УДК 517.518.83

П. А. Попов (Ін-т математики НАН України, Київ)

АНАЛОГ НЕРІВНОСТІ ДЖЕКСОНА ДЛЯ КООПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We prove an analog of the Jackson inequality for a coconvex approximation of continuous periodic functions with the second modulus of continuity and with a constant depending on the location of point at which a function changes its convexity.

Доведено аналог теореми Джексона для коопуклого наближення неперервних періодичних функцій з другим модулем неперервності і константою, яка залежить від розташування точок зміни опуклості функції.

1. Вступ. Нехай C — простір неперервних 2π-періодичних дійснозначних функцій f з рівномірною нормою $\|f\| := \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$; $\omega_2(f; t)$ — другий модуль неперервності функції $f \in C$.

Нагадаємо, що модулем неперервності порядку k ($k \in \mathbb{N}$) (k-м модулем неперервності) функції $f \in C[a, b]$ називається функція

$$\omega_k(f; t) := \sup_{h\in[0,t]} \sup_{x\in[a,b-kh]} \left|\Delta_h^k(f; x)\right|,$$

якщо $t \in [0, (b-a)/k]$; $\omega_k(t) := \omega_k((b-a)/k)$, якщо $t > (b-a)/k$, де

$$\Delta_h^k(f; x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x+ih)$$

— k-та скінченна різниця функції f в точці x з кроком h. Про властивості скінченних різниць та модулів неперервності див., наприклад, [1].

Через $\mathbb{T}_n$ позначимо простір тригонометричних поліномів порядку $\le n$, $n \in \mathbb{N}$.

Нехай на проміжку $[-\pi, \pi)$ задано $2s$ ($s \in \mathbb{N}$) точок y_i:

$$-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi.$$

За допомогою рівності $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ визначимо точки y_i для всіх цілих i; зокрема, $y_0 = y_{2s} + 2\pi$, $y_{2s+1} = y_1 - 2\pi$ і т. д. Позначимо $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Будемо писати $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, якщо $f \in C$ і f опукла догори (донизу) на $[y_i, y_{i-1}]$, якщо i парне (непарне).

Зауважимо, що при означенні множини $\Delta^{(2)}(Y)$ використано парну кількість $2s$ вихідних точок y_i. Формально можна скористатися непарною кількістю вихідних точок, проте в такому випадку множина $\Delta^{(2)}(Y)$ міститиме лише тотожні константи, що для наближення тригонометричними поліномами не цікаво.

Позначимо

$$\Pi(t) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{1}{2}(t - y_i)$$

і відмітимо, що $\Pi \in \mathbb{T}_s$, тобто Π — тригонометричний поліном порядку s.

Будемо говорити, що функція g коопукла з функцією $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, якщо

$g \in \Delta^{(2)}(Y)$. Якщо g є двічі неперервно диференційовною функцією, то умова $g \in \Delta^{(2)}(Y)$, як легко бачити, еквівалентна умові $g''(x)\Pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Коопуклому наближенню алгебраїчними многочленами присвячено роботи К. А. Копотуна, Д. Левіатана, І. О. Шевчука та ін. (див., наприклад, [2 – 5]).

В періодичному випадку відомі наступні результати.

Г. Г. Лоренц і К. Л. Целлер [6] довели аналог теореми Джексона для так званих дзвоноподібних функцій (тобто таких функцій $f \in C$, які є парними і незростаючими на $[0, \pi]$).

М. Г. Плешаков [7] встановив аналог теореми Джексона у випадку, коли функція $f \in C$ є кусково-монотонною з довільним скінченним числом точок зміни монотонності на періоді і довільним розташуванням цих точок.

У даній роботі доводиться аналог теореми Джексона для коопуклого наближення; більше того, отримано оцінку одразу з другим модулем неперервності. А саме, має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай задано довільне число $s \in \mathbb{N}$ і довільний набір Y. Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, то для будь-якого натурального n існує тригонометричний поліном τ_n порядку $\leq n$ такий, що*

$$\tau_n \in \Delta^{(2)}(Y),$$

і має місце оцінка

$$\|f - \tau_n\| \leq c\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right),$$

де $c = c(Y)$ — константа, яка не залежить від f і n.

