замкненій у певному розумінні формі, проте коло задач, для яких цей метод застосовний, досить обмежене. Тому Бернуллі мав рацію, коли підкреслював широкі можливості застосування свого підходу. Це підтвердилось значно пізніше, через 50 років, коли в 1807 р. Фур'є перевідкрив принцип суперпозиції хвиль і подав до Паризької академії наук статтю про поширення тепла всередині твердого тіла.

Стрижнем роботи Фур'є є теорема про можливість зображення довільної (графічно заданої) функції $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ у вигляді

$$f(x) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5}$$

де коефіцієнти a_k і b_k ряду визначаються формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Як приклад, було розглянуто функцію $f(x)$ — ординату ламаної від абсциси x — і описано ряд, який для кожного x давав значення $f(x)$. За свідченням Рімана (див. Б. Риман, Сочинения, Москва; Ленинград, 1948, с. 230), для маститого Лагранжа це було настільки несподіваним, що він відразу ж виступив з різким запереченням цього факту. Адже він сам довго думав над обґрунтуванням зображення (5). І хоча йому не поталанило в цьому питанні, в 1779 р. він уперше висунув ідею апроксимації розв'язку лінійного рівняння з частинними похідними розв'язками скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, замінюючи неперервний розподіл мас у струні скінченною множиною матеріальних точок (так званий метод скінченних різниць).

Незважаючи на критику з боку першого математика Франції, робота Фур'є справила вражаючий ефект на весь математичний світ. Паризька академія з цього приводу оголосила математичне обґрунтування теорії поширення тепла темою, гідною великої премії 1812 р. в галузі математики. В кінці 1811 р. Фур'є подав на здобуття цієї премії свій „Memoire sur la propagation de la chaleur". Після обговорення роботи поважними математиками (Лагранжем, Лапласом, Лежандром та ін.) його було удостоєно великої нагороди. І хоча сама робота була опублікована лише в 1826 р., всі її результати увійшли в його класичну монографію „Theorie analytique de la chaleur" 1822 р. Ця книга відіграла надзвичайно велику роль не тільки в математичній фізиці. Вона поставила на порядок денний низку нових кардинальних проблем у самій математиці, які виходять далеко за її рамки, оскільки зображення (5) означає на математичній мові не що інше, як можливість співіснування хвильової і корпускулярної теорій світла, так само, як і інших наукових теорій в одночасній неперервній і дискретній їх інтерпретації. Услід за Фур'є, Лаплас і Пуассон розглянули задачі поширення тепла в сфері та циліндрі, що привело їх до розвинення довільної функції в ряд за сферичними та, відповідно, циліндричними функціями (ортогональність перших встановив Лаплас, а других — Пуассон).

