УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
С. В. Путилов (Брянск. пед. ун-т, Россия)

О π-РАЗРЕШИМЫХ И ЛОКАЛЬНО π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С ФАКТОРИЗАЦИЕЙ*

We prove that in a locally π-solvable group $G = AB$ with locally normal subgroups A and B there exist pairwise permutable Sylow π'- and p-subgroups $A_{\pi'}$ and A_p, and $B_{\pi'}$ and B_p, $p \in \pi$, of subgroups A and B respectively such that $A_{\pi'}B_{\pi'}$ is the Sylow π'-subgroup of the group G and for arbitrary nonempty set $\sigma \subseteq \pi$ $(\prod_{p\in\sigma} A_p)(\prod_{p\in\sigma} B_p)$ and $(A_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_p)(B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} B_p)$ are the Sylow σ- and $\pi' \cup \sigma$-subgroups, respectively, of the group G.

Доводиться, що в локально π-розв'язній групі $G = AB$ із локально нормальними підгрупами A і B існують попарно переставні силовські π'- і p-підгрупи $A_{\pi'}$ і A_p, $B_{\pi'}$ і B_p, $p \in \pi$, відповідно підгруп A і B такі, що $A_{\pi'}B_{\pi'}$ є силовською π'-підгрупою групи G та для довільної непорожньої множини $\sigma \subseteq \pi$ $(\prod_{p\in\sigma} A_p)(\prod_{p\in\sigma} B_p)$ і $(A_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_p)(B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} B_p)$ є силовськими відповідно σ- і $\pi' \cup \sigma$-підгрупами групи G.

Напомним, что для произвольного множества π простых чисел π-разрешимой группой называется конечная группа, каждый в отдельности индекс композиционного ряда которой или не делится ни на одно число из π, или равен некоторому числу из π (С. А. Чунихин, см., например, [1]). Локально π-разрешимой называется локально конечная группа, у которой каждая конечная подгруппа π-разрешима [2, с. 94]. Понятно, что классы всех конечных разрешимых и локально конечных локально разрешимых групп при $\pi = \mathbf{P}$ совпадают с классами всех π-разрешимых и локально π-разрешимых групп соответственно ($\mathbf{P}$ — множество всех простых чисел). Ряд результатов (в частности, факторизационных), связанных с обобщенно π-разрешимыми и, в частности, локально π-разрешимыми и π-разрешимыми группами, установлен в [2]. Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1 и 2, относящиеся соответственно к π-разрешимым и локально π-разрешимым факторизуемым группам.

Ниже, как обычно, для произвольной группы X через $\pi(X)$ обозначается множество всех простых делителей порядков ее элементов, и для произвольного множества π простых чисел $\pi' = \mathbf{P}\setminus\pi$, а под π-группой понимается периодическая группа X с $\pi(X) \subseteq \pi$. (Очевидно, при $\pi = \varnothing$ 1 — единственная π-группа.) Далее, для произвольных попарно перестановочных подгрупп X_α, $\alpha \in I$ $(I \neq \varnothing)$, группы через $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ обозначается их произведение, т. е. $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in I} X_{\alpha_1}\ldots X_{\alpha_n}$.

Теорема 1. *Пусть* π — *непустое множество простых чисел,* $G = AB$ — π-*разрешимая группа,* A *и* B — *ее подгруппы. Тогда* A *и* B *разложимы в произведения некоторых своих попарно перестановочных холловых* π'- *и силовских* p-*подгрупп соответственно* $A_{\pi'}$, A_p *и* $B_{\pi'}$, B_p, $p \in \pi$, *таких, что*:

1) $A_{\pi'} B_{\pi'}$ *и* $A_p B_p$, $p \in \pi$, — *попарно перестановочные холловы* π'- *и силовские* p-*подгруппы группы* G *и* $G = A_{\pi'} B_{\pi'} \prod\limits_{p\in\pi} A_p B_p$;

