УДК 517.9

А. А. Калюжный, Н. А. Качановский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КВАЗИАППЕЛЕВЫХ ПОЛИНОМАХ В НЕГАУССОВОМ АНАЛИЗЕ

We study an example of the construction of non-Gaussian analysis by means of orthogonal generalized Appell-like polynomials with generating function $\frac{1}{\sqrt{1-2a\lambda+\lambda^2}}\cos\left(\sqrt{x}\,\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{du}{\sqrt{u-2au^2+u^3}}\right)$, $a>1$, in the model one-dimensional case. Principal results consist in the detailed inner description of spaces of test functions, description of generalized translation operators, and in the study of integral C- and S-transforms.

Вивчається приклад побудови негауссівського аналізу за допомогою ортогональних узагальнених квазіаппелевих поліномів з твірною функцією $\frac{1}{\sqrt{1-2a\lambda+\lambda^2}}\cos\left(\sqrt{x}\,\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{du}{\sqrt{u-2au^2+u^3}}\right)$, $a>1$, у модельному одновимірному випадку. Основними результатами є докладний внутрішній опис просторів основних функцій, опис операторів узагальненого зсуву та вивчення інтегральних C- та S-перетворень.

Введение. В работе [1] доказано, что существует только пять мер, для которых можно выбрать *ортогональные* обобщенные полиномы Аппеля, т. е. полиномы с производящей функцией вида $\gamma(\lambda)e^{x\alpha(\lambda)}$. Между тем наличие явной (и достаточно простой) формулы для производящей функции дает возможность далеко продвинуться в изучении свойств таких полиномов, что оказывается очень удобным при их использовании в качестве ортогонального базиса для пространств основных функций негауссового анализа. Попытка использовать эти свойства при построении анализа не только для „пяти мер" привела к возникновению [2] и развитию так называемого *биортогонального подхода* (см., например, [3 – 6]). В настоящее время этот подход разработан с использованием *обобщенных квазиаппелевых* полиномов с производящей функцией $\gamma(\lambda)\chi(x\alpha(\lambda))$ [7, 8], а также с использованием так называемых *характеров Аппеля* с производящей функцией $\gamma(\lambda)\chi(x;\lambda)$ [9 – 11]. В последнем случае характеры Аппеля не являются, вообще говоря, полиномами. Отметим, что все упомянутые исследования проведены как в одномерном, так и в бесконечномерном случае.

Суть биортогонального подхода к построению негауссового анализа состоит в следующем: вместо ортогональных относительно некоторой меры μ полиномов в качестве ортогональных базисов в пространствах основных и обобщенных функций используются соответственно полиномы Аппеля (или квазиаппелевы полиномы, или характеры Аппеля) и биортогональные к ним системы (обобщенных) функций (вообще говоря, не полиномов даже в простейших случаях). Это позволяет, тем не менее, сохранить многие важные свойства гауссового анализа, в котором ортогональными базисами служат ортогональные относительно гауссовой меры полиномы Эрмита. К сожалению, основным и очень существенным недостатком биортогонального подхода является на сегодняшний день то, что не описаны содержательные примеры, отличные от классических. Кроме того, „неортогональность" системы полиномов (или характеров) приводит к неизбежной потере ряда результатов (в частности, элементами ортогонального базиса в пространствах обобщенных функций могут оказаться некоторые обобщенные функции, не поддающиеся описанию в явном виде, тогда как в „ортогональном" случае это всегда конкретные полиномы).

Вводя в рассмотрение обобщенные квазиаппелевы полиномы [7, 8], второй из авторов преследовал две основные цели: сохранить в максимально возможной степени результаты и возможности „биортогонального анализа", построенного с использованием обобщенных полиномов Аппеля, и избавиться от „ограничения пяти мер" с целью получить возможность строить также „ортогональный анализ". Первая из этих целей была успешно достигнута, но с реализацией второй возникли определенные трудности. Дело в том, что сравнительно небольшой класс ортогональных полиномов имеет „удобные" производящие функции.

В [12] изучен класс полиномов $\tilde{P}_n(x)$, ортогональных относительно некоторой дискретной меры μ. Производящая функция этих полиномов имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\lambda+\lambda^2}}\cos\left(\sqrt{x\frac{1}{4}\left(\int_0^\lambda\frac{du}{\sqrt{u-2au^2+u^3}}\right)^2}\right),\quad a>1, \tag{0.1}$$

т. е. является производящей функцией обобщенных квазиаппелевых полиномов. В данной статье строится негауссовский анализ в рамках биортогонального подхода в модельном одномерном случае с использованием ортогональных обобщенных квазиаппелевых полиномов с производящей функцией (0.1). (По поводу вида производящей функции см. ниже замечание 5.)

Основными результатами (кроме естественного перенесения результатов [7, 8]) являются подробное внутреннее описание пространств основных функций, описание операторов обобщенного сдвига и изучение интегральных C- и S-преобразований. Исследования статьи являются конкретизацией исследований [7, 8].

Статья состоит из двух пунктов. В первом изучаются пространства основных функций и связь с операторами обобщенного сдвига, во втором — свойства упомянутой меры μ, вложение пространств основных функций в $L^2(\mathbb{R},\mu)$, пространства обобщенных функций и интегральные преобразования.

1. Пространства основных функций и обобщенный сдвиг. В этом пункте мы построим пространства основных функций негауссового анализа с помощью обобщенных квазиаппелевых полиномов с производящей функцией (0.1), изучим их внутреннее описание и получим аналитическое выражение для оператора обобщенного сдвига.

Напомним сначала конструкцию пространств основных функций негауссового анализа, следуя [7, 8]. Пусть $\gamma:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — голоморфная в $0\in\mathbb{C}$ функция, $\gamma(0)\neq 0$; $\alpha:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — обратима в некоторой окрестности $0\in\mathbb{C}$ и голоморфна вместе с обратной, причем $\alpha(0)=0$; $\chi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — целая функция, при этом в разложении

$$\chi(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi_n}{n!}u^n \tag{1.1}$$

$\chi_n\neq 0$ для любого $n\in\mathbb{Z}_+:=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Определение 1. *Обобщенными квазиаппелевыми полиномами* $P_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$, *называются полиномы, производящая функция которых имеет вид* $\gamma(\lambda)\chi(x\alpha(\lambda))$, $\lambda\in\mathbb{C}$, *т. е.*

$$\gamma(\lambda)\chi(x\alpha(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}P_n(x)\lambda^n.$$

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ всех полиномов на $\mathbb{R}$. Его элементы можно представить в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} P_n(x)\varphi^{(n)}, \quad \varphi^{(n)} \in \mathbb{C}, \quad N \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2}$$

Заметим, что в силу условий, наложенных на χ, γ и α, полиномы $P_n(x)$ линейно независимы, и поэтому представление (1.2) для каждого $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ единственно. Введем на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ нормы, полагая для каждого φ вида (1.2)

$$\|\varphi\|_q^2 := \sum_{n=0}^{N} (n!)^2 2^{qn} \left|\varphi^{(n)}\right|^2, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

(Конечно, полиномы $P_n(x)$ и норма (1.3) зависят от χ, γ и α, но эти индексы писать не будем для упрощения обозначений.)