Розвинення функцій в тригонометричні ряди було однією з центральних проблем математики 19-го століття. Воно спричинило виникнення таких важливих її понять, як функція, множина, інтеграл, міра, функціональний простір, різноманітні види збіжності функціональних рядів, тощо. Важко назвати математика першої половини цього століття, спеціаліста в галузі математичного аналізу або математичної фізики, роботи якого не були б пов'язані з цією проблемою. Серед великої кількості таких робіт 20–30-х років насамперед слід відзначити праці Діріхле та М. В. Остроградського. Вони виходили в світ майже в один і той же час. Якщо Діріхле для кусково-неперервних функцій на сегменті $[0, 2\pi]$ зі скінченною кількістю максимумів і мінімумів на цьому проміжку дає в них уперше строге доведення зображення (5) в розумінні поточкової збіжності ряду, то М. В. Остроградський розглядає вже задачу про розклад функції не обов'язково однієї змінної по власних функціях оператора, породженого диференціальним виразом з частинними похідними в обмеженій області та крайовою умовою на поверхні будь-якої форми. З точки зору досліджень М. В. Остроградського, Діріхле розглядає задачу розкладу в частинному випадку, коли відповідний оператор породжується виразом $l(y) = y''$ і періодичною крайовою умовою (власними функціями такого оператора якраз і є $\cos kx$ та $\sin kx$, $k = 0, 1, 2, \ldots$), тобто підтверджує гіпотезу Бернуллі – Фур'є. І якщо результати Діріхле, про які йдеться, стали класичними, а їх зразковий виклад міститься майже в кожному підручнику з математичного аналізу, то праці М. В. Остроградського стали програмними як для математичного аналізу, так і для математичної фізики. Окреслені в них ідеї й шляхи втілення їх у практику стали життєдайним джерелом для розвитку математики 19-го та 20-го століть. Щоб пересвідчитися в цьому, досить поглянути на дослідження М. В. Остроградського з теорії загальних лінійних диференціальних операторів, що містяться в двох його „Замітках до теорії тепла", поданих Петербурзькій академії наук 5 вересня 1828 р. та 8 липня 1829 р. Можливо, ця назва не повністю відбиває їхній зміст, але й вона свідчить про те, що в 20-х роках 19-го століття аналітична теорія тепла була провідною темою в математичній фізиці (найбільше це стосується Парижа, де з 1822 по 1828 р. проходила наукова діяльність М. В. Остроградського). Результати „Заміток" важливі не лише з погляду на значущість для фізики. Важко переоцінити їх загальноматематичне значення, оскільки в них, з одного боку, закладено основи для плідних теорій, які ще й тепер продовжують успішно розвиватися, а з іншого боку, одержані там твердження складають частину фундаменту сучасного математичного аналізу.

Найважливішою в цьому контексті є перша замітка. Вона поділяється на дві частини. В першій окреслюється загальна схема розв'язання крайових задач математичної фізики. Виводиться формула перетворення об'ємного інтеграла типу дивергенції в поверхневий:

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \int_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds \tag{6}$$

(S — поверхня, що обмежує об'єм V), яка є невід'ємною частиною будь-якого підручника з математичного аналізу. Виявляється, вона була доведена М. В. Остроградським так само, як це робиться і тепер, ще в лютому 1826 р. в статті „Доведення однієї теореми інтегрального числення", поданій Паризькій академії наук, а опублікована лише в 1965 р. А. П. Юшкевичем в „Историко-математических исследованиях" (вип. 16, с. 49–64).

Поява формули (6) була зумовлена потребами теорії потенціалу, теорії тепла і варіаційного числення. Перші кроки стосовно об'ємних інтегралів зробив Лагранж, котрий винайшов спосіб для їх обчислення, дав формулу заміни змінних, яка узагальнює відповідну формулу Ейлера для подвійних інтегралів. Що ж до поверхневих інтегралів, то в „Аналітичній механіці Лагранжа" (1813) є лише деякі нотатки, що стосуються конкретних випадків. Але розвиток електростатики і теорії магнетизму розширив коло задач теорії потенціалу. Вивчення ж розподілу статичної електрики по поверхні тіла привело до необхідності введення самого поняття поверхневого інтеграла. Воно з'явилося в роботі Гаусса 1813 р., пов'язаній з теорією потенціалу, а деякі теореми з цієї роботи можна розглядати як окремі випадки формули (6). Самої ж формули у Гаусса немає.

Отже, перша велика заслуга М. В. Остроградського полягає в тому, що він був першим, хто зрозумів самостійну роль формули (6) і виділив її як об'єкт загальноматематичного значення. У своїй визначній роботі з варіаційного числення 1834 р. він поширив цю формулу на випадок будь-якої кількості змінних. Її векторна інтерпретація міститься в „Трактаті з електрики і магнетизму" Максвелла, де водночас автор наголошує на пріоритеті М. В. Остроградського у відкритті формули (6).