Теорема 2. *Якщо $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, то існує таке число $N(Y)$, що для будь-якого натурального $n > N(Y)$ знайдеться тригонометричний поліном $\tau_{(s+2)n}$ порядку $\leq (s+2)n$ такий, що*

$$\tau_{(s+2)n} \in \Delta^{(2)}(Y), \tag{1}$$

і має місце оцінка

$$\|f - \tau_{(s+2)n}\| \leq c_1\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right), \tag{2}$$

де $c_1 = c_1(s)$ — стала, що залежить тільки від s.

Теорема 1 є наслідком нерівності Уітні $\|f - f(0)\| \leq \omega_2(f; \pi)$ і теореми 2.

В доведенні теореми 2 використано ідеї, що застосовуються для коопуклого наближення функцій в роботі К. А. Копотуна, Д. Левіатана та І. О. Шевчука [5], а також деякі факти з роботи М. Г. Плешакова [7] про комонотонне наближення.

2. Допоміжні твердження. Надалі через $c_2, \ldots, c_{11}$ позначатимемо константи, які можуть залежати лише від s.

Позначимо через

$$J_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^{2(s+2)}$$

ядро типу Джексона, де

$$\gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^{2(s+2)} dt.$$

Відомо, що це ядро має такі властивості (див. [8, с. 129–132]):

$$\int_{-\pi}^{\pi}(1+n|t|)^{2s}J_n(t)\,dt \le c_2,$$

де, очевидно, $c_2 > 1$;

$$\frac{1}{c_3}n^{2s+3} \le \gamma_n \le c_3 n^{2s+3}.$$

Зауважимо, що

$$J_n \in \mathbb{T}_{(s+2)(n-1)}.$$

При кожному $n \in \mathbb{N}$ розіб'ємо числову пряму рівновіддаленими точками

$$x_j := -\frac{j\pi}{n}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

і для кожного $j \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$\delta_j(x) := \min\left\{1; \frac{1}{n\left|\sin\dfrac{x-x_j}{2}\right|}\right\}.$$

Відзначимо деякі властивості функції δ_j. Зокрема, в [7] показано, що

$$\left\|\sum_{j=1-n}^{n}\delta_j^2\right\| < 6. \tag{3}$$

Крім того, виконуються нерівності

$$\left|\int_{x}^{x_j+\pi}\delta_j^3(t)\,dt\right| \le \frac{c_4}{n}\delta_j^2(x), \qquad x \in [x_j, x_j+2\pi], \tag{4}$$

$$\left|\int_{x}^{x_j-\pi}\delta_j^3(t)\,dt\right| \le \frac{c_4}{n}\delta_j^2(x), \qquad x \in [x_j-2\pi, x_j], \tag{5}$$

доведення яких аналогічне доведенню відповідних нерівностей з [7].

Покладемо $c_5 := 2^{2s+1}c_3c_4$:

$$m := \begin{cases}[5c_5]+1, & \text{якщо } [5c_5] \text{ непарне;}\\ [5c_5]+2, & \text{якщо } [5c_5] \text{ парне.}\end{cases}$$

Надалі розглядатимемо лише ті n, які задовольняють умову

$$n > 4s^2c_2 + 2sm + s. \tag{6}$$

Введемо наступні множини індексів:

1) $j \in H_*$, якщо $\min_{i\in\mathbb{Z}}|x_j - y_i| \ge 2sc_2\dfrac{\pi}{n}$;

2) $j \in H$, якщо $j \in H_*$, $|j| \le n$, $j \ne -n$;

3) $j \in H_0$, якщо, $j \in H$ і $(j-m) \in H, \ldots, (j+m) \in H$.

Зауваження. Очевидно, що кількість індексів j таких, що $|j| \le n$, $j \ne -n$ і які не належать H_0, не перевищує $8s^2c_2 + 4sm + 2s =: 2c_6$.

Оскільки функція f є періодичною, то можна вважати, що $y_{2s} \ne -\pi$.