Определение 2. *Определим пространства основных функций* $(\mathbb{R})_{q,\chi,\gamma,\alpha}$ *как пополнения* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *по нормам* (1.3), *т. е.*

$$(\mathbb{R})_{q,\chi,\gamma,\alpha} := \left\{ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\varphi^{(n)} : \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{qn} \left|\varphi^{(n)}\right|^2 < \infty \right\}.$$

Пусть $(\mathbb{R})_\chi := \operatorname{pr\,lim}_{q\in\mathbb{N}} (\mathbb{R})_{q,\chi,\gamma,\alpha}$.

В [13] доказано, что система полиномов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *минимальна* в том смысле, что $\varphi \in (\mathbb{R})_{q,\chi,\gamma,\alpha}$ раскладывается в ряд по полиномам $P_n(x)$ *единственным образом*. При этом пространства $(\mathbb{R})_{q,\chi,\gamma,\alpha}$ являются функциональными (т. е. состоят из функций, а не из классов эквивалентности), а $(\mathbb{R})_\chi$ не зависит от γ и α как топологическое пространство.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты об изоморфных гипергруппах. Пусть $Q = [0, \infty)$ — эрмитова гипергруппа с инвариантной мерой m (см., например, [14, с. 50], [15], гл. 1). Обозначим через T_x соответствующее семейство операторов обобщенного сдвига, а через $\chi(x, \lambda)$, $x \in Q$, $\lambda \in \mathbb{C}$, множество характеров гипергруппы Q. Пусть $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — гомеоморфизм такой, что $\psi(0) = 0$. Обозначим $\overline{x} = \psi(x)$, $\overline{y} = \psi(y)$ и введем операторы $\overline{T}_{\overline{y}}$, $\overline{y} \in [0, \infty)$, в пространстве непрерывных функций $C([0, \infty))$ следующим образом:

$$\left(\overline{T}_{\overline{y}} f\right)(\overline{x}) = \left(T_y (f \circ \psi)\right)(x), \quad f \in C([0, \infty)).$$

Легко видеть, что $\overline{T}_{\overline{y}}$ также являются операторами обобщенного сдвига и порождают гипергруппу $\overline{Q} = [0, \infty)$, изоморфную Q. Обозначим через F линейный оператор

$$C_0(\overline{Q}) \ni f \mapsto Ff = f \circ \psi \in C_0(Q),$$

где $C_0(Q)$ — C^*-алгебра непрерывных функций на Q, исчезающих на бесконечности. Пусть $F^*: M(Q) \to M(\overline{Q})$ — сопряженный оператор (здесь $M(Q)$ — линейное пространство мер Радона). В [14, с. 106] показано, что F продолжается до $*$-изоморфизма банаховых алгебр $F : L^1(\overline{Q}, \overline{m}) \to L^1(Q, m)$, где

$\overline{m} = F^* m$ — инвариантная мера гипергруппы $\overline{Q}$. Характерами гипергруппы $\overline{Q}$, очевидно, являются функции $\overline{\chi}(\overline{x}, \lambda) = \chi\left(\psi^{-1}(\overline{x}), \lambda\right)$.

Пусть теперь $Q = [0, \infty)$ — эрмитова гипергруппа, характеры которой зависят от произведения координат: $\chi(x, \lambda) = \chi(x\lambda)$. В дальнейшем важную роль играет оператор обобщенного дифференцирования $:D:$, действие которого на алгебре многочленов $\dot{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ задается формулами

$$:D: x^n = 1_{\{n\geq 1\}} \frac{n\chi_{n-1}}{\chi_n} x^{n-1}, \tag{1.4}$$

где χ_n — коэффициенты разложения (1.1), а $1_{\{n\geq 1\}}$ — индикатор $\{n\geq 1\}$. Именно, оператор $:D:$ действует как дифференцирование на квазиаппелевых полиномах (при $\alpha = \mathrm{id}$), т. е. $:D: P_n(x) = nP_{n-1}(x)$. Кроме того, сопряженный к $:D:$ оператор порождает систему (вообще говоря, обобщенных) функций, биортогональную к системе квазиаппелевых полиномов $P_n(x)$. Покажем, что оператор $:D:$ с точностью до константы совпадает с генератором X гипергруппы Q, т. е. с оператором $(Xf)(x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y f\right)(x)\Big|_{x=0}$. Действительно, так как $(X\chi(\cdot\lambda))(x) = \frac{\partial}{\partial y}\chi(y\lambda)\Big|_{x=0}\chi(x\lambda) = \lambda\chi_1\chi(x\lambda)$, то, применяя оператор X к обеим частям разложения

$$\chi(x\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_n x^n \frac{\lambda^n}{n!},$$

получаем

$$\chi_1 \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{n-1} x^{n-1} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_n X(x^n) \frac{\lambda^n}{n!},$$

откуда $:D: = \chi_1^{-1} X$. Заметим, что подобная формула справедлива и в более общем случае, описанном в [10].

В настоящей статье будем рассматривать обобщенные квазиаппелевы полиномы с производящей функцией (0.1), т. е. в данном случае

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\lambda + \lambda^2}},$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{4}\left(\int_0^{\lambda} \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1 - 2au + u^2}}\right)^2, \tag{1.5}$$

$$\chi(u) = \cos\sqrt{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} u^n,$$

где $a > 1$ — некоторая константа. Легко видеть, что γ и χ удовлетворяют наложенным выше условиям.

Лемма. *Функция* $\alpha(\lambda) = \frac{1}{4}\left(\int_0^{\lambda} \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1-2au+u^2}}\right)^2$ *обратима в некоторой окрестности нуля и голоморфна вместе с обратной в* $0 \in \mathbb{C}$, *причем* $\alpha(0) = 0$.