Другий істотний результат, що також міститься в першій частині названої замітки, — це введення для лінійного диференціального оператора L довільного порядку зі сталими коефіцієнтами спряженого оператора L^* і встановлення інтегрального співвідношення між ними, назва якого в сучасній теорії рівнянь з частинними похідними — формула Гріна або, що те саме, формула інтегрування частинами. Ще довго по тому ця формула узагальнювалась багатьма математиками, і сьогодні вона є одним з китів, на якому тримається вся теорія крайових задач для диференціальних і різницевих рівнянь. Є навіть такий афоризм: „Немає теорії диференціальних рівнянь, а є формула інтегрування частинами". Залишається лише нагадати, що Грін (також в 1828 р.) навів цю формулу в роботі, в якій вивчався розподіл статичної електрики і магнетизму на поверхні опуклого тіла у конкретному випадку, коли L — оператор Лапласа. Інтегрування частинами було використане М. В. Остроградським при доведенні ортогональності власних функцій оператора L власним функціям оператора L^*, що відповідають різним власним числам.

Друга частина замітки присвячена застосуванню загальної схеми, викладеної в попередній частині, до проблем поширення тепла в твердих тілах довільної форми, а саме, до розв'язування задачі

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \Delta_x v(t,x), \qquad x \in G, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n} + hv\right|_{x\in\partial G} = 0, \tag{8}$$

$$v(0,x) = f(x), \tag{9}$$

де G — обмежена область в $\mathbb{R}^3$ з межею ∂G, $h(x)$, $f(x)$ — функції, визначені відповідно на ∂G і G. Підстановкою $v = e^{-\theta^2 t}u(x)$ з параметром θ вона зводиться до задачі знаходження розв'язків рівняння

$$\Delta u + \theta^2 u = 0, \tag{10}$$

що задовольняють крайову умову (8). М. В. Остроградський помітив, що задача

(10), (8) може мати нетривіальні розв'язки лише для дискретної множини $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ параметра θ. Ці розв'язки (власні функції) він позначає $u_i(x)$ і записує розв'язок задачі (7)–(9) у вигляді

$$v(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\theta_i^2 t} u_i(x) \frac{\int_G f(x) u_i'(x)\, d\omega}{\int_G u_i(x) u_i'(x)\, d\omega},$$

а це, в свою чергу (якщо покласти $t = 0$), обумовлює розвинення

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \frac{\int_G f(x) u_i'(x)\, d\omega}{\int_G u_i(x) u_i'(x)\, d\omega}. \tag{11}$$

Тут через $u_i'(x)$ позначено власні функції спряженої задачі.

Принциповим моментом розглядуваної роботи є висунута в ній гіпотеза про дискретність спектра задачі (10), (8) і про те, що права частина в (10) є зображенням функції $f(x)$ лише всередині області G і не збігається з нею в точках, що лежать зовні G або на межі ∂G. З цього приводу М. В. Остроградський пише: „Я думаю, що ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \frac{\int_G f(x) u_i'(x)\, d\omega}{\int_G u_i(x) u_i'(x)\, d\omega}$$

завжди збігається, але довести цю чудову властивість в загальній ситуації дуже важко". Ці слова свідчать, що їх автор прекрасно уявляв собі всю складність проблеми збіжності таких рядів. І дійсно, в ті часи багато розділів математичного аналізу ще не мали засобів, щоб не те що розв'язати цю задачу, а навіть подумати про її розв'язання.

Повною мірою слушність висунутої М. В. Остроградським гіпотези було підтверджено в 60-х роках 20-го століття.

Зображення (11) має універсальний характер, оскільки воно придатне і для несамоспряжених крайових задач, хоча М. В. Остроградський розглядав тільки самоспряжений випадок, коли, як відомо, u_i та u_i' відрізняються лише числовим множником. Зауважимо також, що якщо область G не обмежена, то у оператора, пов'язаного з крайовою задачею, може з'явитися неперервний спектр — тоді в формулі (11) треба знак суми замінити на інтеграл. М. В. Остроградський теж добре розумів це, оскільки в його фундаментальних роботах з теорії пружності 1829 і 1832 рр. розв'язок шукається у вигляді не ряду, а інтеграла Фур'є.