2) *при произвольном непустом множестве* $\sigma \subseteq \pi$ $\prod\limits_{p\in\sigma} A_p$, $\prod\limits_{p\in\sigma} B_p$ *и*

* Выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00462).

$$\frac{a_{n-1}e^{\sigma\lambda_{n-1}}}{\mu(\sigma)} = \exp\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\kappa_n - \sigma)\} \geq e^{-b_1} = \beta. \qquad (21)$$

Отже, нерівність $F(\sigma) > (1+\beta)\mu(\sigma, F)$ виконується для всіх

$$\sigma \in E \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[\kappa_n;\ \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} + \kappa_n\right]$$

у випадку, якщо ряд вигляду (1) з щойно визначеними коефіцієнтами (a_n) визначає функцію $F \in H_{+\infty}(\Lambda)$.

Оскільки з умови (3) випливає $n^2 = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, а за побудовою $-\ln a_n/\lambda_n \to +\infty$, $n \to +\infty$, то останнє є очевидним. Зауважимо тепер, що при $\sigma \geq \sigma_0$ і для $\sigma \in [\kappa_n, \kappa_{n+1})$

$$\ln\mu(2\sigma, F) \geq \int_{\sigma}^{2\sigma}\lambda_{\nu(x)}\,dx \geq \sigma\lambda_{\nu(\sigma)} = \sigma\lambda_n = b\sigma\Phi(2\kappa_{n+1}) \geq 2b\sigma\Phi(2\sigma),$$

тобто $F \in H(\Lambda, \Phi)$. Залишилось показати, що $D_h(E) > 0$. Справді,

$$\operatorname{meas}(E \cap [\kappa_{n+1}, +\infty)) = b_1\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k},$$

тому за нерівністю (20) при $n = n_j$ маємо

$$h(\kappa_{n+1})\operatorname{meas}(E \cap [\kappa_{n+1}, +\infty)) = h\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right)\right)b_1\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geq b_1 d > 0.$$

Теорему 2 доведено.

Із теорем 1 і 2 безпосередньо випливає така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\Phi(x) = x^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, $h \in L_{\varphi}$. *Для того щоб для кожної функції* $F \in H(\Lambda, \Phi)$ *співвідношення* (2) *виконувалось при* $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty)\backslash E,\ D_h(E) = 0)$ *рівномірно по* $y \in \mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб справджувалась умова* (6).

Автори дякують проф. М. М. Шереметі за зауваження, поради, які сприяли поліпшенню початкового тексту статті.

1. *Шеремета М. Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле // Мат. сб. – 1979. – **110**, № 1. – С. 102–116.
2. *Скаскив О. Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 1. – С. 41–47.
3. *Скасків О. Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 11. – С. 22–24.
4. *Скаскив О. Б., Шеремета М. Н.* Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Мат. сб. – 1986. – **131**, № 11. – С. 385–402.
5. *Fenton P. C.* The minimum modulus of gap power series // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1978. – **21**. – P. 49–54.
6. *Скаскив О. Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1989. – **53**, № 4. – С. 833–850.

Одержано 30.12.98

$\prod_{p\in\sigma} A_pB_p$ *— холловы σ-подгруппы соответственно групп A, B и G, $A_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_p$, $B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} B_p$ и $A_{\pi'}B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_pB_p$ — холловы $\pi'\cup\sigma$-подгруппы соответственно групп A, B и G, причем* $\prod_{p\in\sigma} A_pB_p = \left(\prod_{p\in\sigma} A_p\right)\left(\prod_{p\in\sigma} B_p\right)$ *и* $A_{\pi'}B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_pB_p = \left(A_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_p\right)\left(B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} B_p\right)$.

Теорема 1 существенно обобщает известный результат [3], в соответствии с которым конечная разрешимая группа $G \neq 1$, факторизуемая двумя нильпотентными подгруппами A и B, является произведением своих попарно перестановочных силовских p-подгрупп A_pB_p, $p\in\pi(G)$, где A_p и B_p — силовские p-подгруппы соответственно подгрупп A и B. При ее доказательстве используется теорема С. А. Чунихина [4, 5], согласно которой для $\pi \neq \varnothing$ произвольная π-разрешимая группа G представима в виде произведения некоторых своих попарно перестановочных холловой π'- и силовских p-подгрупп по $p\in\pi$ (см. также [2], теорема 6).