Доказательство. Поскольку функция $f(u) := \dfrac{1}{\sqrt{1-2au+u^2}}$, $u \in \mathbb{C}$, очевидно, голоморфна в $0 \in \mathbb{C}$, разложим ее в ряд Тейлора: $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n u^n$, причем $K_0 = f(0) = 1$. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-2au+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n u^{n-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n u^{n-1/2}.$$

Ряд в последнем равенстве сходится равномерно на некоторой окрестности $0 \in \mathbb{C}$ (следствие голоморфности f), поэтому его можно почленно проинтегрировать. Имеем

$$\int_0^{\lambda} \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1-2au+u^2}} = 2\sqrt{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{n+1/2} \lambda^{n+1/2} = \sqrt{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n+1/2} \lambda^n.$$

Таким образом, $\alpha(\lambda) = \dfrac{1}{4}\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{K_n}{n+1/2}\lambda^n\right)^2$ голоморфна в $0 \in \mathbb{C}$ как произведение голоморфных функций. Далее, ясно, что $\alpha(0) = 0$, и легко подсчитать, что $\alpha'(0) = 1$. Однако тогда в силу теоремы о существовании и голоморфности обратной функции (см., например, [16, с. 329]) α обратима в окрестности нуля и обратная функция голоморфна в $0 \in \mathbb{C}$.

Как известно, ключевое значение в теории гипергрупп имеют операторы обобщенного сдвига. В рамках анализа, изучаемого в данной статье, эти операторы не занимают столь фундаментального положения; но, тем не менее, они полезны для получения свойств оператора обобщенного дифференцирования и необходимы для построения C-преобразования. Обратимся к подробному изучению операторов обобщенного сдвига. (Конечно, их можно было бы ввести с помощью формальных определений и ограничиться рассмотрением лишь простейших „общих" свойств [17], но в данном конкретном случае можно найти удобную аналитическую формулу, что в общем случае невозможно.) А именно, покажем, что *операторы обобщенного сдвига* T_y *заданы формулой*

$$(T_y f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left((\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\right) + f\left((\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\right)\right), \quad f \in C([0,\infty)), \tag{1.6}$$

и связаны с гипергруппой $Q = [0, \infty)$, *изоморфной гипергруппе Дельсарта* $\overline{Q} = [0, \infty)$:

$$(\overline{T}_y f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) + f(|x-y|)\right), \quad f \in C([0,\infty)).$$

Действительно, пусть гомеоморфизм $\psi: \overline{Q} \to Q$ задан формулой $\psi(x) = x^2$. Тогда для произвольной функции $f \in C(Q)$ имеем

$$(T_y f)(x) = \left(T_{\psi(\sqrt{x})} f\right)(\psi(\sqrt{y})) = \left(\overline{T}_{\sqrt{x}} f \circ \psi\right)(\sqrt{y}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f\left((\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\right) + f\left((\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\right)\right),$$

откуда следует (1.6). Лемма доказана.

Оператор обобщенного дифференцирования $:D:$ согласно (1.4) задается формулой

$$:D: x^n := 1_{\{n\geq 1\}} \frac{n\chi_{n-1}}{\chi_n} x^{n-1} = -1_{\{n\geq 1\}} 2C_{2n}^2 x^{n-1},$$

где $1_{\{n\geq 1\}}$ — индикатор $\{n\geq 1\}$. Поскольку $:D: = \chi_1^{-1}X$, где X — генератор гипергруппы Q, а $\chi_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}$, из (1,4) легко следует явная формула для оператора $:D:$, а именно, $:D: = -4x\dfrac{d^2}{dx^2} - 2\dfrac{d}{dx}$.

Обозначим обобщенные квазиаппелевы полиномы, соответствующие производящей функции (0.1), через $\tilde{P}_n(x)$.

***Замечание* 1.** Тот факт, что аналитическая формула для T_y справедлива лишь при неотрицательных x и y, по сути не является ограничительным. Дело в том, что мера, относительно которой ортогональны полиномы $\tilde{P}_n(x)$, сосредоточена на $\mathbb{R}_+$ (см. [12] и п. 2). Более того, в силу этого можно с самого начала полагать, что полиномы $\tilde{P}_n(x)$ и основные функции определены на $\mathbb{R}_+$. Несмотря на то, что $(\mathbb{R}_+, +)$ не является линейным пространством, все доказанные в этой статье утверждения при таком рассмотрении сохраняются.

Пусть $(\tilde{\mathbb{R}})_q$, $(\tilde{\mathbb{R}}) = \operatorname{pr}\lim_{q\in\mathbb{N}}(\tilde{\mathbb{R}})_q$ — пространства основных функций, построенные по обобщенным квазиаппелевым полиномам $\tilde{P}_n(x)$. В [17] показано, что пространство $(\tilde{\mathbb{R}})$ инвариантно относительно операторов обобщенного сдвига T_y. Согласно [8, 13] $(\tilde{\mathbb{R}})$ состоит из сужений на $\mathbb{R}$ целых на $\mathbb{C}$ функций. Мы можем значительно уточнить это описание.

Определение 3 [5, 18]. *Линейное пространство целых функций на* $\mathbb{C}$ *с нормой* $n_{l,k}(\varphi) := \sup_{u\in\mathbb{C}}|\varphi(u)|\exp\{-2^{-l}|u|^k\}$ *назовем пространством целых функций порядка* k *типа* 2^{-l} *и обозначим его* $\mathscr{E}^k_{2^{-l}}$. *Пространство целых функций порядка* k *минимального типа* $\mathscr{E}^k_{\min} := \operatorname{pr}\lim_{l\in\mathbb{N}}\mathscr{E}^k_{2^{-l}}$.

Теорема 1. *Пространство* $(\tilde{\mathbb{R}})$ *состоит из сужений на* $\mathbb{R}$ *(всех) целых на* $\mathbb{C}$ *функций порядка* $1/2$ *минимального типа.*

Доказательство. Установим сначала эквивалентность следующих утверждений:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^4 2^{qn}\left|\varphi^{(n)}\right|^2 < \infty \quad \forall q\in\mathbb{N};$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}((2n)!)^2 2^{qn}\left|\varphi^{(n)}\right|^2 < \infty \quad \forall q\in\mathbb{N},$

где $\left\{\varphi^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность комплексных чисел.

i) $\Rightarrow$ ii). Поскольку $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 2^{2n}$, имеем

$$((2n)!)^2 2^{qn}\left|\varphi^{(n)}\right|^2 = \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 (n!)^4 2^{qn}\left|\varphi^{(n)}\right|^2 \leq (n!)^4 2^{(q+4)n}\left|\varphi^{(n)}\right|^2,$$

откуда и следует требуемое.

ii) $\Rightarrow$ i). Поскольку $(2n)! \geq (n!)^2$, имеем

$$((2n)!)^2 2^{qn} \left|\varphi^{(n)}\right|^2 \geq (n!)^4 2^{qn} \left|\varphi^{(n)}\right|^2,$$

откуда и следует требуемое.

