УДК 517.9

Д. А. Сапронов, А. Е. Шишков
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С КОНВЕКТИВНЫМ ЧЛЕНОМ

We establish estimates of initial evolution of supports of solutions to a wide class of arbitrary order quasilinear parabolic equations whose structure is similar to the structure of the equation of strong nonlinear diffusion-convection.

Встановлено оцінки стартової еволюції носіїв енергетичних узагальнених розв'язків широкого класу квазілінійних параболічних рівнянь довільного порядку структури рівняння сильної нелінійної дифузії-конвекції.

1. Введение. В цилиндрической области $G = \Omega\times(0,T)$ рассматривается следующая задача Коши – Дирихле:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|u|^{q-1}u\right)+(-1)^m\sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(t,x,u,D_xu,\ldots,D_x^m u) + \left(\chi, \nabla b(t,u)\right) = 0, \quad (1)$$

$$D_x^\alpha u\Big|_{\Gamma=\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \quad \forall\alpha\colon |\alpha|\le m-1, \quad m\ge 1, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x)\in L_{q+1}(\Omega), \quad \Omega\setminus\operatorname{supp}u_0(x) \ne \varnothing, \quad q>0. \quad (3)$$

Здесь $\chi = (\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n)$ — произвольный вектор из $\boldsymbol{R}^n$, а каратеодориевы функции $a_\alpha(t,x,\xi)$ и непрерывная функция $b(t,s)$ удовлетворяют условиям коэрцитивности и роста:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x,\xi)\xi_\alpha \ge d_0\sum_{|\beta|=m}\left|\xi_\beta\right|^{p+1} \quad \forall(t,x,\xi)\in G\times\boldsymbol{R}^{N(m)},\ p>q,\ d_0>0, \quad (4)$$

$$|a_\alpha(t,x,\xi)| \le d_1\sum_{|\beta|=m}\left|\xi_\beta\right|^p \quad \forall(t,x,\xi)\in G\times\boldsymbol{R}^{N(m)}, \quad d_1<\infty, \quad (5)$$

$$|b(t,s)| \le d_2|s|^\lambda \quad \forall(t,s)\in\boldsymbol{R}_+^1\times\boldsymbol{R}^1, \quad d_2<\infty, \quad \lambda>q, \quad (6)$$

$$b(t,s)s-\int_0^s b(t,\tau)\,d\tau \ge d_3|s|^{\lambda+1} \quad \forall(t,s)\in\boldsymbol{R}_+^1\times\boldsymbol{R}^1, \quad d_3>0, \quad (7)$$

где $N(m)$ — число различных m-мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ длины $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\le m$.

Класс уравнений структуры (1) включает в себя многие уравнения математической физики, используемые для описания различных процессов при наличии конвективного переноса. В частности, при $m=1$, $n=1$, $p=1$ модельным представителем этого класса является уравнение нестационарной ньютоновской фильтрации с нелинейной конвекцией:

$$\left(|u|^{q-1}u\right)_t - u_{xx} + \left(|u|^{\lambda-1}u\right)_x = 0, \quad (x,t)\in\boldsymbol{R}^1\times(0,T). \quad (8)$$

Это уравнение является вырождающимся при $u=0$ квазилинейным параболическим уравнением и поэтому, как хорошо известно [1], имеет ряд специфических свойств. В частности, при

$$q<\min\{1,\lambda\} \quad (9)$$

это уравнение имеет свойство конечной скорости распространения возмущений (КСР-свойство), которое состоит в следующем. При произвольной начальной функции

$$0 \leq u_0(x) \in C^0(R^1) : \operatorname{supp} u_0 = [c_1, c_2], \quad c_1 > -\infty, \quad c_2 < \infty, \tag{10}$$

неотрицательное непрерывное обобщенное решение $u(x,t)$ соответствующей задачи Коши для уравнения (8) имеет два непрерывных фронта:

$$\begin{aligned} \eta_+(t) &= \sup\{x : u(x,t) > 0\} \text{ — правый фронт,} \\ \eta_-(t) &= \inf\{x : u(x,t) > 0\} \text{ — левый фронт,} \end{aligned} \tag{11}$$

отделяющие область, где $u(x,t) > 0$, от области, где $u = 0$.

Систематическое исследование указанного свойства уравнения (8) было начато в работах [2, 3]. Первые результаты о поведении фронтов $\eta_+(t)$, $\eta_-(t)$ при $t \to \infty$ появились в работе [4]. Некоторые особенности стартовой эволюции фронтов $\eta_+(t)$, $\eta_-(t)$ изучались в [5, 6]. Необходимость соотношения (9) для сохранения КСР-свойства исследовалась в работах [7, 8]; при невыполнении (9) было установлено разрушение правого фронта: $\eta_+(t) = \infty \quad \forall\, t > 0$. Наличие КСР-свойства у задачи (1) – (3) и некоторые оценки сверху при $t \to \infty$ соответствующих левого и правого фронтов произвольного энергетического решения указанной задачи были анонсированы в [9]. В настоящей работе изучается стартовая эволюция соответствующих фронтов $\eta_+(t)$, $\eta_-(t)$, устанавливаются в определенном смысле точные оценки сверху этих фронтов, зависящие от локальных свойств начальной функции.

2. Формулировка основных результатов. Через $W_k^m(\Omega, R)$, $R \subset \Omega$, будем, как обычно, обозначать замыкание в норме соболевского пространства $W_k^m(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в 0 в окрестности множества R.

Определение 1. *Энергетическим обобщенным решением* $u(x,t)$ *задачи Коши* (1) – (3) *назовем функцию*

$$u(x,t) \in C(0,T;\, L_{q+1}(\Omega)) \bigcap L_{p+1}(0,T;\, W_{p+1}^m(\Omega, \partial\Omega)) \bigcap L_{\lambda+1}((0,T)\times\Omega),$$

удовлетворяющую уравнению (1) *в смысле распределений из* $D'(G)$ *и начальному условию* (3) *в смысле пространства* $C([0,T]; L_{q+1}(\Omega))$.

***Замечание* 1.** Мы не рассматриваем здесь вопрос о разрешимости задачи (1) – (3). Отметим только, что при $m = 1$ и некоторых дополнительных ограничениях на структуру уравнения (1) существование энергетического решения устанавливалось, например, в [10, 11].

***Замечание* 2.** Следуя выводу формулы интегрирования по частям из [12], из определения 1 получаем справедливость следующего равенства:

$$\frac{q}{q+1}\int_\Omega |u(x,T)|^{q+1}\phi(x,T)\,dx + \int_{(0,T)\times\Omega}\Bigg[-\frac{q}{q+1}|u(x,t)|^{q+1}\phi_t'(x,t) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x,D_x u,\ldots,D_x^m u)\, D_x^\alpha(u\cdot\phi) - B(t,u)(\chi, \nabla\phi(x,t)) =$$

$$= \frac{q}{q+1}\int_\Omega |u_0(x)|^{q+1}\phi(x,0)\,dx, \tag{12}$$

где

$$B(t,u) = b(t,u)u - \int_0^u b(t,s)\,ds$$

при произвольных $0<T<T_0<\infty$, $\phi \in C^{1,m}_{t,x}([0,T]\times\overline{\Omega})$.