„Зауважу, нарешті, що величини θ_i^2, власні числа задачі (10), (8), завжди дійсні, — це наслідок закону розподілу тепла, але навіть така загальна істина повинна бути з'ясована математичним аналізом", — це висловлювання з тієї ж замітки. Воно показує, що на відміну від деяких відомих учених в галузях математичної фізики і механіки (Пуассона, Лапласа, Фур'є, Пуанкаре та ін.), які вважали, що вимоги до строгості міркувань в цих науках можуть бути послаблені, М. В. Остроградський дотримувався протилежної думки, співзвучної з думками Гаусса, Коші, Абеля. Тому, відмовившись від доведення рівності (11) в загальному випадку, він робить спробу довести її в конкретному випадку, коли оператор L породжується диференціальним виразом $\frac{d^2}{dx^2}$ і періодичною крайовою умовою, тобто довести збіжність тригонометричного ряду Фур'є. Ідея його доведення та ж сама, що у згаданій вище роботі Діріхле. Подаючи, як і Фур'є, частинну суму ряду (5) у вигляді інтеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\frac{\sin\,(n-1/2)((x-y)/2)}{\sin((x-y)/2)}dy,$$

він звертає увагу на те, що збіжність тригонометричного ряду в точці x залежить від поведінки функції $f(x)$ лише в околі цієї точки, і таким чином, приходить до відомого принципу локалізації рядів Фур'є, який пов'язують тепер з іменем Рімана, котрий чітко сформулював його в 1853 р. Отже, щоб отримати (5), залишалось акуратно здійснити граничний перехід в інтегралі Діріхле, що й було зроблено, але на формальному рівні.

В другій із „Заміток до теорії тепла" М. В. Остроградський вперше розв'язує задачу типу (7)–(9) з тією відмінністю, що в правій частині умови (8) замість нуля фігурує функція $T(t,x)$, тобто ця умова є неоднорідною. Раніше таку задачу розглядали Лаплас і Пуассон у випадку, коли $T(t,x)$ не залежить від t. Задача з неоднорідною крайовою умовою була зведена ним до варіанту з однорідною крайовою умовою, але неоднорідним рівнянням, розв'язок якого шукався у вигляді нескінченного ряду. Метод М. В. Остроградського зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної викладається в сучасних підручниках математичної фізики під назвою принципу Дюамеля. Ж. Дюамель справді розв'язав цю задачу одночасно з М. В. Остроградським, але опублікував свій результат в 1833 р., в той час, як замітка М. В. Остроградського була надрукована в „Записках Петербурзької академії наук" у 1831 р.

Варто наголосити ще на тому, що поряд з розробкою загальних методів розв'язування задач теорії поширення тепла в твердих тілах, М. В. Остроградський одержав чимало вагомих результатів, які стосуються саме конкретних ситуацій. Серед останніх відзначимо випадок призми, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник. Йому також належать цікаві дослідження стосовно поширення тепла в рідинах. Ними він значно узагальнив і вдосконалив відповідні результати Фур'є і Пуассона в цьому напрямі.

Систематичне вивчення проблеми розкладу типу (11) по власних функціях оператора, породженого диференціальним виразом

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right)+q(t),$$

де $q(t)$ і $p(t)$ — відповідно дійсна неперервна і додатна двічі диференційовна функції, і відокремленими крайовими умовами на скінченному інтервалі, було започатковане в чотирьох мемуарах Штурма і Ліувілля, опублікованих у журналі Ліувілля в 1836 р., де було доведено існування у такого оператора нескінченної послідовності власних значень, що не мають скінченних точок скупчення, і ортогональність власних функцій. Що ж до розкладу (11), то їм не вдалось його строго обґрунтувати. Це зробив лише в 1907 р. В. А. Стеклов (Харківський університет).