Теорема 2. *Пусть π — непустое множество простых чисел, $G = AB$ — локально π-разрешимая группа, A и B — ее локально нормальные подгруппы. Тогда A и B разложимы в произведения некоторых своих попарно перестановочных силовских π'- и p-подгрупп соответственно $A_{\pi'}$, A_p и $B_{\pi'}$, B_p, $p\in\pi$, таких, что $A_{\pi'}B_{\pi'}$ является силовской π'-подгруппой группы G и при произвольном непустом множестве $\sigma\subseteq\pi$* $\prod_{p\in\sigma} A_p$, $\prod_{p\in\sigma} B_p$ *и* $\left(\prod_{p\in\sigma} A_p\right)\left(\prod_{p\in\sigma} B_p\right)$ *— силовские σ-подгруппы соответственно групп A, B и G,* $A_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_p$, $B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} B_p$ *и* $\left(A_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} A_p\right)\left(B_{\pi'}\prod_{p\in\sigma} B_p\right)$ *— силовские $\pi'\cup\sigma$-подгруппы соответственно групп A, B и G.*

***Замечание* 1.** В теоремах 1 и 2 в случае, когда $\pi\supseteq\pi(G)$, $A_{\pi'}=B_{\pi'}=1$.

Напомним, что почти локально нормальной группой называется произвольное конечное расширение локально нормальной группы. Отметим, что в теореме 2 даже для одной из подгрупп A и B требование локальной нормальности нельзя ослабить до требования почти локальной нормальности (даже в предположении, что $\pi = \mathbf{P}$ и группа G счетна, метабелева и бипримарна). Действительно, возьмем произвольные простые p и $q\neq p$, конечную абелеву p-группу $S\neq 1$ и счетную абелеву p-группу P. Вследствие [6] существует счетная локально конечная метабелева $\{p, q\}$-группа G, содержащая S в качестве подгруппы, P в качестве силовской p-подгруппы и инвариантную элементарную абелеву q-подгруппу Q, такая, что $G=\langle S, P\rangle$ и $G/Q=(SQ/Q)\times(PQ/Q)$. Тогда $G=AB$ для $A=QS$ и $B=P$, A почти локально нормальна и B абелева, но не существует силовских p-подгрупп A_p и B_p групп A и B, для которых A_pB_p является силовской p-подгруппой группы G.

Лемма. *Пусть $G = AB$ — конечная группа, P и H — холловы π-подгруппы для некоторого множества π простых чисел соответственно подгрупп A и B, причем $\langle P, H\rangle$ является π-группой. Тогда $\langle P, H\rangle$ — холлова π-подгруппа группы G и*

$$\langle P, H\rangle = PH = HP. \tag{1}$$

Зафиксируем α. Ввиду леммы 1.12 [7] найдется конечная подгруппа F такая, что $G_\alpha \subseteq F = (F \cap A)(F \cap B) \subseteq N_G(G_\alpha)$. В силу теоремы 1 найдутся π_i-подгруппы S_i, $i \in \Lambda$, группы F такие, что $S_i \cap A$ и $S_i \cap B$ — холловы π_i-подгруппы групп $F \cap A$ и $F \cap B$, и для произвольного непустого $\Delta \subseteq \Lambda$ $\langle S_i \mid i \in \Delta \rangle$ — ν-подгруппа F при $\nu = \bigcup_{i \in \Delta} \pi_i$. Положим $H_{i\alpha} = S_i \cap G_\alpha$. Нетрудно видеть, что: а) для каждого $i \in \Lambda$ $H_{i\alpha} \cap A_\alpha$ и $H_{i\alpha} \cap B_\alpha$ — холловы π_i-подгруппы групп A_α и B_α; б) для произвольного непустого $\Delta \subseteq \Lambda$ — $\langle H_{i\alpha} \mid i \in \Delta \rangle$ — ν-подгруппа при $\nu = \bigcup_{i \in \Delta} \pi_i$. Поскольку ν-подгруппы $\langle H_{i\alpha} \cap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle$ и $\langle H_{i\alpha} \cap B_\alpha \mid i \in \Delta \rangle$ при каждом $i \in \Delta$ содержат холловы π_i-подгруппы $H_{i\alpha} \cap A_\alpha$ и $H_{i\alpha} \cap B_\alpha$ соответственно групп A_α и B_α, то, очевидно, они являются холловыми ν-подгруппами последних.