Не ограничивая общности рассмотрений, будем предполагать в дальнейшем, что $\chi = (\chi_1, 0, 0, \ldots, 0)$ и

$$\operatorname{supp} u_0 \subset \Omega \cap \left\{x \in \boldsymbol{R}^n : x_1 \geq 0\right\}. \tag{13}$$

Если $u(x,t)$ — произвольное решение задачи (1) – (3), то определим фронт его носителя как

$$\eta(t) = \inf\left\{ s: \int_{\{x_1<s\}} |u(x,t)|^{q+1}\,dx > 0 \right\}. \tag{14}$$

При этом, учитывая определение (11), будем говорить, что фронт (14) является правым фронтом $\eta_+(t)$, если $\chi_1<0$, и левым фронтом $\eta_-(t)$, если $\chi_1>0$.

Определение 2. *Энергетическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1) – (3), (13) *имеет свойство конечности скорости распространения носителя (КСР-свойство), если*

$$\inf\{\eta(t): 0<t<\tau\} > -\infty$$

для некоторого $\tau>0$.

Теорема 1. *Произвольное энергетическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1) – (3) *в условиях* (4) – (7) *имеет КСР-свойство и, кроме того, справедливы следующие оценки фронта носителя*:

a) *если* $\chi_1 = 0$ *или* $\lambda \leq \lambda_{cr_1} = p + \dfrac{(m(p+1)-1)(q+1)}{n}$, *то*

$$\eta(t) \geq \eta(0) - c_1 t^{\frac{q+1}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} \quad \forall\, t: 0<t<t_0<\infty, \quad 0<c_1<\infty;$$

b) *если* $\chi_1>0$ *и* $\lambda_{cr_1}<\lambda$, *то*

$$\eta(t) \geq \eta(0) - c_2 t^{\frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q}} \quad \forall\, t: 0<t<t_0<\infty, \quad 0<c_2<\infty;$$

c) *если* $\chi_1<0$ *и* $\lambda_{cr_1}<\lambda<\lambda_{cr_1}+(q+1)/n$, *то*

$$\eta(t) \geq \eta(0) - c_3 t^{\frac{m(q+1)(p+1)-n(\lambda-p)}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} \quad \forall\, t: 0<t<t_0<\infty, \quad 0<c_3<\infty;$$

при этом $c_i>0$, $i=1,2,3,$ — *некоторые постоянные, зависящие только от параметров задачи и* $\|u_0(x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}$.

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 1 $u_0(x)\in L_q(\Omega)$. *Пусть также энергетическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1) – (3) *удовлетворяет в* $L_q(\Omega)$ *закону сохранения*

$$\|u(t,\cdot)\| \leq k\|u_0(\cdot)\| \equiv K \quad \forall\, t\geq 0, \quad 0<k<\infty.$$

Тогда для энергетического решения $u(x,t)$ *задачи* (1) – (3) *справедливы следующие оценки границы носителя:*

a) *если* $\chi_1 = 0$ *или* $\lambda \le \lambda_{cr_2} = p + \dfrac{q(m(p+1)-1)}{n}$, *то*

$$\eta(t) \ \ge\ \eta(0) - c_4 t^{\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)}} \quad \forall\, t\colon 0 < t < t_0 < \infty, \quad 0 < c_4 < \infty;$$

b) *если* $\chi_1 > 0$ *и* $\lambda_{cr_2} < \lambda$, *то*

$$\eta(t) \ \ge\ \eta(0) - c_5 t^{\frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q}} \quad \forall\, t\colon 0 < t < t_0 < \infty, \quad 0 < c_5 < \infty;$$

c) *если* $\chi_1 < 0$ *и* $\lambda_{cr_2} < \lambda \le \lambda_{cr_2} + q/n$, *то*

$$\eta(t) \ \ge\ \eta(0) - c_6 t^{\frac{mq(p+1)-n(\lambda-p)}{mq(p+1)+n(p-q)}} \quad \forall\, t\colon 0 < t < t_0 < \infty, \quad 0 < c_6 < \infty,$$

при этом $c_i > 0$, $i = 4, 5, 6$, *— постоянные, зависящие от* $\|u_0(x)\|_{L_q(\Omega)}$ *и других известных параметров задачи, но не зависящие от* $\|u_0(x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}$.

***Замечание* 3.** Легко проверить, что в случае $m = 1$ L_q-закон сохранения имеет место при любых неотрицательных начальных функциях.

***Замечание* 4.** При $\chi_1 = 0$ полученные в теоремах 1, 2 оценки совпадают с точными оценками, установленными для уравнений без конвекции в работах [13, 14].

***Замечание* 5.** Оценки из теоремы 2 остаются справедливыми для решений $u(x,t)$ задачи (1)–(3) с $u_0 \in L_q(\Omega)$, которые могут быть приближены решениями $u_k(x,t)$ с начальными данными

$$u_0^{(k)}(x) \in L_q(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega)\colon \ \left\| u_0^{(k)} - u_0 \right\|_{L_q(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

3. Вспомогательные построения и утверждения. Введем следующие семейства подобластей исходных областей Ω и G:

$$\Omega(s) \ =\ \{x = (x_1, x') \in \Omega\colon x_1 < s - |x'|\} \quad \forall\, s \in \boldsymbol{R}^1, \quad x' = (x_2, \ldots, x_n),$$

$$K(s,\delta) \ =\ \Omega(s) \setminus \Omega(s-\delta) \quad \forall\, s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall\, \delta > 0,$$

$$G(s) \ =\ \Omega(s) \times (0,T), \qquad Q(s,\delta) \ =\ K(s,\delta) \times (0,T).$$

Будем систематически использовать интерполяционные неравенства Гальярдо – Ниренберга, которые в случае областей $K(s,\delta)$, как несложно проверить, имеют вид

$$\left\| D_x^j v \right\|_{a,K(s,\delta)} \ \le\ d_4 \delta^{-j-\frac{n(a-d)}{ad}} \| v \|_{d,K(s,\delta)} + d_5 \left\| D_x^m v \right\|_{b,K(s,\delta)}^{\theta} \| v \|_{d,K(s,\delta)}^{1-\theta}, \qquad (15)$$

$$0 \le j < m.$$

Здесь $v(x)$ — произвольная функция из пространства

$$W_b^m(K(s,\delta)) \cap L_d(K(s,\delta)), \qquad \| v \|_{a,B}^a \ =\ \int\limits_B |v|^a \, dx,$$