Теперь воспользуемся тем, что пространство $(\tilde{\mathbb{R}})$ не зависит от γ и α в производящей функции „породивших" его обобщенных квазиаппелевых полиномов. В силу этого можно утверждать, что $\varphi \in (\tilde{\mathbb{R}})$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} \tilde{\varphi}^{(n)}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{qn} \left|\tilde{\varphi}^{(n)}\right|^2 < \infty$ для любого $q \in \mathbb{N}$ (так как $x^n \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$ — обобщенные квазиаппелевы полиномы с производящей функцией $\cos\sqrt{x\lambda}$). Вводя обозначение $\varphi^{(n)} := \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} \tilde{\varphi}^{(n)}$, видим, что $\varphi \in (\tilde{\mathbb{R}})$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi^{(n)}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} ((2n)!)^2 2^{qn} \left|\varphi^{(n)}\right|^2 < \infty$ для любого $q \in \mathbb{N}$. Согласно доказанному выше последнее условие можно заменить на $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^4 2^{qn} \left|\varphi^{(n)}\right|^2 < \infty$ для любого $q \in \mathbb{N}$. Для завершения доказательства осталось заметить, что в [5] доказан следующий факт: $\varphi \in \mathscr{E}^k_{\min}$ $(k > 0)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi^{(n)}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{2/k} 2^{qn} \left|\varphi^{(n)}\right|^2 < \infty$ для любого $q \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Из формулы

$$\frac{\sin\left(\sqrt{x\alpha(\lambda)}\right)}{\sqrt{x\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(x)}{2n+1} \frac{\lambda^n}{n!}, \tag{1.7}$$

полученной в [12], вытекает, что полиномы $\overline{P}_n(x) = (2n+1)^{-1} \tilde{P}_n(x)$ также являются (ортогональными) квазиаппелевыми полиномами, порожденными гипергруппой $\hat{Q} = [-1, \infty)$, двойственной к гипергруппе, изоморфной гипергруппе Наймарка. Напомним, что гипергруппа Наймарка (по существу, введенная в [19], п. 20.3б) порождена операторами обобщенного сдвига

$$\left(T_y f\right)(x) = \frac{1}{2\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} \int_{|x-y|}^{x+y} f(t) \operatorname{sh} t \, dt,$$

и имеет характеры $\chi(x, \lambda) = \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right)\left(\sqrt{\lambda} \operatorname{sh} x\right)^{-1}$ (при $\lambda \in [-1, \infty)$ характеры $\chi(x, \lambda)$ являются эрмитовыми и ограниченными). Действительно, функция $\psi(x) = x^2$ осуществляет изоморфизм гипергруппы Наймарка и гипергруппы $\overline{Q} = [0, \infty)$, характеры которой имеют вид $\overline{\chi}(x, \lambda) = \sin\left(\sqrt{\lambda x}\right)\left(\sqrt{\lambda} \operatorname{sh}\sqrt{x}\right)^{-1}$, $x \in \overline{Q}$, $\lambda \in [-1, \infty)$. Тогда характеры гипергруппы $\hat{Q} = [-1, \infty)$, двойственной к $\overline{Q}$, имеют вид $\hat{\chi}(x, \lambda) = \sin\left(\sqrt{\lambda x}\right)\left(\sqrt{x} \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\right)^{-1}$, $x \in [-1, \infty)$, $\lambda \in [0, \infty)$ (заметим, что единицей двойственной гипергруппы является точка -1). Таким образом, левая часть (1.7) имеет вид $\tilde{\gamma}(\lambda)\hat{\chi}(x, \alpha(\lambda))$, где $\tilde{\gamma}(\lambda) =$

$= \operatorname{sh}\left(\sqrt{\alpha(\lambda)}\right)\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}$, а $\alpha(\lambda)$ задана формулой (1.5). Поскольку $\tilde{\gamma}(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ — голоморфные функции, причем $\tilde{\gamma}(0) = 1$ и $\alpha(0) = 0$, то можно построить соответствующие пространства основных и обобщенных функций, следуя [7, 8], и дать их внутреннее описание. Явный вид операторов обобщенного сдвига, связанных с гипергруппой $\hat{Q}$, по существу, дан в [20].

2. Пространства обобщенных функций и интегральные преобразования. В этом пункте мы рассмотрим меру μ на $\mathbb{R}$ такую, что полиномы $\tilde{P}_n(x)$ ортогональны в скалярном произведении $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Затем докажем, что $(\tilde{\mathbb{R}})$ плотно вложено в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$; рассмотрим пространства обобщенных функций и изучим интегральные C- и S-преобразования.

В [12] показано, что для системы обобщенных квазиаппелевых полиномов $\tilde{P}_n(x)$ существует единственная вероятностная мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что эти полиномы ортогональны относительно скалярного произведения в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Указанная мера дискретна и сосредоточена в точках

$$x_n = \frac{(n+1/2)^2\pi^2}{\alpha\left(e^{-\phi}\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\phi \in \mathbb{R}$ определяется из условия $a = \operatorname{ch}\phi$. Ее значения

$$\mu(x_n) = \frac{\pi^2}{\alpha\left(e^{-\phi}\right)} \frac{(2n+1)c^{n+1/2}}{1-c^{2n+1}},$$

где $c = e^{-\pi K'/K}$ — число, связанное с эллиптическими функциями (подробнее см. [12]).

Соотношение ортогональности полиномов имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{P}_n(x)\tilde{P}_m(x)\mu(dx) = \delta_{mn}(n!)^2(2n+1). \tag{2.1}$$

Рассмотрим *ортонормированные* полиномы $G_n(x) = \dfrac{(-1)^n \tilde{P}_n(x)}{n!\sqrt{2n+1}}$ с положительными старшими коэффициентами (для них $\int_{\mathbb{R}} G_n(x)G_m(x)\mu(dx) = \delta_{nm}$). Как известно, такие полиномы удовлетворяют трехчленным соотношениям вида

$$x G_n(x) = a_{n-1} G_{n-1}(x) + b_n G_n(x) + a_n G_{n+1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.2}$$

где $(a_n)_{n=-1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ — числовые последовательности, $a_{-1} = 0$. Из результатов [12] нетрудно вывести, что $a_n = 2(n+1)\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}$, $b_n = 2a(2n+1)^2$.

Обозначим через $\mathbf{L}$ разностный оператор в пространстве l_2, для которого $(G_n(x))$ являются ортогональными полиномами I рода (см., например, [21]).