Крім того, враховуючи зауваження, бачимо, що існує таке число $N :=$ $:= N(Y) > c_6$, що для будь-якого натурального $n > N(Y)$ виконуються умови:

1) для будь-якого $i = 1, 2, \dots, 2s+1$ існує таке $j \in H_0$, що $x_j \in (y_i, y_{i-1})$;

2) $n \in H_0$, $(1-n) \in H_0$.

Зафіксуємо довільне натуральне $n > N(Y)$. Для кожного $j \in \mathbb{Z}$ позначимо

$$\chi_j(x) := \begin{cases} 0, & x \le x_j; \\ 1, & x > x_j, \end{cases}$$

а для кожного $j \in H_*$

$$\tilde{T}_j(x) := \int\limits_{x_j - \pi}^{x} J_n(t - x_j) \frac{\Pi(t)}{\Pi(x_j)} dt,$$

$$d_j := \tilde{T}_j(x_j + \pi), \qquad T_j(x) := \frac{1}{d_j} \tilde{T}_j(x).$$

В [7] встановлено деякі властивості функцій T_j, які нам знадобляться далі, і тому сформулюємо їх у вигляді окремої леми.

Лема 1. *Функції T_j мають такі властивості:*

1) *якщо* $j \in H_*$, *то*

$$\Pi(x_j) T_j'(x) \Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

2) *функція* $T_j(x)$ *має вигляд*

$$T_j(x) = \frac{1}{2\pi} x + p_j(x), \tag{8}$$

де

$$p_j \in \mathbb{T}_{(s+2)(n-1)+s} \subset \mathbb{T}_{(s+2)n};$$

3) *якщо* $j \in H$, *то для будь-якого* $x \in [-\pi, \pi]$ *справедлива оцінка*

$$|\chi_j(x) - T_j(x)| \le c_5 \delta_j^3(x). \tag{9}$$

Оцінимо величину $\int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \delta_j^3(x)\, dx$. Маємо

$$\int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \delta_j^3(x)\, dx = 4 \arcsin\frac{1}{n} + 2 \int\limits_{2\arcsin\frac{1}{n}}^{x_j+\pi} \frac{dx}{n^3 \sin^3 (x - x_j)/2} \le$$

$$\le \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi^3}{n^3} \int\limits_{2\arcsin\frac{1}{n}}^{x_j+\pi} \frac{dx}{(x - x_j)^3} =$$

$$= \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi^3}{n^3} \left(-\frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{8 \arcsin^2 1/n} \right) <$$

$$< \frac{2\pi}{n} + \frac{\pi^3}{n^3}\frac{1}{4\arcsin^2 1/n} < \frac{2\pi}{n} + \frac{\pi^3}{4n^3} = \left(2+\frac{\pi^2}{4}\right)\frac{\pi}{n} < \frac{5\pi}{n}.$$

При цьому були використані відомі нерівності

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$t \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2}t, \quad t \in [\,0, 1\,].$$

При кожному $j \in H_0$ введемо функції

$$g_j^+(x) := \int_{x_j-\pi}^{x} T_{j+m}(t)\,dt, \qquad g_j^-(x) := \int_{x_j-\pi}^{x} T_{j-m}(t)\,dt.$$

Тепер, враховуючи отриману оцінку, оцінку (9) і очевидну рівність

$$\int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \delta_j(t)\,dt = \int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \delta_{j\pm m}(t)\,dt,$$

отримуємо, що для всіх $j \in H_0$ виконуються нерівності

$$\pi + \frac{m\pi}{n} - \frac{5c_5\pi}{n} \leq g_j^+(x_j+\pi) \leq \pi + \frac{m\pi}{n} + \frac{5c_5\pi}{n},$$

$$\pi - \frac{m\pi}{n} - \frac{5c_5\pi}{n} \leq g_j^-(x_j+\pi) \leq \pi - \frac{m\pi}{n} + \frac{5c_5\pi}{n}.$$