где $d > 0$, $a > 1$, $b > 1$, $\theta \in [\,j/m, 1]$ определяется из равенства

$$\frac{1}{a} - \frac{j}{n} \ =\ \left(\frac{1}{b} - \frac{m}{n}\right)\theta + (1-\theta)\frac{1}{d}, \qquad (16)$$

а постоянные $d_4 < \infty$, $d_5 < \infty$ зависят только от известных параметров и не зависят, в частности, от s, δ. Введем неотрицательные срезающие функции $\eta(\tau) \in C^m(\boldsymbol{R}^1)$, $\zeta(\tau) \in C^m(\boldsymbol{R}^1)$, имеющие следующие свойства:

$$\eta(\tau) = 1 \;\; \forall\tau \le -\frac{15}{16}, \quad \eta(\tau) = 0 \;\; \forall\tau \ge 0, \;\; 0 \le \eta(\tau) \le 1 \quad \forall\tau \in \boldsymbol{R}^1,$$

$$\frac{d}{d\tau}\eta(\tau) \le 0 \;\; \forall\tau \in \boldsymbol{R}^1, \quad -\frac{d}{d\tau}\eta(\tau) \ge d_6 > 0 \;\; \forall\tau \in \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{16}\right),$$

$$\zeta(\tau) = \frac{1}{16} \;\; \forall\tau < \frac{1}{32}, \quad \zeta(\tau) = \tau \quad \forall\tau \ge \frac{1}{8},$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} \ge 0 \quad \forall\tau \in \boldsymbol{R}^1.$$

Определим теперь семейство основных срезающих функций

$$\eta_{s,\delta}(x) = \eta\left(\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) + \frac{x_1 - s}{\delta}\right) \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall\delta > 0.$$

Легко проверить, что функции из указанного семейства в силу приведенных свойств срезок $\eta(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\eta_{s,\delta}(x) = 0 \quad \forall x_1 \ge s - \delta\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right),$$

$$\eta_{s,\delta}(x) = 1 \quad \forall x_1 \le s - \delta\left(\frac{15}{16} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right), \quad 0 \le \eta_{s,\delta}(x) \le 1 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\left|D_x^\alpha \eta_{s,\delta}(x)\right| \le c\delta^{-|\alpha|}$$

$$\forall\,\alpha\colon 1 \le |\alpha| \le m, \quad \forall\, x\colon s - \delta\left(\frac{15}{16} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right) \le x_1 \le s - \delta\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right),$$

$$-D_{x_1}\eta_{s,\delta}(x) \ge d_7\delta^{-1} > 0 \;\; \forall\, x\colon s - \delta\left(\frac{3}{4} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right) \le x_1 \le s - \delta\left(\frac{3}{16} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right). \tag{17}$$

Здесь и в дальнейшем через c, C будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие лишь от известных параметров и не зависящие, в частности, от s, δ.

Легко проверить справедливость следующих включений:

$$\Omega(s) \subset \left\{x\colon x_1 \ge s - \delta\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right\}, \quad \Omega(s-\delta) \supset \left\{x\colon x_1 \le s - \delta\left(\frac{15}{16} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right)\right\},$$

$$K(s,\delta) \supset \left\{x\colon s - \delta\left(\frac{15}{16} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right) \le x_1 \le s - \delta\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right\},$$

$$K\left(s - \frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{2}\right) \subset \left\{x\colon s - \delta\left(\frac{3}{4} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right) \le x_1 \le s - \delta\left(\frac{3}{16} + \zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right)\right\}$$

$$\forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall\delta > 0.$$

Лемма 1. *Пусть* $u(x,t)$ *— произвольное энергетическое решение задачи* (1) – (3) *при* $\chi_1 \ge 0$. *Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$\int\limits_{\Omega_T(s-\delta)}|u|^{q+1}dx + T^{-1}\int\limits_{G(s-\delta)}|u|^{q+1}dx\,dt + \int\limits_{G(s-\delta)}\left|D_x^m u\right|^{p+1}dx\,dt + \chi_1\delta^{-1}\int\limits_{Q\left(s-\frac{5\delta}{8},\frac{\delta}{4}\right)}|u|^{\lambda+1}dx\,dt \le$$

$$\le c\left(\delta^{-m(p+1)}\int\limits_{Q(s,\delta)}|u|^{p+1}dx\,dt + h(s)\right) \equiv Z_T^+(s,\delta) \quad \forall s\in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall\delta>0. \quad (18)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (12) в качестве пробной функции

$$\phi(x,t) = \eta_{s,\delta}(x_1-\delta,\, x')\exp(-tT^{-1}).$$

Используя оценки (17), интерполяционное неравенство (15) при $a=b=d=p+1$ и неравенство Юнга с ε, после простых вычислений получаем

$$\int\limits_{\Omega_T(s)}|u|^{q+1}dx + T^{-1}\int\limits_{G(s)}|u|^{q+1}dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{G(s)}\left|D_x^m u\right|^{p+1}dx\,dt + \delta^{-1}\int\limits_{Q\left(s-\frac{3\delta}{4},\frac{\delta}{2}\right)}|u|^{\lambda+1}dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon\int\limits_{Q(s+\delta,\delta)}\left|D_x^m u\right|^{p+1}dx\,dt + c(\varepsilon)\left(\delta^{-m(p+1)})\int\limits_{Q(s+\delta,\delta)}|u|^{p+1}dx\,dt + h(s+\delta)\right) \quad \forall\varepsilon>0. \quad (19)$$

Зафиксируем произвольно $s=s_0$, $\delta=\delta_0$ и определим последовательности $s_i = s_{i-1}+\delta_{i-1}$, $\delta_i = 2^{-i}\delta_{i-1}$, $i=1,2,\ldots$. Теперь из соотношений (19) получим серию соотношений, зафиксировав $s=s_i$, $\delta=\delta_i$. Итерируя эти соотношения k раз, легко находим

$$\int\limits_{\Omega_T(s)}|u|^{q+1}dx + T^{-1}\int\limits_{G(s)}|u|^{q+1}dx\,dt + \int\limits_{G(s)}\left|D_x^m u\right|^{p+1}dx\,dt + \delta^{-1}\int\limits_{Q\left(s-\frac{3\delta}{4},\frac{\delta}{2}\right)}|u|^{\lambda+1}dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon^{k+1}\int\limits_{Q(s+2\delta,2\delta)}\left|D_x^m u\right|^{p+1}dx\,dt +$$

$$+ c(\varepsilon)\left(\sum_{j=0}^{k}(2^{m(p+1)}\varepsilon)^j\delta^{-m(p+1)}\int\limits_{Q(s+2\delta,2\delta)}|u|^{p+1}dx\,dt + \varepsilon^j h(s+2\delta)\right). \quad (20)$$