Пусть $\mathfrak{R}_\alpha$ — множество всех наборов $\{H_{i\alpha} \mid i \in \Lambda\}$ π_i-подгрупп группы G_α, для которых выполняются условия а) и б). Систему $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ частично упорядочим по правилу: $\mathfrak{R}_\alpha \le \mathfrak{R}_\beta$ тогда и только тогда, когда $G_\alpha \subseteq G_\beta$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in I$ найдется $\gamma \in I$, при котором $\mathfrak{R}_\alpha \le \mathfrak{R}_\gamma$ и $\mathfrak{R}_\beta \le \mathfrak{R}_\gamma$. Нетрудно видеть, что в случае, когда $\mathfrak{R}_\alpha \le \mathfrak{R}_\beta$, $\{H_{i\beta} \cap G_\alpha \mid i \in \Lambda\} \in \mathfrak{R}_\alpha$. В этом случае определяем проекцию $\mathfrak{R}_\beta$ в $\mathfrak{R}_\alpha$, сопоставляя каждому набору $\{H_{i\beta} \mid i \in \Lambda\}$ набор $\{H_{i\beta} \cap G_\alpha \mid i \in \Lambda\}$. Ввиду [8] (см. еще [9, с. 351 – 353]) в системе $\mathfrak{R}$ существует полное проекционное множество. Следовательно, найдутся наборы $\{H^*_{i\alpha} \mid i \in \Lambda\}$ по одному в каждом $\mathfrak{R}_\alpha$ такие, что для любых $\alpha, \beta \in I$ и произвольного $\gamma \in I$, при котором $\mathfrak{R}_\alpha, \mathfrak{R}_\beta \le \mathfrak{R}_\gamma$, $H^*_{i\alpha} \subseteq H^*_{i\gamma}$ и $H^*_{i\beta} \subseteq H^*_{i\gamma}$ при каждом $i \in \Lambda$.

Возьмем произвольное непустое $\Delta \subseteq \Lambda$ и $\nu = \bigcup_{i \in \Delta} \pi_i$. Положим

$$G_\Delta = \bigcap_{\alpha \in I} \langle H^*_{i\alpha} \mid i \in \Delta \rangle, \qquad A_\Delta = \bigcap_{\alpha \in I} \langle H^*_{i\alpha} \cap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle,$$

$$B_\Delta = \bigcup_{\alpha \in I} \langle H^*_{i\alpha} \cap B_\alpha \mid i \in \Delta \rangle$$

и для произвольного $i \in \Lambda$ $A_i = A_{\{i\}}$, $B_i = B_{\{i\}}$. Очевидно,

$$\langle A_\Delta \rangle = \langle A_i \mid i \in \Delta \rangle \quad \text{и} \quad \langle B_\Delta \rangle = \langle B_i \mid i \in \Delta \rangle. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что для G_Δ $\{\langle H^*_{i\alpha} \mid i \in \Delta \rangle \mid \alpha \in I\}$ — локальная система ν-подгрупп. Следовательно, G_Δ, а вместе с тем и $\langle A_\Delta, B_\Delta \rangle$, — ν-подгруппы.