З них, очевидно, випливає, що

$$g_j^-(x_j+\pi) < \pi < g_j^+(x_j+\pi), \quad j \in H_0.$$

А відтак для кожного $j \in H_0$ існує $\alpha_j \in (0, 1)$ таке, що

$$\alpha_j g_j^+(x_j+\pi) + (1-\alpha_j)g_j^-(x_j+\pi) = \pi = \int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \chi_j(t)\,dt.$$

Покладемо

$$\varphi_j(x) := \alpha_j g_j^+(x) + (1-\alpha_j)g_j^-(x) \quad \forall j \in H_0,$$

і зауважимо, що

$$\varphi_j(x_j+\pi) = \pi, \quad j \in H_0. \tag{10}$$

При кожному $j \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$\phi_j(x) := (x-x_j)_+ = \int_{x_j-\pi}^{x} \chi_j(t)\,dt.$$

Має місце така лема.

Лема 2. *Якщо* $j \in H_0$, *то для будь-якого* $x \in [-\pi, \pi]$

$$|\varphi_j(x) - \phi_j(x)| \leq \frac{c_7}{n}\delta_j^2(x). \tag{11}$$

Доведення. Неважко показати, що $\delta_{j\pm1}(x) \le 3\delta_j(x)$, а отже, $\delta_{j\pm m}(x) \le \le 3^m \delta_j(x)$. Крім того,

$$|\chi_{j\pm m}(x)-\chi_j(x)| \le \left(\frac{m\pi}{2}\right)^3 \delta^3_{j\pm m/2}(x).$$

Тому, враховуючи оцінку (9), отримуємо

$$\left|\varphi_j'(x)-\chi_j(x)\right| = \Big|\alpha_j\big(T_{j+m}(x)-\chi_{j+m}(x)\big)+(1-\alpha_j)\big(T_{j-m}(x)-\chi_{j-m}(x)\big) +$$
$$+ \alpha_j\big(\chi_{j+m}(x)-\chi_j(x)\big)+(1-\alpha_j)\big(\chi_{j-m}(x)-\chi_j(x)\big)\Big| \le$$
$$\le 3^m\alpha_j c_5 \delta^3_{j+m}(x) + 3^m(1-\alpha_j)c_5\delta^3_{j-m}(x) +$$
$$+ \left(\frac{m\pi}{2}\right)^3\alpha_j c_5 \delta^3_{j+m/2}(x)+\left(\frac{m\pi}{2}\right)^3(1-\alpha_j)c_5\delta^3_{j-m/2}(x) \le c_8\delta^3_j(x).$$

Використовуючи нерівність (5), при $x \in [-\pi, x_j]$ одержуємо

$$\left|\varphi_j(x)-\phi_j(x)\right| = \left|\int\limits_{x_j-\pi}^{x}\big(\varphi_j'(t)-\chi_j(t)\big)dt\right| \le$$
$$\le c_8\left|\int\limits_{x_j-\pi}^{x}\delta^3_j(t)\,dt\right| \le \frac{c_8c_4}{n}\delta^2_j(x) := \frac{c_7}{n}\delta^2_j(x).$$

Якщо ж $x\in (x_j, \pi]$, то, враховуючи (10) та (4), аналогічно маємо

$$\left|\varphi_j(x)-\phi_j(x)\right| = \left|\int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi}\big(\varphi_j'(t)-\chi_j(t)\big)dt+\int\limits_{x_j+\pi}^{x}\big(\varphi_j'(t)-\chi_j(t)\big)dt\right| \le \frac{c_7}{n}\delta^2_j(x).$$

Таким чином, лему 2 доведено.