Полагая здесь $\varepsilon = 2^{-m(p+1)-1}$, устремляя $k\to\infty$ и заменяя в полученном неравенстве аргументы, приходим к соотношению (18). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $u(x,t)$ — *произвольное энергетическое решение задачи* (1) – (3) *при* $\chi_1\le 0$. *Тогда имеет место следующее соотношение*:

$$\int\limits_{\Omega_T(s-\delta)}|u|^{q+1}dx + T^{-1}\int\limits_{G(s-\delta)}|u|^{q+1}dx\,dt + \int\limits_{G(s-\delta)}\left|D_x^m u\right|^{p+1}dx\,dt \le$$

$$\le c\left(\delta^{-m(p+1)}\int\limits_{Q(s,\delta)}|u|^{p+1}dx\,dt - \chi_1\delta^{-1}\int\limits_{Q(s,\delta)}|u|^{\lambda+1}dx\,dt + h(s)\right) \equiv Z_T^-(s,\delta) \quad (21)$$

$$\forall s\in\boldsymbol{R}^1, \quad \forall\delta>0.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* $u(x,t)$ — *произвольное энергетическое решение задачи* (1) – (3). *Введем функцию*

$$I_T(s) = \int\limits_{G(s)} |u|^{p+1} dx\,dt \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1,$$

связанную с этим решением.

Тогда имеет место соотношение

$$I_T(s-\delta) \le cT^{1-\theta} Z_T^{\pm}(s,\delta)^{\theta+\frac{p+1}{q+1}(1-\theta)} \qquad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \tag{22}$$

$$\theta = \frac{n(p-q)}{n(p-q)+m(p+1)(q+1)}.$$

Доказательство. Из интерполяционного неравенства (15) при $\delta \to \infty$, $j = 0$, $a = b = p+1$, $d = q+1$ следует

$$\int\limits_{\Omega(s)} |u|^{p+1} dx \le d_5^{p+1} \left(\int\limits_{\Omega(s)} \left| D_x^m u \right|^{p+1} dx \right)^{\theta} \left(\int\limits_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{(1-\theta)\frac{p+1}{q+1}} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \tag{23}$$

где θ взято из (22). Интегрируя (23) по t и применяя неравенство Гельдера, приходим к соотношению

$$\int\limits_{G(s)} |u|^{p+1} dx\,dt \le c \left(\int\limits_{G(s)} \left| D_x^m u \right|^{p+1} dx \right)^{\theta} \left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{(1-\theta)} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \tag{24}$$

из которого имеем

$$\int\limits_{G(s)} |u|^{p+1} dx\,dt \le c \left(\int\limits_{G(s)} \left| D_x^m u \right|^{p+1} dx \right)^{\theta} \times$$

$$\times \left(\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \int\limits_{\Omega_t(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p-q}{q+1}} \int\limits_{G(s)} |u|^{q+1} dx\,dt \right)^{1-\theta} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1. \tag{25}$$

Из соотношения (25), используя результаты лемм 1 и 2, легко получаем требуемое соотношение. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4 [14]. *Пусть некоторая неотрицательная непрерывная неубывающая функция* $f(s)$ *удовлетворяет соотношению*

$$f(s - f(s)) \le \kappa f(s) \qquad \forall s < s_0, \quad 0 < \kappa < 1.$$

Тогда

$$f(s) = 0 \qquad \forall s \le s_0 - (1-\kappa)^{-1} f(s_0).$$

Лемма 5. *Для функции*

$$D(s) = s - d(-s)^{-h} \qquad \forall s < 0, \quad d > 0, \quad h > 0,$$

справедливо соотношение

$$\max D(s) = D(s_{\text{opt}}) = -\left(1+h^{-1}\right)(dh)^{\frac{1}{1+h}} = \left(1+h^{-1}\right)s_{\text{opt}},$$

где

$$s_{\text{opt}} = -(dh)^{\frac{1}{1+h}}.$$

4. Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим утверждения a) и b), относящиеся к случаю $\chi_1 > 0$ (левый фронт). Заметим, что справедливо следующее простое соотношение:

$$\operatorname{mes}\{\Omega(s) \cap \operatorname{supp} u(\cdot, t)\} \le c(s-\eta(t))_+^n. \tag{26}$$

В неравенстве (18) положим $s_i = s + \delta - i\delta/4$, $i = 1, 2, \ldots$, и просуммируем полученные неравенства. В результате будем иметь

$$\int_{G(s)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt + \chi_1\delta^{-1} \int_{G(s)} |u|^{\lambda+1} dx\,dt \le$$

$$\le C\delta^{-m(p+1)} \int_{G(s+\delta)} |u|^{p+1} dx\,dt \qquad \forall \delta > 0:\ s + \delta \le 0. \tag{27}$$

Применяя к правой части (27) неравенство Юнга с ε и подставляя в полученное соотношение неравенство (26), получаем

$$\int_{G(s)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt + \chi_1\delta^{-1} \int_{G(s)} |u|^{\lambda+1} dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon\chi_1\delta^{-1} \int_{G(s+\delta)} |u|^{\lambda+1} dx\,dt + \chi_1^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} c(\varepsilon) T(-\eta(T))^n \delta^{-m(p+1)\frac{\lambda+1}{\lambda-p}+\frac{p+1}{\lambda-p}} \tag{28}$$

$$\forall \delta > 0:\ s+\delta \le 0.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ в правой части неравенства (28) может быть произвольным, то можно применить стандартную процедуру, позволяющую вывести из неравенства (19) оценку (18). В результате выводим из неравенства (28) следующую оценку в явном виде:

$$\int_{G(s)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt \le cT(-\eta(T))^n (-s)^{-m(p+1)\frac{\lambda+1}{\lambda-p}+\frac{p+1}{\lambda-p}} \chi_1^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}. \tag{29}$$

Обозначив $\Delta I_T(s) = I_T(s) - I_T(s-\delta)$, перепишем в случае $\chi_1 > 0$ неравенство (22) в виде

$$I_T(s-\delta) \le cT^{1-\theta}\left(\delta^{-m(p+1)}\Delta I_T(s) + h(s)\right)^{1+\alpha} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \tag{30}$$

$$\alpha = \frac{m(p+1)(p-q)}{n(p-q)+m(p+1)(q+1)}.$$

Будем теперь детализировать выбор свободного параметра δ в соотношении (30), а именно, положим

$$\delta = \delta(s, T) = T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(\alpha+1)}} I_T(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(\alpha+1)}}.$$

После несложных преобразований получим неравенство

$$R_T(s-R_T(s)) \le \kappa R_T(s) \quad \forall\, s<0, \quad \kappa = \frac{c}{c+1} < 1, \tag{31}$$