Пусть P — силовская ν-подгруппа группы A, содержащая A_Δ, и g — произвольный элемент P. Тогда для некоторого α $g \in A_\alpha$. Поскольку $\langle H^*_{i\alpha} \cap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle$ — силовская ν-подгруппа группы A_α, а $\langle g, \langle H^*_{i\alpha} \cap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle \rangle$ — ее ν-подгруппа, то $g \in \langle H^*_{i\alpha} \cap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle$ и, значит, $g \in A_\Delta$. Таким образом, $A_\Delta = P$, т. е. A_Δ — силовская ν-подгруппа группы A. Аналогично B_Δ — силовская ν-подгруппа группы B.

В силу доказанного для произвольного $i \in \Lambda$ A_i и B_i — силовские π_i-подгруппы соответственно групп A и B, а A_Λ и B_Λ — силовские ν-подгруппы групп A и B для $\nu = \bigcup_{i \in \Lambda} \pi_i = \mathbf{P}$. Следовательно,

$$A_\Lambda = A \text{ и } B_\Lambda = B. \tag{3}$$

Пусть $\Delta = \Gamma \bigcup \Theta$ и $\Gamma \neq \varnothing$, $\Theta \neq \varnothing$; g — произвольный элемент из A_Δ. Тогда для некоторого α $g \in \langle H_{i\alpha}^* \bigcap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle$. Поскольку $\langle H_{i\alpha}^* \bigcap A_\alpha \mid i \in \Gamma \rangle$ и $\langle H_{i\alpha}^* \bigcap A_\alpha \mid i \in \Theta \rangle$ — холловы τ-подгруппы группы A_α соответственно для $\tau = \bigcup\limits_{i\in\Gamma} \pi_i$ и $\tau = \bigcup\limits_{i\in\Theta} \pi_i$ и $\langle H_{i\alpha}^* \bigcap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle$ — ее ν-подгруппа, то, очевидно, $\langle H_{i\alpha}^* \bigcap A_\alpha \mid i \in \Delta \rangle = \langle H_{i\alpha}^* \bigcap A_\alpha \mid i \in \Gamma \rangle \langle H_{i\alpha}^* \bigcap A_\alpha \mid i \in \Theta \rangle$. Следовательно, $g \in A_\Gamma A_\Theta$. Таким образом, $A_\Delta \in A_\Gamma A_\Theta$. Аналогично $B_\Delta \in B_\Gamma B_\Theta$.

В силу доказанного для любых $i, j \in \Lambda$ $A_{\{i,j\}} = A_i A_j = A_j A_i$ и $B_{\{i,j\}} = B_i B_j = B_j B_i$, т. е. подгруппы A_i и B_i, $i \in \Lambda$, попарно перестановочны. Поэтому с учетом (2) и (3) $A_\Delta = \prod\limits_{i\in\Delta} A_i$ и $B_\Delta = \prod\limits_{i\in\Delta} B_i$, $A = \prod\limits_{i\in\Lambda} A_i$ и $B = \prod\limits_{i\in\Lambda} B_i$.

Далее, пусть $\Delta \neq \Lambda$. Тогда вследствие доказанного $A = A_\Delta A_{\Lambda\setminus\Delta}$ и $B = B_\Delta B_{\Lambda\setminus\Delta}$. Следовательно, поскольку $\langle A_\Delta, B_\Delta \rangle$ и $\langle A_{\Lambda\setminus\Delta}, B_{\Lambda\setminus\Delta} \rangle$ — соответственно ν- и ν'-подгруппы, то ввиду леммы 2.24 [7] $A_\Delta B_\Delta$ — силовская ν-подгруппа группы G.

Если же $\Delta = \Lambda$, то $\nu = \mathbf{P}$, $A = A_\Delta$ и $B = B_\Delta$. Следовательно, группа G является своей силовской ν-подгруппой и $G = A_\Delta B_\Delta$. Теорема доказана.