Знайдемо вигляд функції $\varphi_j(x)$, $j \in H_0$. Нехай b_j — вільний член полінома p_j з (8), $\tilde p_j(x) := p_j(x)-b_j$. Тоді

$$\varphi_j(x) = \alpha_j\left(\frac{x^2}{4\pi}-\frac{(x_j-\pi)^2}{4\pi}+b_{j+m}x-b_{j+m}(x_j-\pi)+\int\limits_{x_j-\pi}^{x}\tilde p_{j+m}(t)\,dt\right)+$$
$$+(1-\alpha_j)\left(\frac{x^2}{4\pi}-\frac{(x_j-\pi)^2}{4\pi}+b_{j-m}x-b_{j-m}(x_j-\pi)+\int\limits_{x_j-\pi}^{x}\tilde p_{j-m}(t)\,dt\right) =$$
$$= \frac{x^2}{4\pi}+\big(\alpha_jb_{j+m}+(1-\alpha_j)b_{j-m}\big)x+h_j(x),$$

де

$$h_j(x) = -\frac{(x_j-\pi)^2}{4\pi}+\int\limits_{x_j-\pi}^{x}\big(\alpha_j\tilde p_{j+m}(t)+(1-\alpha_j)\tilde p_{j-m}(t)\big)dt -$$
$$-\big(\alpha_jb_{j+m}+(1-\alpha_j)b_{j-m}\big)(x_j-\pi).$$

Щоб підрахувати $\alpha_j b_{j+m} + (1-\alpha_j) b_{j-m}$, потрібно рівності

$$\alpha_j T_{j+m}(x) = \frac{\alpha_j}{2\pi} x + \alpha_j b_{j+m} + \alpha_j \tilde{p}_{j+m}(x),$$

$$(1-\alpha_j) T_{j-m}(x) = \frac{1-\alpha_j}{2\pi} x + (1-\alpha_j) b_{j-m} + (1-\alpha_j) \tilde{p}_{j-m}(x)$$

почленно проінтегрувати від $x_j - \pi$ до $x_j + \pi$ і потім додати почленно. Враховуючи (10), після елементарних перетворень одержуємо

$$\alpha_j b_{j+m} + (1-\alpha_j) b_{j-m} = \frac{\pi - x_j}{2\pi}.$$

Отже,

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{4\pi} x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi} x + h_j(x), \tag{12}$$

де

$$h_j(x) = \frac{(x_j - \pi)^2}{4\pi} + \int\limits_{x_j - \pi}^{x} \left(\alpha_j \tilde{p}_{j+m}(t) + (1-\alpha_j) \tilde{p}_{j-m}(t) \right) dt.$$

Оскільки $p_j \in \mathbb{T}_{(s+2)(n-1)+s}$, то і

$$h_j \in \mathbb{T}_{(s+2)(n-1)+s} \subset \mathbb{T}_{(s+2)n}. \tag{12$'$}$$

Для кожного $j = 1-n, \ldots, n-1$ визначимо j_* за таким правилом. Якщо $j \in H_0$, то $j_* := j$. Якщо ж $j \notin H_0$, то виберемо j_* так, щоб виконувалися умови

$$\left(f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}) \right) \Pi(x_{j_*}) \geq 0, \qquad |j - j_*| = \min_{k \in H_0} |j - k|.$$

Внаслідок вибору числа $N(Y)$ такий індекс j_* завжди існує. Зауважимо також, що

$$\left| x_j - x_{j_*} \right| \leq \frac{c_9 \pi}{n}. \tag{13}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} V(x) :=\ & f(-\pi) + [x_n, x_{n-1}; f](x + \pi) + \\ & + \frac{n}{\pi} \sum_{j=1-n}^{n-1} \left(f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}) \right) \varphi_{j_*}(x), \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$[x_n, x_{n-1}; f] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

— перша розділена різниця функції f в точках x_n, x_{n-1}.

Надалі для скорочення запису позначимо $\Delta_j := f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})$.

Функція V має властивості, які сформулюємо у вигляді леми 3.

Лема 3. *Якщо* $f \in \Delta^{(2)}(Y)$, *то*

$$V''(x) \Pi(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

і для будь-якого $x \in [-\pi, \pi]$ *має місце оцінка*

$$|f(x) - V(x)| \leq c_{10}\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right). \tag{16}$$

Доведення. З побудови індексів j_* випливає, що

$$\Delta_j \Pi(x_{j_*}) \geq 0, \quad j = 1-n, \ldots, n-1. \tag{17}$$

Із (7), враховуючи те, що $\Pi(x_{j_*})\Pi(x_{j_* \pm m}) \geq 0$, маємо

$$\Pi(x_{j_*})\varphi''_{j_*}(x)\Pi(x) \geq 0, \quad j = 1-n, \ldots, n-1. \tag{18}$$

Тому (15) є наслідком (17) і (18).