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Оператор* $\mathbf{L}$ *самосопряжен в* $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

2. *Вложение множества полиномов* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *в* $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ *плотное.*

Доказательство. Согласно [21, с. 519], второе утверждение является следствием первого. Докажем первое утверждение. Поскольку $a_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то согласно [21, с. 512] достаточно доказать, что существует $C \in (0, +\infty)$ такое, что $a_{n-1} + a_n - b_n \le C \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, где a_n, b_n — числа из соотношений (2.2). Имеем

$$a_{n-1} + a_n - b_n = 2n\sqrt{2n-1}\sqrt{2n+1} +$$

$$+ 2(n+1)\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} - 2a(2n+1)^2 \le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2n+1}\left[n^3(8-8a^2)+n^2(12-12a^2)+n(10-6a^2)+3-a^2\right]}{n\sqrt{2n-1}+(n+1)\sqrt{2n+3}+a(2n+1)^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty,$$

так как $a > 1$. Теорема доказана.

***Замечание* 3.** В [12] доказано, что при $a > 1$ проблема моментов для меры μ определена, откуда следует плотность множества полиномов в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Однако доказательство теоремы 2 значительно проще, чем доказательство определенности проблемы моментов в [12].

***Замечание* 4.** В „биортогональном анализе" для доказательства плотности множества полиномов в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ обычно используют следующее *достаточное* условие [22]: если преобразование Лапласа $l_\rho(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{x\lambda}\rho(dx)$ меры ρ — голоморфная в нуле функция, то $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ плотно вложено в $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ (аналогичное утверждение имеет место и в бесконечномерном случае). Вычислим преобразование Лапласа меры μ, рассматриваемой в данной статье. Имеем

$$l_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{x\lambda}\mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{x_n\lambda}\mu(x_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{\lambda(n+1/2)^2\pi^2}{\alpha(e^{-\phi})}} \frac{\pi^2}{\alpha(e^{-\phi})} \frac{(2n+1)c^{n+1/2}}{1-c^{2n+1}}. \tag{2.3}$$

Ясно, что ряд в правой части (2.3) расходится при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, поэтому преобразование Лапласа μ — *неголоморфная* в $0 \in \mathbb{C}$ функция (в терминах [4 – 6] это означает, что мера μ не аналитическая). Таким образом, в данном случае нельзя непосредственно использовать упомянутое утверждение из [22]. Тем не менее, доказать плотность множества полиномов в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ можно и не пользуясь свойствами оператора $\mathbf{L}$, а применяя методику, аналогичную изложенной в [22]. Такое доказательство сложнее приведенного выше, но не требует ссылок на нетривиальные теоремы из [21].

Обратимся теперь к вопросу о вложении пространств основных функций $(\tilde{\mathbb{R}})_q$ в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. В [13] сформулированы простые *достаточные* условия, при которых подобные вложения имеют место. Мы не будем, однако, формулировать здесь эти условия, поскольку они сейчас не выполнены. Тем не менее, ортогональность полиномов $\tilde{P}_n(x)$ позволяет доказать утверждение о вложении.

Теорема 3. *При любом* $q \in \mathbb{N}$ *имеет место плотное вложение* $(\tilde{\mathbb{R}})_q \subset$ $\subset L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Тогда $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{P}_n(x)\varphi^{(n)}$ и

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu)} = \sum_{n=0}^{N}(n!)^2(2n+1)\left|\varphi^{(n)}\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{N}(n!)^2 2^{qn}\left|\varphi^{(n)}\right|^2 = \|\varphi\|^2_q, \quad q\in\mathbb{N}.$$

Далее, легко видеть, что для $\varphi\in\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)_q$ равенство $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R},\mu)}=0$ справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi^{(n)}=0$ для каждого $n\in\mathbb{Z}_+$. Но тогда и $\|\varphi\|_q = 0$ для любого $q\in\mathbb{N}$. Следовательно, требуемое включение имеет место (см., например, [23, с. 51]). Плотность вложения следует из теоремы 2.

***Замечание* 5.** Очевидно, что можно было бы строить „биортогональный анализ", используя производящую функцию

$$\gamma(\lambda)\cos\left(x\sqrt{\alpha(\lambda)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}R_{2n}(x)\lambda^n,$$

связанную с обобщенным сдвигом Дельсарта $T_x f(y) = (f(x+y)+f(|x-y|))/2$ (здесь γ и α имеют вид (1.5)). Получаемые при этом характеры Аппеля $R_{2n}(x) = = \tilde{P}_n(x^2)$, очевидно, ортогональны относительно меры ν, сосредоточенной в точках $x_n = \dfrac{(n+1/2)\pi}{\sqrt{\alpha(e^{-\phi})}}$, такой, что $\nu(x_n) = \mu\left(x_n^2\right)$, и удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$x^2\tilde{R}_{2n}(x) = 2(n+1)\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}\,\tilde{R}_{2n+2}(x) + 2a(n+1)^2\tilde{R}_{2n}(x) +$$

$$+ 2n\sqrt{2n-1}\sqrt{2n+1}\,\tilde{R}_{2n-2}(x),$$

которые вытекают из рекуррентных соотношений для ортогональных полиномов $\tilde{P}_n(x)$ (здесь $\tilde{R}_{2n}$ пропорциональны R_{2n} и нормированы так, что $\int_{\mathbb{R}}\tilde{R}_{2n}(x)\tilde{R}_{2m}(x)\nu(dx) = \delta_{nm}$). Однако семейство характеров Аппеля (R_{2n}) *не плотно в пространстве* $L^2(\mathbb{R},\nu)$, что не позволяет построить „естественные" пространства обобщенных функций. Кроме того, можно показать, что полиномы R_{2n} могут быть полиномами четных степеней для некоторой системы ортогональных полиномов тогда и только тогда, когда $a=1$. Именно эти два недостатка приводят к необходимости построения „биортогонального анализа" с производящей функцией (0.1) и обобщенным сдвигом (1.6).

Прежде чем переходить к изучению пространств обобщенных функций, рассмотрим так называемое интегральное C-преобразование [4, 5, 10, 11].

Определение 4. *Определим оператор* $C\colon\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)\to\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$, *полагая для* $\varphi\in\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$

$$(C\varphi)(x) := \int_0^{\infty}\left(T_y\varphi\right)(x)\mu(dy).$$

Корректность этого определения $\left(\text{т. е. тот факт, что } (C\varphi)(\cdot)\in\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)\right)$ можно получить из свойств целых функций и теоремы 1. Однако не будем этого делать и вернемся к вопросу о корректности ниже.