где c взято из (30), $R_T(s) = T^{(1-\theta)(m(p+1)(\alpha+1))^{-1}} I_T(s)^{\alpha(m(p+1)(\alpha+1))^{-1}}$. Зафиксируем произвольно $s_0<0$. В силу леммы 4 из соотношения (31) получаем

$$R_T(s) = 0 \quad \forall\, s \le s_0 - (1-\kappa)^{-1} R_T(s_0), \quad \forall\, s_0 \le 0$$

или

$$\eta(T) \ge s_0 - (1-\kappa)^{-1} T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(\alpha+1)}} I_T(s_0)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(\alpha+1)}} \quad \forall\, s_0 \le 0. \tag{32}$$

Согласно неравенству Пуанкаре

$$I_T(s_0) \le c(-\eta(T))^{m(p+1)} \int\limits_{G(s_0)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt \quad \forall\, s_0 \le 0. \tag{33}$$

Оценим интеграл в правой части последнего неравенства с помощью неравенства (29). В результате имеем

$$I_T(s_0) \le c\chi_1^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} T(-\eta(T))^{n+m(p+1)} (-s_0)^{-\frac{(m(\lambda+1)-1)(p+1)}{\lambda-p}} \quad \forall\, s_0 < 0. \tag{34}$$

Из (32) подстановкой в него (34) получаем

$$\eta(T) \ge s_0 - c\chi_1^{\frac{\alpha(p+1)}{m(p+1)(\alpha+1)(\lambda-p)}} T^{\frac{1-\theta+\alpha}{m(p+1)(\alpha+1)}} \times$$

$$\times (-\eta(T))^{\frac{\alpha(n+m(p+1))}{m(p+1)(\alpha+1)}} (-s_0)^{-\frac{\alpha(m(\lambda+1)-1)}{m(\lambda-p)(1+\alpha)}} \equiv \varphi(s_0). \tag{35}$$

В силу леммы 5 имеем

$$\max_{-\infty<s_0<0} \varphi(s_0) = \varphi(s_{\text{opt}}),$$

где $s_{\text{opt}} = -\,c_2 T^{\alpha_1} (-\eta(T))^{\beta_1} \chi_1^{\gamma_1}$,

$$\alpha_1 = \frac{(1-\theta+\alpha)(\lambda-p)}{(p+1)\left((m(\lambda+1)-1)\alpha + m(\lambda-p)(\alpha+1)\right)},$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha(\lambda-p)(n+m(p+1))}{(p+1)\left((m(\lambda+1)-1)\alpha + m(\lambda-p)(\alpha+1)\right)},$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{(p+1)\left((m(\lambda+1)-1)\alpha + m(\lambda-p)(\alpha+1)\right)}.$$

Следовательно, из (35) вытекает

$$\eta(T) \ge -\,c_2 T^{\alpha_1} (-\eta(T))^{\beta_1} \chi_1^{-\gamma_1}, \quad c_2 > 0. \tag{36}$$

Отсюда, очевидно, следует неравенство

$$\eta(T) \ge -\,c_3 T^{\frac{\alpha_1}{1-\beta_1}} \chi_1^{-\frac{\gamma_1}{1-\beta_1}} = c_3 T^{\frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q}} \chi_1^{-\frac{p-q}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q}}, \quad c_3 > 0. \tag{37}$$

Полагая в (30) $s = s + \delta$ и устремляя в полученном неравенстве $\delta \to \infty$, получаем соотношение

$$I_T(s_0) \le ch(\infty)^{1+\alpha} T^{1+\theta} \quad \forall\, s_0 \in \boldsymbol{R}^1. \tag{38}$$

Подставляя (38) в соотношение (32), имеем

$$\eta(T) \ge -c_4 T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} = -c_4 T^{\frac{q+1}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}}, \quad c_4 > 0, \quad \forall\, T > 0. \tag{39}$$

Таким образом, для движения носителя решения получены две оценки: (37) и (39). Необходимо выбрать из них оптимальную. Очевидно, что

$$c_3 T^{\frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q}} \le c_4 T^{\frac{q+1}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} \quad \forall\, T\colon 0 < T < T_0,$$

если

$$\frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q} \ge \frac{q+1}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \ge \lambda_{cr_1} = p + \frac{(m(p+1)-1)(q+1)}{n}.$$

Тем самым утверждения a) и b) теоремы 1 доказаны.

Докажем теперь утверждение c) теоремы 1. Согласно интерполяционному неравенству (15) при $a = \lambda + 1$, $b = p + 1$, $d = q + 1$, $j = 0$ и $\delta \to \infty$ имеем

$$\int\limits_{\Omega(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx \le d_5^{\lambda+1} \left(\int\limits_{\Omega(s-\delta)} \left| D_x^m u \right|^{p+1} dx \right)^{\frac{\lambda+1}{p+1}\theta_0} \left(\int\limits_{\Omega(s-\delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{(1-\theta_0)\frac{\lambda+1}{q+1}}$$
$$\forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \quad \theta_0 = \frac{n(\lambda-q)(p+1)}{(\lambda+1)\big(n(p-q)+m(p+1)(q+1)\big)}. \tag{40}$$

Интегрируя (40) по t и применяя неравенство Гельдера, получаем соотношение

$$E_T(s-\delta) \equiv \int\limits_{G(s-\delta)} |u|^{\lambda+1} dx\, dt \le$$
$$\le c \left(\int\limits_{G(s-\delta)} \left| D_x^m u \right|^{p+1} dx\, dt \right)^{\mu} \left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega(s-\delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\omega} dt \right)^{1-\mu} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \tag{41}$$
$$1 > \mu = \frac{n(\lambda-q)}{n(p-q)+m(p+1)(q+1)}, \quad \omega = \frac{m(p+1)(\lambda+1)-n(\lambda-p)}{m(p+1)(q+1)-n(\lambda-p)}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные содержащимся в лемме 3, с учетом леммы 2 из соотношения (41) выводим

$$E_T(s-\delta) \le cT^{1-\mu} \left(\delta^{-m(p+1)} \Delta I_T(s) - \chi_1 \delta^{-1} \Delta E_T(s) + h(s) \right)^{1+\beta} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \tag{42}$$
$$\beta = \frac{m(p+1)(\lambda-q)}{n(p-q)+m(p+1)(q+1)}.$$

В силу леммы 3 имеем также

$$I_T(s-\delta) \le cT^{1-\theta}\Big(\delta^{-m(p+1)}\Delta I_T(s) - \chi_1\delta^{-1}\Delta E_T(s) + h(s)\Big)^{1+\alpha} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0. \tag{43}$$