На початку 20-го століття обґрунтування спектрального розкладу для звичайних диференціальних операторів будь-якого порядку як на скінченному, так і на нескінченному інтервалі стає однією з першорядних проблем і привертає до себе увагу багатьох видатних математиків. Значне розширення на той час рамок математичного аналізу і сфери його впливу, народження таких його розділів, як теорія міри, функціональний аналіз, теорія узагальнених функцій, дозволили в 40–60-х роках обґрунтувати зображення (11) для широкого класу самоспряжених диференціальних операторів як звичайних, так і з частинними похідними. Істотний внесок у розв'язання цієї проблеми зробили і математики України, зокрема, М. Г. Крейн, О. Я. Повзнер, І. М. Глазман, Ю. М. Березанський, В. О. Марченко та їхні учні. Так, у 1946–1950 рр. М. Г. Крейн розробив загальний метод — метод напрямних функціоналів, за допомогою якого довів теорему про розклад по власних функціях самоспряженого звичайного диференціального оператора довільного порядку і вказав ряд її застосувань до різномагнітних задач теорії функцій і теорії диференціальних рівнянь. Ю. М. Березанському, на основі синтезу спектральної теорії операторів і теорії узагальнених функцій, вдалося значно розширити клас операторів, по власних векторах яких будується розклад (11). Цей клас включає чимало диференціальних операторів з частинними похідними і різницевих з частинними різницями. Його монографія „Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов" 1965 р., видана в Києві, в певному розумінні завершила собою коло досліджень, над якими понад 100 років працювала когорта відомих математиків. В книзі є численна бібліографія, що охоплює, головним чином, роботи, виконані в 20-му столітті, а тому, на жаль, не містить посилань на „Замітки до теорії тепла" М. В. Остроградського, якому, як вже було відмічено, належить загальна постановка проблеми розкладів. Немає посилань на цю знамениту працю і в багатьох монографіях зі спектральної теорії диференціальних операторів, виданих як в Україні, так і за її межами, хоча в деяких з них згадуються роботи Бернуллі, Штурма, Ліувілля та інших математиків 19-го століття. В. А. Стеклов був першим і, сподіваємося, не останнім, хто належним чином оцінив роль зазначеної праці в розвитку математичної науки. В своїй доповіді в Полтаві, про яку вже йшлося, він сказав: „У розглядуваному мемуарі М. В. Остроградського міститься ніби ціла програма розв'язування загального питання про охолодження будь-якого твердого тіла, обмеженого поверхнею без особливих точок і ліній (сфероїда, як його тоді називали) і водночас ставиться низка загальних задач аналізу, які вперше спробував строго розв'язати 70 років по тому відомий французький математик Пуанкаре (1894). Слід також підкреслити, що свої результати М. В. Остроградський отримував як наслідок з деяких загальних властивостей інтегралів лінійних рівнянь довільного порядку з будь-якою кількістю незалежних змінних, встановлених ним на початку мемуару".

Серед інших робіт М. В. Остроградського, які істотно вплинули на подальший розвиток теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і варіаційного числення, особливе місце належить його фундаментальній праці „Мемуар про обчислення варіації кратних інтегралів", представленій Петербурзькій академії наук 24 січня 1834 р. Мемуар відразу ж опинився в центрі уваги математиків. В 1836 р. він був перевиданий відомим журналом Крелля „Journal für die reine und angewandte Mathematik", а його переклад англійською повністю увійшов до „Історії варіаційного числення упродовж 19-го століття" Тотгентера 1861 р. Саме там були викладені результати, основоположні для інтегрального числення функцій багатьох змінних. Вони вже давно стали класичними і служать понині основним робочим інструментом в теорії рівнянь з частинними похідними. Насамперед це стосується формули (6) у випадку довільної кратності n, правила розміщення меж інтегрування по кожній змінній при переході від n-кратного до повторного інтеграла, способу знаходження похідної по параметру від багатовимірного об'ємного інтеграла зі змінною межею інтегрування, яка разом з підінтегральною функцією залежить від цього параметра. Одночасно з Якобі там були вперше введено функціональні визначники (якобіани). Розроблені основи інтегрального числення функцій багатьох змінних дали змогу М. В. Остроградському повністю розв'язати проблему обчислення варіації n-кратного інтеграла зі змінними межами інтегрування. Зауважимо, що за деяких обмежень на область інтегрування формулу першої варіації було отримано раніше: для $n = 2$ — Ейлером і для $n = 3$ — Лагранжем. Без додаткових обмежень у випадку $n = 2$ одночасно із загальним випадком Остроградського її встановив також Пуассон.