Обозначим через $P_n^{\gamma,\alpha}(x)$ обобщенные квазиаппелевы полиномы, порожденные производящей функцией $\gamma(\lambda)\cos\left(\sqrt{x\alpha(\lambda)}\right)$. Следуя [10, 11], назовем $P_n^{1,\alpha}(x)$ характерами Дельсарта, а $P_n^{\tilde{\gamma},\alpha}(x)$, где $\tilde{\gamma}(\lambda) := \left(\int_0^\infty \cos\sqrt{y\alpha(\lambda)}\,\mu(dy)\right)^{-1}$, характерами Аппеля. В [10, 11] показано, что C-преобразование переводит характеры Аппеля в характеры Дельсарта. Аналогичное утверждение имеет место и в нашей ситуации.

Теорема 4. *При любом* $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\left(CP_n^{\gamma,\alpha}\right)(x) = P_n^{\gamma(\cdot)\int_0^\infty \cos\sqrt{y\alpha(\cdot)}\,\mu(dy),\,\alpha}(x).$$

В частности, $\left(CP_n^{\tilde{\gamma},\alpha}\right)(x) = P_n^{1,\alpha}(x)$, *т. е.* C*-преобразование переводит характеры Аппеля в характеры Дельсарта.*

Замечание 6. Из ортогональности полиномов $\tilde{P}_n(x)$ и очевидного равенства $\tilde{P}_0(x) \equiv 1$ следует

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\lambda+\lambda^2}}\int_0^\infty \cos\left(\sqrt{x}\,\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{du}{\sqrt{u-2au^2+u^3}}\right)\mu(dx) = 1,$$

поэтому при $\alpha(\lambda) = \dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\int_0^\lambda \frac{du}{\sqrt{u-2au^2+u^3}}\right)^2$ имеем $\left(CP_n^{\gamma(\lambda),\alpha(\lambda)}\right)(x) = P_n^{\gamma(\lambda)\sqrt{1-2a\lambda+\lambda^2},\,\alpha(\lambda)}(x)$. В частности, $\left(C\tilde{P}_n\right)(x) = P_n^{1,\alpha}(x)$.

Доказательство теоремы 4. Согласно определению C-преобразования и свойствам обобщенного сдвига мы должны доказать, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\int_0^\infty P_n^{\gamma(\cdot)\cos\sqrt{y\alpha(\cdot)},\,\alpha}(x)\,\mu(dy) = P_n^{\gamma(\cdot)\int_0^\infty \cos\sqrt{y\alpha(\cdot)}\,\mu(dy),\,\alpha}(x). \tag{2.4}$$

В [7] доказано, что

$$P_n^{\gamma_1(\cdot)\gamma_2(\cdot),\,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k P_{n-k}^{\gamma_1,\alpha}(x)\gamma_2^{(k)}, \tag{2.5}$$

где $\gamma_2^{(k)} \in \mathbb{C}$ из разложения $\gamma_2(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{1}{k!}\gamma_2^{(k)}\lambda^k$. В частности,

$$P_n^{\gamma(\cdot)\cos\sqrt{y\alpha(\cdot)},\,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k P_{n-k}^{\gamma,\alpha}(x)P_k^{1,\alpha}(y),$$

откуда

$$\int_0^\infty P_n^{\gamma(\cdot)\cos\sqrt{y\alpha(\cdot)},\,\alpha}(x)\,\mu(dy) = \sum_{k=0}^n C_n^k P_{n-k}^{\gamma,\alpha}(x)\int_0^\infty P_k^{1,\alpha}(y)\,\mu(dy).$$

Таким образом, если мы докажем, что

$$\int_0^\infty \cos\sqrt{y\alpha(\lambda)}\,\mu(dy) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\int_0^\infty P_k^{1,\alpha}(y)\,\mu(dy)\,\lambda^k$$

(при λ из некоторой окрестности $0 \in \mathbb{C}$), то (2.4) будет очевидным образом следовать из (2.5). Пусть $f_n(y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P_k^{1,\alpha}(y)\lambda^k$. Ясно, что $f_n(y) \to \to \cos\sqrt{y\alpha(\lambda)}$ при $n \to \infty$ поточечно на $\mathbb{R}_+$ и

$$\int_0^\infty f_n(y)\mu(dy) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^\infty P_k^{1,\alpha}(y)\mu(dy)\lambda^k, \tag{2.6}$$

поэтому для завершения доказательства достаточно обосновать возможность предельного перехода под знаком интеграла в левой части (2.6). В силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости для этого достаточно указать интегрируемую на $\mathbb{R}_+$ функцию f такую, что $|f_n(y)| \le |f(y)|$ для μ-почти всех $y \in \in \mathbb{R}_+$ и всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В качестве такой функции выберем $f(y) := := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left|P_k^{1,\alpha}(y)\right| |\lambda|^k$ и докажем ее интегрируемость. Поскольку

$$\int_0^\infty \left|P_k^{1,\alpha}(y)\right|\mu(dy) \le \left(\int_0^\infty \left|P_k^{1,\alpha}(y)\right|^2 \mu(dy)\right)^{1/2} \le k! M^k K$$

для некоторых $M > 1$ и $K > 0$ (использовано неравенство Коши – Буняковского и $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$, последнее неравенство — несложное следствие соотношения ортогональности (2.1) и голоморфности α), в силу теоремы Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int_0^\infty f(y)\mu(dy) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left|P_k^{1,\alpha}(y)\right| |\lambda|^k \mu(dy) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^\infty \left|P_k^{1,\alpha}(y)\right| \mu(dy) |\lambda|^k \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} k! M^k K |\lambda|^k = \frac{K}{1 - |\lambda| M} < \infty,$$

так как λ можно выбрать таким, что $|\lambda| M < 1$. Теорема доказана.

Следствие. *Определение* 4 *корректно, т. е.* $(C\varphi)(\cdot) \in \left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$. *Более того,* C *— линейный непрерывный оператор на* $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$. Это означает, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{1,\mathrm{id}}(x)\varphi^{(k)} \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_q^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^2 2^{qk} \left|\varphi^{(k)}\right|^2 < \infty$$

для любого $q \in \mathbb{N}$. В силу свойств обобщенного сдвига [17] можно написать $\left(T_y\varphi\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\cos\sqrt{y\cdot},\mathrm{id}}(x)\varphi^{(k)}$. Поэтому (в силу (2.4) и инвариантности $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$ относительно γ и α в производящей функции обобщенных квазиаппелевых полиномов) достаточно доказать, что

$$\int_0^\infty \left(T_y\varphi\right)(x)\mu(dy) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty P_k^{\cos\sqrt{y\cdot},\mathrm{id}}(x)\mu(dy)\varphi^{(k)}.$$