***Замечание* 2.** В доказательстве теоремы 2 для подгруппы A_Δ и произвольной конечной нормальной в A подгруппы N $A_\Delta \bigcap N$ — холлова ν-подгруппа группы N. Действительно, если $\Delta \neq \Lambda$, то $A = A_\Delta A_{\Lambda\setminus\Delta}$, а значит, в силу леммы 2.13 [7] $N = (A_\Delta \bigcap N)(A_{\Lambda\setminus\Delta} \bigcap N)$. Следовательно, $(|A_\Delta \bigcap N| : |N : A_\Delta \bigcap N|) = 1$. Если же $\Delta = \Lambda$, то $\nu = \mathbf{P}$, $A = A_\Delta$ и, значит, N — ν-группа. Поэтому в теореме 2 для произвольной конечной нормальной подгруппы N группы A $A_{\pi'} \bigcap N$ — холлова π'-подгруппа группы A, и при любом непустом множестве $\sigma \subseteq \pi$ $N \bigcap \prod\limits_{p\in\sigma} A_p$ и $N \bigcap A_{\pi'} \prod\limits_{p\in\sigma} A_p$ — холловы соответственно σ- и $\pi' \bigcup \sigma$-подгруппы группы N.

***Замечание* 3.** Нетрудно видеть, что в теоремах 1 и 2

$$\pi\left(\left(\prod_{p\in\sigma} A_p\right)\left(\prod_{p\in\sigma} B_p\right)\right) = \pi\left(\prod_{p\in\sigma} A_p\right) \bigcup \pi\left(\prod_{p\in\sigma} B_p\right) = \bigcup_{p\in\sigma} (\pi(A_p) \bigcup \pi(B_p)),$$

и в теореме 1 также

$$\pi(A_{\pi'} B_{\pi'}) = \pi(A_{\pi'}) \bigcup \pi(B_{\pi'}) \text{ и } \pi\left(\left(A_{\pi'} \prod_{p\in\sigma} A_p\right)\left(B_{\pi'} \prod_{p\in\sigma} B_p\right)\right) =$$

$$= \pi\left(A_{\pi'} \prod_{p\in\sigma} A_p\right) \bigcup \pi\left(B_{\pi'} \prod_{p\in\sigma} B_p\right) =$$

$$= \pi(A_{\pi'}) \bigcup \pi(B_{\pi'}) \bigcup \bigcup_{p\in\sigma} (\pi(A_p) \bigcup \pi(B_p)). \tag{4}$$

Используя теорему 1.9 [7], легко убедиться в том, что соотношения (4) выполняются при условиях теоремы 2. Поэтому, как легко видеть, подгруппы $\left(\prod\limits_{p\in\sigma} A_p\right)\left(\prod\limits_{p\in\sigma} B_p\right)$, $A_{\pi'} B_{\pi'}$ и $\left(A_{\pi'} \prod\limits_{p\in\sigma} A_p\right)\left(B_{\pi'} \prod\limits_{p\in\sigma} B_p\right)$ являются силовскими τ-подгруппами группы G для произвольного множества τ простых чисел такого, что соответственно $\bigcup\limits_{p\in\sigma} (\pi(A_p) \bigcup \pi(B_p)) \subseteq \tau \subseteq \sigma$, $\pi(A_{\pi'}) \bigcup \pi(B_{\pi'}) \subseteq \tau \subseteq \pi'$ и

$$\pi(A_{\pi'})\cup\pi(B_{\pi'})\cup\bigcup_{p\in\sigma}(\pi(A_p)\cup\pi(B_p))\subseteq\tau\subseteq\pi'\cup\sigma.$$

Следующие два предложения вытекают соответственно из теорем 1 и 2 с учетом замечания 3.