Встановимо тепер оцінку (16). Проінтерполюємо функцію f на відрізку $[-\pi, \pi]$ ламаною з вузлами в точках x_j, $j = 1-n, \ldots, n-1$. Відомо [1, с. 143], що така ламана має вигляд

$$S(x) = f(-\pi) + [x_n, x_{n-1}; f](x+\pi) + \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j \phi_j(x).$$

З нерівності Уітні випливає, що

$$\|f - S\| \leq \omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right). \tag{19}$$

Тепер маємо

$$f(x) - V(x) = f(x) - S(x) + \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j\left(\phi_j(x) - \varphi_{j_*}(x)\right).$$

Для оцінки останньої суми розіб'ємо її на дві:

$$\sum_{j=1-n}^{n-1} = \sum_{j=1-n,\, j \in H_0}^{n-1} + \sum_{j=1-n,\, j \notin H_0}^{n-1}.$$

Першу з них, користуючись (11) і (3), оцінюємо так:

$$\frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n,\, j \in H_0}^{n-1} \Delta_j\left(\phi_j(x) - \varphi_j(x)\right) \leq \frac{c_7}{\pi}\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right)\sum_{j=1-n,\, j \in H_0}^{n-1} \delta_j^2(x) \leq$$

$$\leq \frac{c_7}{\pi}\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right)\sum_{j=1-n}^{n-1} \delta_j^2(x) \leq \frac{6c_7}{\pi}\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right). \tag{20}$$

Беручи до уваги (11), (3) і (13) та зауваження, другу суму оцінюємо в такий спосіб:

$$\frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n,\, j \notin H_0}^{n-1} \Delta_j\left(\phi_j(x) - \varphi_{j_*}(x)\right) = \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n,\, j \notin H_0}^{n-1} \Delta_j\left(\phi_j(x) - \phi_{j_*}(x)\right) +$$

$$+ \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n,\, j \notin H_0}^{n-1} \Delta_j\left(\phi_{j_*}(x) - \varphi_{j_*}(x)\right) \leq$$

$$\leq \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n,\, j \notin H_0}^{n-1} \Delta_j\left|x_j - x_{j_*}\right| + 2c_{11}\omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right) \leq$$

$$\leq c_9 \sum_{j=1-n,\, j\notin H_0}^{n-1} \Delta_j + 2c_{11}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n}\right) \leq 2(c_6c_9 + c_{11})\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n}\right). \tag{21}$$

Отже, на підставі (19), (20), (21) отримуємо (16) з константою

$$c_{10} = 1 + 2(c_6 c_9 + c_{11}),$$

і, таким чином, лему 3 доведено.

Підставляючи (12) в (14), після елементарних перетворень отримаємо функцію V у вигляді

$$V(x) = \frac{A}{4\pi}x^2 + [x_n, x_{n-1}; f]x + \frac{n}{\pi}x\sum_{j=1-n}^{n-1}\frac{\pi - x_{j_*}}{2\pi}\Delta_j + h(x), \tag{22}$$

де

$$A := \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n}^{n-1}\Delta_j = -\frac{n}{\pi}\Delta_n,$$

$$h(x) = f(-\pi) + [x_n, x_{n-1}; f]\pi + \frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n}^{n-1}\Delta_j h_{j_*}(x)$$

— поліном порядку $\leq (s+2)n$.

Пригадаємо, що $(1-n) \in H_0$, і покладемо

$$\tau_{(s+2)n}(x) := V(x) - A\varphi_{1-n}(x) + A\cdot\frac{\pi - x_{1-n}}{2\pi}x -$$

$$-\frac{n}{\pi}\sum_{j=1-n}^{n-1}\frac{\pi - x_{j_*}}{2\pi}\Delta_j - [x_n, x_{n-1}; f]x.$$

З (12), (12′) і (22) випливає, що

$$\tau_{(s+2)n} \in \mathbb{T}_{(s+2)n}.$$

3. Доведення теореми 2. Тепер можемо перейти до доведення (1). Перш за все зауважимо, що $\tau''_{(s+2)n}(x) = V''(x) - A\varphi''_{1-n}(x)$, і оскільки $x_n = -\pi \in (y_{2s+1}, y_{2s})$, то $A < 0$. Тому (1) є наслідком (15) і (18).