Пусть $\psi_n(y) := \sum_{k=0}^{n} P_k^{\cos\sqrt{y\cdot},\mathrm{id}}(x)\varphi^{(k)}$. Ясно, что $\psi_n(y) \to \left(T_y\varphi\right)(x)$ при $n \to \infty$ поточечно на $\mathbb{R}$ и

$$\int_0^\infty \psi_n(y)\mu(dy) = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty P_k^{\cos\sqrt{y\cdot},\mathrm{id}}(x)\mu(dy)\varphi^{(k)}.$$

Возможность предельного перехода в левой части этого равенства следует из теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Именно, в качестве интегрируемой мажоранты для последовательности $\psi_n(y)$ выберем $\psi(y) := \sum_{k=0}^{n}\left|P_k^{\cos\sqrt{y\cdot},\mathrm{id}}(x)\right|\left|\varphi^{(k)}\right|$, для которой в силу теоремы Б. Леви

$$\int_0^\infty \psi(y)\mu(dy) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty \left|P_k^{\cos\sqrt{y\cdot},\mathrm{id}}(x)\right|\mu(dy)\left|\varphi^{(k)}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} k!M^k K\left|\varphi^{(k)}\right| \le$$

$$\le K\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^2 2^{qk}\left|\varphi^{(k)}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\right)^{1/2} = \sqrt{2}K\|\varphi\|_q < \infty,$$

если $q \in \mathbb{N}$ столь велико, что $M^2 \le 2^{(q-1)}$. Таким образом, корректность определения 4 доказана. Линейность оператора C очевидна, непрерывность следует из теоремы 4 и оценок, получаемых при доказательстве инвариантности $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$ относительно γ.

Поскольку пространства основных функций $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)_q$, $q \in \mathbb{N}$, плотно вложены в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, можно рассматривать пространства обобщенных функций $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'_{-q}$, сопряженные к $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)_q$ относительно $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Пространство $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)' := \operatorname{ind}\lim_{q\in\mathbb{N}}\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'_{-q}$ будет сопряжено к $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$. В [7] доказано, что в $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'_{-q}$ существует ортогональный базис — система функций $\tilde{Q}_m(x)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, таких, что любая обобщенная функция $\Phi \in \left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'_{-q}$ представима в виде

$$\Phi(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty}\tilde{Q}_m(\cdot)\Phi^{(m)}, \tag{2.7}$$

причем

$$\|\Phi\|_{-q}^2 := \sum_{m=0}^{\infty}2^{-qm}\left|\Phi^{(m)}\right|^2 < \infty \tag{2.8}$$

и любая последовательность комплексных чисел $\Phi^{(m)}$, удовлетворяющая (2.8), порождает согласно формуле (2.7) обобщенную функцию из $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'_{-q}$. (Заметим, что элементы $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'_{-q}$ мы называем обобщенными функциями, так как ряд (2.7) не сходится, вообще говоря, даже поточечно.) Ясно, что $\Phi \in \left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'$ тогда и только тогда, когда она представима в виде (2.7) с последовательностью коэффициентов, для которых (2.8) справедливо с некоторым $q \in \mathbb{N}$. Функции $\tilde{Q}_m$ порождаются оператором $:D:^*$, сопряженным относительно пространства $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ к оператору обобщенного дифференцирования [7, 8]. Эти функции связаны с полиномами $\tilde{P}_n$ соотношением биортогональности:

$$\left\langle\left\langle \tilde{Q}_m(\cdot), \tilde{P}_n(\cdot) \right\rangle\right\rangle = \delta_{nm}\, n!, \tag{2.9}$$

где $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ — спаривание между элементами $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'_{-q}$ и $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)_q$ (а также $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'$ и $\left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$), порожденное скалярным произведением в $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Сравнивая (2.9) с соотношением ортогональности (2.1), заключаем, что

$$\tilde{Q}_m(x) = \frac{1}{m!(2m+1)} \tilde{P}_m(x),$$

т. е. здесь по сути рассмотрен пример „ортогонального анализа”.

***Замечание* 7.** Аналогичные факты относительно пространств обобщенных функций имеют место и при построении пространств основных функций с помощью неортогональных обобщенных квазиаппелевых полиномов [7, 8]. Однако в таком случае соответствующие элементы $Q_m^{\gamma,\alpha}(\cdot)$ не являются, вообще говоря, полиномами и даже могут быть обобщенными функциями.

Пример (δ-функция). Положим $\delta_y(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{Q}_n(\cdot)\tilde{P}_n(y)$. Используя оценку $\left|\tilde{P}_n(x)\right| \le n! M^n K(x)$ для некоторого $M > 1$ и функции $K(x)$ с неотрицательными значениями [7], имеем

$$\left\|\delta_y\right\|_{-q}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-qn}}{(n!)^2} \left|\tilde{P}_n(y)\right|^2 \le K^2(y) \sum_{n=0}^{\infty} M^{2n} 2^{-qn} < \infty,$$

если $q \in \mathbb{N}$ столь велико, что $M^2 < 2^q$. Поэтому $\delta_y \in \left(\tilde{\mathbb{R}}\right)'$. С помощью соотношения биортогональности (2.9) легко подсчитать, что $\left\langle\left\langle \delta_y, \varphi \right\rangle\right\rangle = \varphi(y)$ для любого $\varphi \in \left(\tilde{\mathbb{R}}\right)$, поэтому δ_y играет сейчас роль δ-функции. Несложный подсчет [7] показывает, что обобщенные функции $\left(\alpha^{-1}(:D:)^{m*}\delta_0\right)(\cdot) =: Q_m^{1,\alpha}(\cdot)$ (где $\alpha^{-1}(:D:)^{m*}$ — оператор, сопряженный к $\alpha^{-1}(:D:)^m$ относительно $L^2(\mathbb{R}, \mu)$) биортогональны к обобщенным квазиаппелевым полиномам $P_n^{1,\alpha}(x)$ с производящей функцией $\cos\sqrt{x\alpha(\lambda)}$ — характерам Дельсарта.

В случае, когда ρ — гауссова мера на $\mathbb{R}$ (т. е. преобразование Лапласа $l_\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{x\lambda}\rho(dx) = e^{\lambda^2/2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$), а роль полиномов $\tilde{P}_n(x)$ играют полиномы Эрмита $h_n(x)$, порожденные производящей функцией $e^{x\lambda - \lambda^2/2}$, C-преобразование можно продолжить до линейного оператора с областью определения $(\mathbb{R})'$ (соответствующее пространство обобщенных функций). При этом оказывается, что

$$(C\varphi)(\lambda) = \left\langle\left\langle \Phi, e^{\cdot\lambda - \lambda^2/2} \right\rangle\right\rangle_\rho, \tag{2.10}$$

где $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_\rho$ обозначает спаривание, порожденное скалярным произведением в

$L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Если мера ρ не является гауссовой, соотношение типа (2.10) уже не имеет места. Однако изучение функций, полученных в результате спаривания типа (2.10), по-прежнему продуктивно. Это дает основание ввести так называемое интегральное S-преобразование (см. [4, 5 – 8] и приведенную там библиографию).