***Следствие* 1.** *Пусть* π *— непустое множество простых чисел,* $G = AB$ *— π-разрешимая группа,* A *и* B *— ее подгруппы;* π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *— множества простых чисел такие, что* $\pi(G)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\pi_i$ *и для каждого* $i\le n$ *или*

$$\pi_i\cap\pi(G)\subseteq\pi, \tag{5}$$

или

$$\pi'\cap\pi(G)\subseteq\pi_i. \tag{6}$$

Тогда A *и* B *разложимы в произведения некоторых своих попарно перестановочных холловых* π_i*-подгрупп соответственно* A_i *и* B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *таких, что:*

1) A_iB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *— попарно перестановочные холловы π-подгруппы группы* G, *причем* $G=\prod_{i=1}^{n}A_iB_i$;

2) *при произвольном непустом* $\Delta\subseteq\{1, 2, \ldots, n\}$ $\prod_{i\in\Delta}A_iB_i=\left(\prod_{i\in\Delta}A_i\right)\left(\prod_{i\in\Delta}B_i\right)$ *и для* $\nu=\bigcup_{i\in\Delta}\pi_i$ $\prod_{i\in\Delta}A_i$, $\prod_{i\in\Delta}B_i$ *и* $\prod_{i\in\Delta}A_iB_i$ *— холловы* ν*-подгруппы соответственно групп* A, B *и* G.

Доказательство. Для произвольного $i\le n$ в теореме 1 положим: если $\pi_i\ne\varnothing$ и выполняется (5), то $A_i=\prod_{p\in\pi_i}A_p$ и $B_i=\prod_{p\in\pi_i}B_p$; если выполняется (6) и $\pi_i\cap\pi=\varnothing$, то $A_i=A_{\pi'}$ и $B_i=B_{\pi'}$; если выполняется (6) и $\pi_i\cap\pi\ne\varnothing$, то $A_i=A_{\pi'}\prod_{p\in\pi_i\cap\pi}A_p$ и $B_i=B_{\pi'}\prod_{p\in\pi_i\cap\pi}B_p$; если $\pi_i=\varnothing$, то $A_i=B_i=1$. Используя теорему 1 и учитывая замечание 3, нетрудно убедиться в том, что A_i и B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — требуемые попарно перестановочные холловы π_i-подгруппы групп A и B.

***Следствие* 2.** *Пусть* π *— непустое множество простых чисел,* $G = AB$ *— локально π-разрешимая группа,* A *и* B *— ее локально нормальные подгруппы;* π_ι, $\iota\in I$, *где* $|I|\ge 2$, *— множества простых чисел такие, что* $\pi(A)\cup\pi(B)\subseteq\bigcup_{\iota\in I}\pi_\iota$ *и для каждого* $\iota\in I$ *или*

$$\pi_\iota\cap(\pi(A)\cup\pi(B))\subseteq\pi, \tag{7}$$

или

$$\pi'\cap(\pi(A)\cup\pi(B))\subseteq\pi_\iota. \tag{8}$$

Тогда A *и* B *разложимы в произведения некоторых своих попарно перестановочных силовских* π_ι*-подгрупп соответственно* A_ι *и* B_ι, $\iota\in I$, *таких, что при произвольном непустом* $\Delta\subseteq I$ *для* $\nu=\bigcup_{\iota\in\Delta}\pi_\iota$ $\prod_{\iota\in\Delta}A_\iota$, $\prod_{\iota\in\Delta}B_\iota$ *и* $\left(\prod_{\iota\in\Delta}A_\iota\right)\left(\prod_{\iota\in\Delta}B_\iota\right)$ *— силовские* ν*-подгруппы соответственно групп* A, B *и* G.

Доказательство. Для произвольного $\iota \in I$ в теореме 2 положим: если $\pi_\iota \neq 0$ и выполняется (7), то $A_\iota = \prod_{p\in\pi_\iota} A_p$ и $B_\iota = \prod_{p\in\pi_\iota} B_p$; если выполняется (8) и $\pi_\iota \cap \pi = \varnothing$, то $A_\iota = A_{\pi'}$ и $B_\iota = B_{\pi'}$; если выполняется (8) и $\pi_\iota \cap \pi \neq \varnothing$, то $A_\iota = A_{\pi'} \prod_{p\in\pi_\iota\cap\pi} A_p$ и $B_\iota = B_{\pi'} \prod_{p\in\pi_\iota\cap\pi} B_p$; если $\pi_\iota = \varnothing$, то $A_\iota = B_\iota = 1$. Используя теорему 2 и учитывая замечание 3, нетрудно убедиться в том, что A_ι и B_ι, $\iota \in I$, — требуемые попарно перестановочные подгруппы групп A и B.