Нарешті, доведемо (2). Очевидно, що для цього досить оцінити $|f(x) - \tau_{(s+2)n}(x)|$ на $[-\pi, \pi]$. Вважаємо, що $x \in [-\pi, \pi]$. Тоді $|\phi_{1-n}(x)| \leq \pi/n$ і з (11) випливає, що

$$|A\varphi_{1-n}(x)| \leq \left(1 + \frac{c_7}{\pi}\right)\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n}\right). \tag{23}$$

Оскільки $\pi - x_{1-n} = \pi/n$, то

$$\left|A\frac{\pi - x_{1-n}}{2\pi}x\right| \leq \frac{1}{2}\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n}\right). \tag{24}$$

Тепер маємо

$$|f(x) - \tau_{(s+2)n}(x)| \leq |f(x) - V(x)| + |A\varphi_{1-n}(x)| +$$

$$+\left|A\frac{\pi - x_{1-n}}{2\pi}x\right| + \left|\frac{n}{\pi}x\sum_{j=1-n}^{n-1}\frac{\pi - x_{j_*}}{2\pi}\Delta_j + [x_n, x_{n-1}; f]x\right|.$$

Три перші доданки оцінено відповідно в (16), (23), (24). Для оцінки четвертого врахуємо (13) і рівність $f(x_{1-n}) = f(x_{1+n})$:

$$\left| \frac{n}{\pi} x \sum_{j=1-n}^{n-1} \frac{\pi - x_{j_*}}{2\pi} \Delta_j + [x_n, x_{n-1}; f] x \right| =$$

$$= \frac{n}{\pi} |x| \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1-n}^{n-1} (x_j - x_{j_*}) \Delta_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1-n}^{n-1} x_j \Delta_j + f(x_{n-1}) - f(x_n) \right| \le$$

$$\le \frac{c_9}{2} \omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right) + \frac{n|x|}{\pi} \left| \frac{1}{2}(-\Delta_n) + \frac{1}{2n} \sum_{j=1-n}^{n-1} j\Delta_j + f(x_{n-1}) - f(x_n) \right| =$$

$$= \frac{c_9}{2} \omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right) + \frac{n|x|}{\pi} \left| \frac{1}{2}(-\Delta_n) + \frac{1}{2n}(nf(x_{1-n}) - nf(x_{n-1})) + f(x_{n-1}) - f(x_n) \right| =$$

$$= \frac{c_9}{2} \omega_2\left(f; \frac{\pi}{n}\right).$$

Таким чином, (2) доведено з константою

$$c_1 = \frac{3}{2} + \frac{c_7}{\pi} + \frac{c_9}{2} + c_{10}.$$

Теорему 2 доведено.

Автор висловлює подяку проф. І. О. Шевчуку за постановку задачі та постійну увагу до її розв'язання.

1. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
2. *Kopotun K. A.* Pointwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials // Constr. Approxim. – 1994. – **10**. – P. 153 – 178.
3. *Kopotun K. A.* Coconvex polinomial approximation of twice differentiable functions // J. Approxim. Theory. – 1995. – **83**. – P. 141 – 156.
4. *Leviatan D.* Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**. P. 471 – 474.
5. *Kopotun K., Leviatan D., Shevchuk I. A.* The degree of coconvex polynomial approximation // Ibid. – 1999. – **127**, №2. – P. 409 – 415.
6. *Lorentz G. G., Zeller K. I.* Degree of approximation by monotone polynomials I // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**, № 4. – P. 501–504.
7. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson's inequality // Ibid. – 1999. – **99**, № 6. – P. 409 – 421.
8. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

Одержано 21.07.2000