Возведем (43) в степень $(1+\beta)$ и умножим на $T^{(1-\mu)(1+\alpha)}$, а (42) — в степень $(1+\alpha)$ и умножим на $T^{(1-\theta)(1+\beta)}$. В результате получим

$$A_T(s-\delta) \le c_1\Big(T^d \Delta A_T(s)^{1+\alpha}\delta^{-m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta)} +$$

$$+ T^l \Delta B_T(s)^{1+\beta}\big(-\chi_1\delta^{-1}\big)^{(1+\alpha)(1+\beta)}\Big) + c_3 T^{(1-\mu)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta)} h(s)^{(1+\alpha)(1+\beta)}, \tag{44}$$

$$B_T(s-\delta) \le c_2\Big(T^d \Delta A_T(s)^{1+\alpha}\delta^{-m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta)} +$$

$$+ T^l \Delta B_T(s)^{1+\beta}\big(-\chi_1\delta^{-1}\big)^{(1+\alpha)(1+\beta)}\Big) + c_4 T^{(1-\mu)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta)} h(s)^{(1+\alpha)(1+\beta)} \tag{45}$$

$$\forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \qquad c_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4,$$

где

$$A_T(s) = T^{(1-\mu)(1+\alpha)} I_T(s)^{1+\beta}, \qquad B_T(s) = T^{(1-\theta)(1+\beta)} E_T(s)^{1+\alpha},$$

$$d = (1-\theta)(1+\beta) - \alpha(1-\mu)(1+\alpha), \qquad l = (1-\mu)(1+\alpha) - \beta(1-\theta)(1+\beta),$$

$$\Delta A_T(s) = A_T(s) - A_T(s-\delta), \qquad \Delta B_T(s) = B_T(s) - B_T(s-\delta).$$

Сложив (44) и (45), получим

$$H_T(s-\delta) \equiv A_T(s-\delta) + B_T(s-\delta) \le c_5 \Delta H_T(s)\Big(T^d H_T(s)^{\alpha}\delta^{-m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta)} +$$

$$+ T^l H_T(s)^{\beta}\big(-\chi_1\delta^{-1}\big)^{(1+\alpha)(1+\beta)}\Big) + c_6 T^{(1-\mu)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta)} h(s)^{(1+\alpha)(1+\beta)} \tag{46}$$

$$\forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad \forall \delta > 0.$$

Положим в (46)

$$\delta = \delta(s,T) = T^{\frac{d}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta)}} H_T(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta)}} -$$

$$- \chi_1 T^{\frac{l}{(1+\alpha)(1+\beta)}} H_T(s)^{\frac{\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}} \equiv Q_T(s). \tag{47}$$

После несложных преобразований получим следующее соотношение:

$$H_T(s-Q_T(s)) \le \kappa_1 H_T(s) + c_7 T^{(1-\mu)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta)} h(s)^{(1+\alpha)(1+\beta)} \quad \forall s \in \boldsymbol{R}^1, \tag{48}$$

$$\kappa_1 = \frac{c_5}{1+c_5} < 1, \qquad c_7 = \frac{c_6}{1+c_5}.$$

Возведем (48) в степень $\dfrac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta)}$ и умножим на $T^{\frac{d}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta)}}$, затем возведем (48) в степень $\dfrac{\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}$ и умножим на $-\chi_1 T^{\frac{l}{(1+\alpha)(1+\beta)}}$. Сложив полученные неравенства, получим

$$Q_T(s-Q_T(s)) \leq \kappa_2 Q_T(s) + c_8\left(-\chi_1 T^{1-\mu} h(s)^\beta + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}\right) \tag{49}$$
$$\forall s \in \boldsymbol{R}^1, \quad 0 < \kappa_2 < 1.$$

В силу леммы 4 из (49) выводим

$$Q_T(s) = 0 \quad \forall\, s \leq s_0 - (1-\kappa_2)^{-1} Q_T(s_0) \quad \forall\, s_0 < 0. \tag{50}$$

Оценим $Q_T(s_0)$ сверху. Положив в (46) $s = s_0 + \delta$ и устремив в полученном неравенстве $\delta \to \infty$, получим соотношение

$$H_T(s_0) \leq c_6 T^{(1-\mu)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta)} h(\infty)^{(1+\alpha)(1+\beta)} \quad \forall\, s_0 \in \boldsymbol{R}^1. \tag{51}$$

На основании определения $Q_T(s_0)$ из (51) выводим

$$Q_T(s_0) \leq c_8\left(-\chi_1 T^{1-\mu} h(\infty)^\beta + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h(\infty)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}\right) \quad \forall\, s_0 \in \boldsymbol{R}^1. \tag{52}$$

Подставляя (52) в (50) и полагая $s_0 = 0$, получаем оценку

$$\begin{gathered}\eta(T) \geq -c_8\left(-\chi_1 T^{1-\mu} + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}\right) \quad \forall\, T\colon 0 < T < T_0, \\ \eta(T) \geq -c_8 \max\left\{T^{1-\mu}, -\chi_1 T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}\right\} \quad \forall\, T\colon 0 < T < T_0.\end{gathered} \tag{53}$$

Нетрудно видеть, что

$$T^{1-\mu} = T^{\frac{m(p+1)(q+1)-n(\lambda-p)}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} \geq T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} = T^{\frac{q+1}{m(p+1)(q+1)+n(p-q)}} \quad \forall\, T\colon 0 < T < T_0,$$

если выполнено

$$1-\mu \leq \frac{1-\theta}{m(p+1)} \Leftrightarrow \lambda \geq \lambda_{cr_1} = p + \frac{(m(p+1)-1)(q+1)}{n}.$$

Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим сначала случаи a) и b) при $\chi_1 > 0$. Исходим из неравенства (32), установленного в предыдущем пункте. Однако для оценки $I_T(s_0)$ справа применим другую процедуру. В силу интерполяционного неравенства (15) при $j = 0$, $a = p+1$, $d = q$, $b = p+1$ и $\delta \to \infty$ имеем

$$\int\limits_{\Omega(s)} |u|^{p+1} dx \leq d_5^{p+1}\left(\int\limits_{\Omega(s)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\right)^{\theta_1}\left(\int\limits_{\Omega(s)} |u|^q dx\right)^{(1-\theta_1)\frac{p+1}{q}} \quad \forall\, s \in \boldsymbol{R}^1,$$
$$\theta_1 = \frac{n(p+1-q)}{n(p+1-q)+m(p+1)q}.$$

Проинтегрируем предыдущее неравенство по t и применим неравенство Гельдера. В результате, использовав закон сохранения, получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{G(s)} |u|^{p+1} dx\,dt \;\le\; c\left(K^{\frac{p+1}{q}} T\right)^{1-\theta_1} \left(\int\limits_{G(s)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt\right)^{\theta_1} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \tag{54}$$