У цьому ж мемуарі М. В. Остроградський фактично показав, що задача варіаційного числення про екстремум кратного інтеграла еквівалентна знаходженню певного розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними. На цей факт, фігуруючий у Рімана під назвою принципу Діріхле, пізніше звернули увагу Гаусс, Томсон і Діріхле. Як виявилось згодом, він лежить в основі багатьох варіаційних методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь. Вагомий внесок у розвиток цих методів для різноманітних класів рівнянь зробили і математики з України — М. М. Боголюбов, М. М. Крилов, М. П. Кравчук, Н. Й. Польський, Ю. Д. Соколов та їхні послідовники.

У зв'язку з дослідженнями, що проводились українськими математиками, зокрема в Інституті математики НАН України, доцільно звернутися до роботи М. В. Остроградського „Замітка про метод послідовних наближень" 1835 р., присвяченої інтегруванню нелінійного рівняння

$$y''(t) + y(t) = \alpha y^3(t)$$

шляхом розвинення за малим параметром α. Як з'ясувалося згодом, це рівняння має відношення до вивчення процесу хитання кораблів. Значно пізніше метод малого параметра набув широкого поширення завдяки працям А. Пуанкаре, О. М. Ляпунова, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського та їхніх учнів. Таким чином, метод Остроградського виявився предтечею теорії нелінійних коливань. Це засвідчує й О. М. Крилов у своїй статті „О применении последовательных приближений к нахождению решений некоторых дифференциальных уравнений: уравнений колебательного движения" (див. „Собрание трудов А. Н. Крылова", т. 5).

Крім проаналізованих вже праць програмного характеру, де закладено основи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, у М. В. Остроградського є чимало робіт, пов'язаних з безпосереднім інтегруванням конкретних рівнянь математичної фізики і механіки. Серед них — об'ємистий (100 с.) „Мемуар про диференціальні рівняння, що відносяться до ізопериметричної задачі". Поряд з іншими важливими результатами в ньому показано, що всі диференціальні рівняння варіаційних задач (Ейлера–Лагранжа) з однією незалежною змінною можна звести до канонічних систем. Більшість підручників з теорії звичайних диференціальних рівнянь містять формулу Остроградського–Ліувілля, опубліковану М. В. Остроградським у замітці „Про лінійні диференціальні рівняння n-го порядку" 1838 р. (у випадку $n = 2$ вона належить Абелю (1827)). В роботах Ліувілля саме такої формули немає.

Завершуючи короткий огляд математичної спадщини М. В. Остроградського, вірніше тієї її частини, яка, на наш погляд, відіграла найістотнішу роль у розвитку математики, зауважимо, що вона не охоплює всього кола його інтересів. Алгебра, теорія чисел, спеціальні функції (еліптичні та сферичні), елементарна геометрія, теорія ймовірностей, обчислення визначених інтегралів — ось неповний перелік тих розділів, якими він також захоплювався і де також залишив свій, але вже не такий глибокий слід.

Чимало його робіт в цих напрямках мають методичний характер. Їх детальний аналіз можна знайти в чудовій статті Є. Я. Ремеза (Інститут математики НАН України) „Об исследованиях М. В. Остроградского в области анализа" (див. „Полное собрание трудов М. В. Остроградского", т. 3, 1961) і в доповіді М. О. Тихомандрицького з нагоди 100-річного ювілею М. В. Остроградського (див. П. І. Трипольський, „Михаил Васильевич Остроградский", Исторический вестник, 1901, декабрь, с. 1023–1061).