На основании следующего предложения, вытекающего из предложения 12 [10], в теореме 2 подгруппы $A_{\pi'}B_{\pi'}$ и A_pB_p; $p \in \pi$, попарно перестановочны в случае, когда подгруппы $A_{\pi'}$, A_p и $B_{\pi'}$, B_p, $p \in \pi$, нормальны соответственно в A и B, и в этом же случае в следствии 2 подгруппы A_ι, B_ι, $\iota \in I$, попарно перестановочны.

Предложение (Н. С. Черников). *Пусть $G = AB$ — локально π-разрешимая группа, подгруппы A и B являются прямыми произведениями своих силовских π'- и p-подгрупп соответственно $A_{\pi'}$, A_p и $B_{\pi'}$, B_p, $p \in \pi$, и A или B имеет возрастающий инвариантный ряд, произвольный фактор которого конечен либо удовлетворяет нормализаторному условию для бесконечных подгрупп. Тогда G является произведением своих попарно перестановочных силовских π'- и p-подгрупп $A_{\pi'}B_{\pi'}$ и A_pB_p, $p \in \pi$.*

Доказательство. Возьмем произвольные $p, q \in \pi$. Пусть $\pi_1 = \{p\}$ и $\pi_2 = \{q\}$ или $\pi_2 = \pi'$, A_i и B_i — силовские π_i-подгруппы соответственно групп A и B, $i = 1, 2$. В силу предложения 12 [10] $(A_1A_2)(B_1B_2)$ и A_iB_i — силовские соответственно $\pi_1 \cup \pi_2$- и π-подгруппы группы G, $i = 1, 2$, и $(A_1A_2)(B_1B_2) = (A_1B_1)(A_2B_2) = (A_2B_2)(A_1B_1)$. Следовательно, имеем $G = \langle A_\pi B_\pi,\ A_pB_p \mid p \in \pi \rangle = A_{\pi'}B_{\pi'} \prod_{p\in\pi} A_pB_p$.

В заключение поставим следующий вопрос: можно ли в теореме 2 подгруппы $A_{\pi'}$, A_p и $B_{\pi'}$, B_p, $p \in \pi$, подобрать так, чтобы подгруппы $A_{\pi'}B_{\pi'}$ и A_pB_p, $p \in \pi$, были попарно перестановочны?

1. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964. – 160 с.
2. *Черников Н. С.* Обобщенно разрешимые и обобщенно π-разрешимые факторизуемые группы // Вопросы алгебры (Гомель). – 1996. – **10**. – С. 91 – 122.
3. *Wielandt H.* Uber das Produkt von paarweise vertauschbaren nilpotenten Gruppen // Math. Z. – 1951. – **55**, № 1. – S. 1 – 7.
4. *Чунихин С. А.* О факторизации конечных групп // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 977 – 980.
5. *Чунихин С. А.* Факторизация конечных групп // Мат. сб. – 1956. – **39**, № 4. – С. 465 – 490.
6. *Heineken H.* Maximale p-Untergruppen lokal endlicher Gruppen // Arch. Math. – 1972. – **23**, № 2. – S. 351 – 361.
7. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
8. *Черников С. Н.* К теории локально разрешимых групп // Мат. сб. – 1943. – **19**, № 2 – 3. – С. 317 – 333.
9. *Курош А. Г.* Теория групп: 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
10. *Черников Н. С.* Периодические локально разрешимые группы, факторизуемые двумя локально нильпотентными подгруппами // Вопросы алгебры (Гомель). – 1997. – **11**. – С. 90 – 115.

Получено 06.07.2000