Подставив (54) в (18) и применив неравенство Юнга с ε, получим

$$\int\limits_{\Omega_T(s-\delta)} |u|^{q+1} dx + T^{-1} \int\limits_{G(s-\delta)} |u|^{q+1} dx\,dt + \int\limits_{G(s-\delta)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt \; +$$

$$+ \;\chi_1 \delta^{-1} \int\limits_{Q\left(s-\frac{5\delta}{8}, \frac{\delta}{4}\right)} |u|^{\lambda+1} dx\,dt \;\le\; \varepsilon \int\limits_{Q(s,\delta)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt + c(\varepsilon)\delta^{-\frac{m(p+1)}{1-\theta_1}} T K^{\frac{p+1}{q}} \tag{55}$$

$$\forall s < 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ в правой части (55) может быть произвольным, то, поступая так же, как при выводе (19), получаем соотношение

$$\int\limits_{\Omega_T(s)} |u|^{q+1} dx + T^{-1} \int\limits_{G(s)} |u|^{q+1} dx\,dt + \int\limits_{G(s)} \left|D_x^m u\right|^{p+1} dx\,dt \;\le\; c\,\delta^{-\frac{m(p+1)}{1-\theta_0}} T K^{\frac{p+1}{q}} \tag{56}$$

$$\forall s < 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Из (54) в силу (56) получаем

$$I_T(s_0) \;\equiv\; \int\limits_{G(s_0)} |u|^{p+1} dx\,dt \;\le\; cK^{\frac{p+1}{q}} T(-s_0)^{\frac{n(p+1)}{q}}. \tag{57}$$

Подставляя (57) в (32), имеем

$$\eta(T) \;\ge\; s_0 - cT^{\frac{1-\theta+\alpha}{m(p+1)(\alpha+1)}} (-s_0)^{\frac{\alpha n(p+1-q)}{qm(p+1)(\alpha+1)}} K^{\frac{\alpha(q+1)}{qm(p+1)(\alpha+1)}} \;\equiv\; \varphi(s_0). \tag{58}$$

В силу леммы 5 получаем

$$\max_{-\infty < s_0 < 0} \varphi(s_0) \;=\; \varphi(s_{\text{opt}}) \;=\; -\,cK^{\frac{(p-q)(q+1)}{(p+1)(mq(p+1)+n(p-q))}} T^{\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)}},$$

откуда очевидно следует оценка

$$\eta(T) \;\ge\; -\,cK^{\frac{(p-q)(q+1)}{(p+1)(mq(p+1)+n(p-q))}} T^{\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)}}, \quad 0 < T < T_0. \tag{59}$$

Кроме того, для $\eta(T)$ справедлива оценка (37), в которой постоянная $c_3 > 0$ не зависит от $u_0(x)$. Сравним (37) и (59):

$$T^{\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)}} \;\ge\; T^{\frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q}}, \quad 0 < T < T_0,$$

если выполнено

$$\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)} \le \frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q)-p+q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \;\ge\; \lambda_{cr_2} \;=\; p + \frac{q(mp(p+1)-1)}{n}.$$

$$\int\limits_{\Omega_T(s-\delta)} |u|^{q+1} dx + T^{-1} \int\limits_{G(s-\delta)} |u|^{q+1} dx dt + \int\limits_{G(s-\delta)} \left| D_x^m u \right|^{p+1} dx dt \le$$

$$\le cT\left(\delta^{-a_1} K^{b_1} + (-\chi_1 \delta^{-1})^{a_2} K^{b_2}\right), \tag{64}$$

$$a_1 = \frac{mq(p+1)+n(p+1-q)}{q}, \quad a_2 = \frac{mq(p+1)+n(p+1-q)}{mq(p+1)+n(p-\lambda)},$$

$$b_1 = \frac{p+1}{q}, \quad b_2 = \frac{m(p+1)(\lambda+1)+n(p-\lambda)}{mq(p+1)+n(p-\lambda)}.$$

Подставляя (64) в (54) и (62), с учетом произвольности выбора $s < 0$, $d > 0$ получаем следующие соотношения:

$$I_T(s) \le C_1 T\left((-s)^{-a_1\theta_1} K^{b_1\theta_1 + \frac{(p+1)(1-\theta_1)}{q}} + (\chi_1 s^{-1})^{a_2\theta_1} K^{b_2\theta_1 + \frac{(p+1)(1-\theta_1)}{q}}\right), \tag{65}$$

$$E_T(s) \le C_2 T\left((-s)^{-a_1\mu_1} K^{b_1\mu_1 + \frac{(\lambda+1)(1-\nu_1)}{q}} + (\chi_1 s^{-1})^{a_2\mu_1} K^{b_2\mu_1 + \frac{(\lambda+1)(1-\nu_1)}{q}}\right). \tag{66}$$

После несложных вычислений приходим к неравенствам (60) и (61). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь соотношение (60) из теоремы 1. На основании определения функций $Q_T(s)$ и $H_T(s)$, из (60) с помощью простых преобразований получаем соотношение

$$\eta(T) \ge s_0 - C_3 \sum_{i=1}^{4} G_T^{(i)}(s_0) \quad \forall s_0 \le 0, \quad 0 < C_3 < \infty, \tag{67}$$

где

$$G_T^{(1)}(s) = -\chi_1 T^{\frac{(1-\mu)(1+\alpha)-\beta(1-\theta)}{1+\alpha}} I_T(s)^{\frac{\beta}{1+\alpha}},$$

$$G_T^{(2)}(s) = -\chi_1 T^{\frac{1-\mu}{1+\beta}} E_T(s)^{\frac{\beta}{1+\beta}},$$

$$G_T^{(3)}(s) = T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(1+\alpha)}} I_T(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}},$$

$$G_T^{(4)}(s) = T^{\frac{(1+\beta)(1-\theta)-\alpha(1-\mu)}{m(p+1)(1+\beta)}} E_T(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(\beta+1)}},$$

α, θ, β, μ взяты из (30), (41), (42). Воспользовавшись оценками (65), (66), получим

$$G_T^{(1)}(s) \le C_2^{\frac{\beta}{1+\alpha}}\left(-T^{\frac{(1-\mu)(1+\alpha)+\beta\theta}{1+\alpha}} \chi_1 K_1^{\frac{\beta}{1+\alpha}} (-s)^{-\frac{A_1\beta}{1+\alpha}} +\right.$$

$$\left. + T^{\frac{(1-\mu)(1+\alpha)+\beta\theta}{1+\alpha}} (-\chi_1)^{1+\frac{\alpha_2\mu_1\beta}{1+\alpha}} K_2^{\frac{\beta}{1+\alpha}} (-s)^{-\frac{A_2\beta}{1+\alpha}}\right) \equiv C_2^{\frac{\beta}{1+\alpha}}\left(\Gamma_T^{(1)}(s) + \Gamma_T^{(2)}(s)\right),$$

$$G_T^{(2)}(s) \le C_1^{\frac{\beta}{1+\beta}}\left(-T^{\frac{1-\mu+\beta}{1+\beta}}\chi_1 P_1^{\frac{\beta}{1+\beta}}(-s)^{-\frac{B_1\beta}{1+\beta}} + \right.$$