М. В. Остроградський увійшов в історію не лише як першокласний учений. Він був великим педагогом, чия діяльність мала вирішальне значення для піднесення рівня і ролі науки, в першу чергу математики, механіки та інженерії в Російській імперії. Навряд чи хто з учених і педагогів першої половини 19-го століття може зрівнятися з ним у цьому. Після Ейлера з його фундаментальними здобутками в російській математиці й механіці намітився деякий спад. Ніяких систематичних досліджень в цих напрямах не проводилось. Спад тривав аж до появи М. В. Остроградського. Після його приїзду до Петербурга місто стало центром математичного життя Росії. Його наукові праці, неповторні лекції, здібні учні — все свідчило про початок піднесення російської науки. М. В. Остроградський був активним пропагандистом нових фізико-математичних досягнень, творцем багатьох підручників з математики й механіки, на яких вчились цілі покоління науковців і інженерів. Важко назвати науковий заклад у Петербурзі, де б він не викладав. Величезне педагогічне навантаження відбирало багато часу від його наукової роботи. „Людина, звичайно, геніальна, — як писав про М. В. Остроградського П. Л. Чебишов, — але він не зробив і половини з того, що міг би зробити, якби його не засмоктало втомлююче „болото" постійного викладання". Проте саме це викладацьке „болото" зробило свою велику справу задля прогресу математики і фізики в Росії. Під впливом двох українців — М. В. Остроградського і В. Я. Буняковського — зароджуються перші наукові школи з цих напрямів, відгалуження яких дали світові всім відомих П. Л. Чебишова, М. Є. Жуковського, О. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, Г. Ф. Вороного, С. О. Чаплигіна та ін.

А взагалі, уважно придивившись до історії наукового і культурного життя Російської імперії, можна побачити, що біля його витоків стояло чимало „вихідців з України". Тут, насамперед, слід згадати Ф. Прокоповича, котрий розпочав реформи в освіті, Бортнянського, Березовського, Веделя — в музиці, Левицького — в живопису. Що ж до фізико-математичних наук, така честь випала на долю М. В. Остроградського і В. Я. Буняковського. Це були люди високого рівня духовної культури. Що ж до М. В. Остроградського, то він досконало володів французькою мовою, був добре обізнаний з французькою класичною літературою, не кажучи вже про російську. Але українська мова, мова його батьків, його народу, була для нього найдорожчою. Він розмовляв нею вдома і нерідко вживав українські слова під час своїх лекцій. І хоча він годинами міг читати монологи з Мольєра та Корнелія, улюбленим його поетом був Т. Г. Шевченко, майже всі вірші якого він знав напам'ять. М. В. Остроградський був одним із перших, хто глибоко зрозумів велич цієї людини та її значення для українського народу, всім серцем підтримував його палке прагнення „возвеличити рабів отих німих і на сторожі коло них поставить слово", апокаліптичне слово, „через яке все сталось і без якого нічого не сталось". Як згадував Т. Г. Шевченко, М. В. Остроградський приймав його у себе, як рідного. Останнім бажанням М. В. Остроградського було, щоб його, як і Т. Г. Шевченка, поховали на Україні. Так воно і сталось. Його поховали в рідній Пашенній (тепер це село називається Пашенівка) на благословенній Полтавській землі. Народ, що колись проживав там, якщо вірити Геродотові, мав високий рівень культури елінів. 200 років тому ця земля дала світові М. В. Остроградського, котрий на початку 19-го століття, в епоху бурхливого розвитку науки, був єдиним слов'янином, який творив разом із славетною когортою західноєвропейських учених основи сучасної математики, фізики і механіки.

Одержано 05.06.2001