Определение 5 [7, 8]. *Для* $\Phi \in (\tilde{\mathbb{R}})'$ *положим*

$$(S\Phi)(\lambda) := \left\langle\!\!\left\langle \Phi(\cdot), \frac{1}{\sqrt{1-2a\lambda+\lambda^2}} \cos\left(\sqrt{\cdot}\,\frac{1}{2}\int_0^\lambda \frac{du}{\sqrt{u-2au^2+u^3}}\right)\right\rangle\!\!\right\rangle_\rho .$$

Это определение корректно, так как $\Phi \in (\tilde{\mathbb{R}})'_{-q}$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$ и можно выбирать $\lambda \in \mathbb{C}$ такие, что $|\lambda|^2 2^q < 1$ [7]. В [7] установлено, что для Φ вида (2.7)

$$(S\varphi)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)} \lambda^n$$

(в частности, $(S\varphi)(0) = \Phi^{(0)}$), а оператор S биективно переводит $(\tilde{\mathbb{R}})'$ в пространство ростков функций, голоморфных в $0 \in \mathbb{C}$ (характеризационная теорема).

Наличие S-преобразований и характеризационной теоремы позволяет ввести на $(\tilde{\mathbb{R}})'$ аналог поточечного умножения — так называемое *виковское умножение*. Именно, виковским произведением обобщенных функций $\Phi, \Psi \in (\tilde{\mathbb{R}})'$ назовем $\Phi \lozenge \Psi := S^{-1}(S\Phi S\Psi) \in (\tilde{\mathbb{R}})'$. Более того, на $(\tilde{\mathbb{R}})'$ можно определить аналоги (виковские версии) голоморфных функций: для $\Phi \in (\tilde{\mathbb{R}})'$ и голоморфной в $(S\varphi)(0) = \Phi^{(0)}$ функции $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим $F^{\lozenge}(\Phi) :=$ $:= S^{-1}F(S\Phi) \in (\tilde{\mathbb{R}})'$. Легко проверить, что если $F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n\left(u - \Phi^{(0)}\right)^n$, то $F^{\lozenge}(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n\left(\Phi - \Phi^{(0)}\right)^{\lozenge n}$, где $\Psi^{\lozenge n} := \underbrace{\Psi \lozenge \ldots \lozenge \Psi}_{n}$. Заметим, что $S1 \equiv 1$, и поэтому для не зависящих от x функций Φ, Ψ (т. е. $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}$) $\Phi \lozenge \Psi = \Phi\Psi$, $F^{\lozenge}(\Phi) = F(\Phi)$, т. е. виковское умножение совпадает с поточечным.

***Замечание* 8.** Аналогичные построения можно провести и при определении пространств основных функций с помощью неортогональных обобщенных квазиаппелевых полиномов [7, 8]. В частности, при $\gamma \equiv 1$ соответствующее S-преобразование совпадает с T-преобразованием в терминах [10, 11]. Однако для таких S-преобразований $S1 \neq 1$ и, как следствие, $\Phi \lozenge \Psi \neq \Phi\Psi$ даже для Φ, $\Psi \in \mathbb{C}$.

Второй автор благодарен проф. Ю. М. Березанскому, О. В. Солонухе и С. В. Кошкину за обсуждение и полезные замечания.

1. *Meixner J.* Orthogonale Polynom Systeme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion // J. London Math. Soc. – 1934. – **9**, pt 1. – P. 6 – 13.
2. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращение преобразования Фурье по негауссовой мере // Функцион. анализ и прил. – 1991. – **25**, № 2. – С. 68 – 70.
3. *Albeverio S., Kondratiev Yu., Streit L.* How to generalize white noise analysis to non-Gaussian spaces // Dynamics of Complex and Irregular Systems. – World Scientific, 1993. – P. 48–60.

4. *Albeverio S., Daletzky Yu L., Kondratiev Yu. G., Streit L.* Non-Gaussian infinite dimensional analysis // J. Funct. Anal. – 1996. – **138**, № 2. – P. 311 – 350.
5. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions in infinite dimensional analysis // IIAS Reports No. 1995–002. – Kyoto, 1995. – 43 p.
6. *Kondratiev Yu. G., J. Luis da Silva, Streit L.* Generalized Appell system // Methods Funct. Anal. Topol. – 1997. – **3**, № 3. – P. 28 – 61.
7. *Kachanovsky N. A.* Biorthogonal Appell-like system in a Hilbert space // Ibid. – 1996. – **2**, № 3 – 4. – P. 36 – 52.
8. *Kachanovsky N. A.* Dual Arrell-like system and finite order srases in non-Gaussian infinite-dimensional analysis // Ibid. – 1998. – **4**, № 2. – P. 41 – 52.
9. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Негауссовский анализ и гипергруппы // Функцион. анализ и его прил. – 1995. – **29**. – С. 51 – 55.
10. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Biorthogonal systems in hypergroups: an extension of non-Gaussian analysis // Methods Funct. Anal. Topol. – 1996. – **2**, № 2. – P. 1 – 50.
11. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный анализ, связанный с оператором обобщенного сдвига // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 3. – С. 364 – 409.
12. *Mourad E. N.* Ismail and Galliano Valent. On a family of orthogonal polynomials related to elliptic functions // Ill. J. Math. – 1998. – **42**, № 2. – P. 294 – 312.
13. *Kachanovsky N. A., Koshkin S. V.* Minimality of Appell-like systems and embedding of test function spaces in a generalization of white noise analysis // Methods Funct. Anal. Topol. – 1999. – **5**, № 3. – P. 13 – 25.
14. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. – Киев: Наук. думка, 1982. – 352 с.
15. *Bloom W. R., Heyer H.* Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. – Berlin, New York: de Gruyter, 1995. – 99 p.
16. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
17. *Качановский Н А.* Псевдодифференциальные уравнения и оператор обобщенного сдвига в негауссовом бесконечномерном анализе // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1334 – 1341.
18. *Dineen S.* Complex analysis in locally convex spaces // Math. Studies 57. – North. Holland, Amsterdam, 1981. – 215 p.
19. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
20. *Zeuner H.* Properties of cosh hypergroup // Lect. Notes Math. – 1988. – **1379**. – P. 425 – 434.
21. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 780 с.
22. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
23. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.

Получено 14.03.2000