$$\left. + T^{\frac{(1-\mu)(1+\alpha)+\beta\theta}{1+\alpha}}(-\chi_1)^{1+\frac{\alpha_2\mu_1\beta}{1+\beta}} P_2^{\frac{\beta}{1+\beta}}(-s)^{-\frac{A_2\beta}{1+\alpha}}\right) \equiv C_1^{\frac{\beta}{1+\beta}}\left(\Gamma_T^{(3)}(s) + \Gamma_T^{(4)}(s)\right),$$

$$G_T^{(3)}(s) \le C_2^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}}\left(T^{\frac{1+\alpha-\theta}{m(p+1)(1+\alpha)}} K_1^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}}(-s)^{-\frac{A_1\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}} + \right.$$

$$\left. + T^{\frac{1+\alpha-\theta}{m(p+1)(1+\alpha)}}(-\chi_1)^{\frac{\alpha_2\theta_1\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}} K_2^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}}(-s)^{-\frac{A_2\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}}\right) \equiv$$

$$\equiv C_2^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}}\left(\Gamma_T^{(5)}(s) + \Gamma_T^{(6)}(s)\right),$$

$$G_T^{(4)}(s) \le C_1^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\beta)}}\left(T^{\frac{(1-\theta)(1+\beta)+\alpha\mu}{m(p+1)(\beta+1)}} P_1^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\beta)}}(-s)^{-\frac{B_1\alpha}{m(p+1)(1+\beta)}} + \right.$$

$$\left. + T^{\frac{(1-\theta)(1+\beta)+\alpha\mu}{m(p+1)(\beta+1)}}(-\chi_1)^{\frac{\alpha_2\mu_1\alpha}{m(p+1)(1+\beta)}} K_2^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\beta)}}(-s)^{-\frac{B_2\alpha}{m(p+1)(1+\beta)}}\right) \equiv$$

$$\equiv C_1^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\beta)}}\left(\Gamma_T^{(7)}(s) + \Gamma_T^{(8)}(s)\right).$$

В силу (67)

$$\eta(T) \ge \max_{-\infty < s_0 < 0}\left(s - c\sum_{i=1}^{4} G_T^{(i)}(s)\right),$$

откуда, очевидно, следует

$$\eta(T) \ge \min_{1\le i\le 8}\ \max_{-\infty < s_0 < 0}\left\{D_T^{(i)}(s_0)\right\}, \quad i = 1, \ldots, 8, \tag{68}$$

где $D_T^{(i)}(s) = s - \Gamma_T^{(i)}(s)$. Применяя к (68) лемму 5, получаем

$$\max_{-\infty < s_0 < 0} D_T^{(i)}(s_0) = D_T^{(i)}\left(s_{\text{opt}}^{(i)}\right) = c_i s_{\text{opt}}^{(i)}, \quad c_i > 0, \quad i = 1, \ldots, 8, \tag{69}$$

$$s_{\text{opt}}^{(4)} = c_9\,\chi_1 K^{\frac{m(p+1)(\lambda-q)}{mq(p+1)+n(p-q)}} T^{\frac{mq(p+1)+n(p-\lambda)}{mq(p+1)+n(p-q)}}, \quad 0 < c_9 < \infty, \tag{70}$$

$$s_{\text{opt}}^{(5)} \le c_{10} K^{\frac{p-q}{mq(p+1)+n(p-q)}} T^{\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)}}, \quad 0 < c_{10} < \infty. \tag{71}$$

Вычисляя аналогично значения $s_{\text{opt}}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 8$, убеждаемся, что

$$c_{11}\min\left\{s_{\text{opt}}^{(4)}, s_{\text{opt}}^{(5)}\right\} \le s_{\text{opt}}^{(i)}, \quad 0 < T < T_0, \quad i = 1, \ldots, 8, \quad c_{11} > 0.$$

Из (70) и (71) согласно (68) следует справедливость следующих оценок:

$$\eta(T) \geq -c_{12} T^{\frac{mq(p+1)+n(p-\lambda)}{mq(p+1)+n(p-q)}}, \quad c_{12} > 0,$$

$$\eta(T) \geq -c_{13} T^{\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)}}, \quad c_{13} > 0.$$

Нетрудно показать, что

$$T^{\frac{mq(p+1)+n(p-\lambda)}{mq(p+1)+n(p-q)}} \geq T^{\frac{q}{mq(p+1)+n(p-q)}}, \quad 0 < T < T_0,$$

если выполнено

$$\lambda_{cr_2} \leq \lambda < \lambda_{cr_2} + \frac{q}{n}.$$

Теорема доказана.

1. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135 – 176.
2. *Gilding B. H., Peletier L. A.* The Cauchi problem for an equation in theory of infiltration // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1976. – **61**. – P. 127 – 140.
3. *Gilding B. H.* Properties of solutions of an equation in the theory of infiltration // Ibid. – 1977. – **65**. – P. 203 – 225.
4. *Grundy R. E.* Asymptotic solution of a model nonlinear convective diffusion equation // IMA J. Appl. Math. – 1983. – **31**. – P. 121 – 137.
5. *Alvarez L., Diaz J. I., Kersner R.* On the initial growth of the interfaces in nonlinear diffusion-convection processes // Nonlinear Diffus. Equat. and Their Equilibr. States I / Ni, Peletier and Serrin, Eds. – New York; Berlin: Springer-Verlag, 1987. – P. 1 – 20.
6. *Alvarez L., Diaz J. I.* Sufficiant snd necessary initial mass conditions for the existence of a waiting time in nonlinear-convection processes // J. Math. Anal. and Appl. – 1991. – **155**. – P. 378 – 393.
7. *Diaz J. I., Kersner R.* Non existence d'une des frontieres libres dans une equation degeneree en theorie de la filtration // C. r. Acad. sci. – 1983. – **296**. – P. 505 – 508.
8. *Gilding B. H.* The occurrence of interfaces in nonlinear diffusion-advection processes // Memorandum 595, Dep. Appl. Math., Twente Univ. Technology. – 1986.
9. *Gilding B. H., Shishkov A. E.* The effect of a convection term on the propagation properties of a nonlinear parabolic equation. – Donetsk, 1998. – 57 p. – (Preprint / Inst. Appl. Math. and Mech. NAS Ukraine).
10. *Alt H., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**. – S. 311 – 341.
11. *Benilan Ph., Wittbold P.* On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems // Adv. Different. Equat. – 1996. – **1**. – P. 1053 – 1073.
12. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. – 1988. – **279**. – P. 373 – 394.
13. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Ibid. – 1988. – **14**, № 3. – P. 319 – 352.
14. *Шишков А. Е.* Распространение возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 9. – С. 139 – 160.

Получено 17.07.2000