УДК 517.9

Г. Я. Попов (Ин-т математики, экономики и механики Одес. ун-та)

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ И ОБ ИХ ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

We obtain a formula of the expansion of arbitrary function in a series in terms of eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary-value problem for a differential equation of cone functions. This result enables us to derive a series of integral transforms (including the well-known ones) and the inversion formulas for them. We apply these formulas to the solution of initial boundary-value problems in the theory of heat conduction for circular hollow cones cut by spherical surfaces.

Одержано формулу розкладу довільної функції в ряд за власними функціями крайової задачі Штурма – Ліувілля для диференціального рівняння функцій конуса та на цій основі виведено серію інтегральних перетворень (в тому числі відомих) і формул обернення для них. Наведено застосування цих формул до розв'язання початково-крайових задач теорії теплопровідності для кругових порожнистих конусів, зрізаних сферичними поверхнями.

1. Вывод интегральных преобразований, о которых пойдет речь, базируется на решении следующей краевой задачи Штурма – Лиувилля [1]:

$$T^{\cdot\cdot}(\theta)+\operatorname{ctg}\theta\, T^{\cdot}(\theta)-\left[\lambda+\frac{1}{4}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]T(\theta) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1, \tag{1}$$

$$h_0^j T(\omega_j)+h_1^j T^{\cdot}(\omega_j) = 0, \quad j = 0, 1, \quad h^j = \text{const}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

При этом основной интерес представляют следующие три случая краевых условий в (1):

a) $h_0^j = 1$, $h_1^j = 0$, b) $h_0^j = h_j$, $h_1^j = 1$, c) $h_0^j = 0$, $h_1^j = 1$, $j = 0, 1$.

В (1) и всюду ниже производная по θ обозначена точкой.

Следует отметить, что линейно независимыми решениями дифференциального уравнения в (1) являются функции конуса [2]

$$P^m_{-1/2+i\sqrt{\lambda}}(\cos\theta) \quad \text{и} \quad Q^m_{-1/2+i\sqrt{\lambda}}(\cos\theta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Требуется определить собственные числа λ_k (или $\nu_k = -1/2+i\sqrt{\lambda_k}$) и собственные функции задач $(1)_{a,b,c}$ и получить формулу разложения произвольной функции по этим собственным функциям.

На эти вопросы дает ответ следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(\theta)$ принадлежит $L(\omega_0, \omega_1)$. Тогда на интервале (ω_0, ω_1) она разлагается в ряд*

$$f(\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\sin\theta}\,\varphi_1(\theta,\nu_k)}{\sigma_{mk}(\omega_0,\omega_1)}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\sqrt{\sin\psi}\,\varphi_1(\psi,\nu_k)f(\psi)\,d\psi, \tag{3}$$

где

$$\frac{1}{\sigma_{mk}(\omega_0,\omega_1)} = \frac{l_0^* Q^m_{\nu_k}(2\nu_k+1)}{l_0^* Q^m_{\nu_k}\Gamma_m(\nu_k)\tilde{\Delta}^m_k(\omega_0,\omega_1)}, \tag{4}$$

по собственным функциям

$$\varphi_1(\theta,\nu_k) = P^m_{\nu_k}(\cos\theta)\, l_1^* Q^m_{\nu_k} - Q^m_{\nu_k}(\cos\theta)\, l_1^* P^m_{\nu_k}, \quad \nu_k = -1/2+i\sqrt{\lambda_k}, \tag{5}$$

$$l_j^* f(\theta) \equiv l_j^* f = \sin\alpha_j\, f^{\cdot}(\omega_j) + \left[\cos\alpha_j + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega_j \sin\alpha_j\right]f(\omega_j), \quad j = 0, 1 \tag{6}$$

(α_j — *произвольные вещественные числа*), *являющимся решениями краевой задачи*

$$\varphi_1^{\cdot\cdot}(\theta, \nu_k) + \operatorname{ctg}\theta\, \varphi_1^{\cdot}(\theta, \nu_k) + \left[\nu_k(\nu_k+1) - m^2 \operatorname{cosec}^2\theta\right]\varphi_1(\theta, \nu_k) = 0, \tag{7}$$

$$\omega_0 < \theta < \omega_1, \quad l_j^* \varphi_1(\theta, \nu_k) = 0, \quad j = 0, 1.$$

При этом числа ν_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *являются корнями уравнения*

$$\Delta_{\nu_k}^m = 0, \quad \Delta_\nu^m = l_1^* P_\nu^m l_0^* Q_\nu^m - l_0^* P_\nu^m l_1^* Q_\nu^m. \tag{8}$$

В (4) $\Gamma_m(\nu_k)$ *и* $\tilde\Delta_k^m(\omega_0, \omega_1)$ *означают следующее*:

$$\Gamma_m(\nu) = \frac{2^{2m}\,\Gamma(1+m/2+\nu/2)\,\Gamma(1/2+m/2+\nu/2)}{\Gamma(1+\nu/2-m/2)\,\Gamma(1/2+\nu/2-m/2)}, \tag{9}$$

$$\tilde\Delta_k^m(\omega_0, \omega_1) = \left.\frac{\partial \Delta_\nu^m}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_k}. \tag{10}$$

Ряд (3) *в отношении сходимости ведет себя так же, как и обычный ряд Фурье* [3]. *В частности, он сходится к* $[f(\theta+0)+f(\theta-0)]/2$, *если функция* $f(\theta)$ *имеет ограниченную вариацию в окрестности точки* θ.

Доказательство. Чтобы воспользоваться аппаратом, предложенным в [1], выполним в (1) замену

$$T(\theta) = (\sin\theta)^{-1/2} y(\theta) \tag{11}$$

и сведем задачу $(1)_{a,b,c}$ к краевой задаче, рассмотренной в [1]:

$$y^{\cdot\cdot}(\theta) - \{\lambda + q(\theta)\} y(\theta) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1, \quad \left[q(\theta)\sin^2\theta = m^2 - 1/4\right], \tag{12}$$

$$l_j\, y(\theta) \equiv y(\omega_j)\cos\alpha_j + y^{\cdot}(\omega_j)\sin\alpha_j = 0, \quad j = 0, 1.$$

Следуя схеме, предложенной в [1], и учитывая (2) и (11), рассмотрим функции

$$\varphi_0(\theta, \lambda) = \sqrt{\sin\theta}\, P_\nu^m(\cos\theta), \quad \chi_0(\theta, \lambda) = \sqrt{\sin\theta}\, Q_\nu^m(\cos\theta), \quad \nu = -1/2 + i\sqrt{\lambda}.$$

Далее по ним, согласно [1], строим функции

$$-\Gamma_m(\nu)\,\varphi(\theta, \lambda) = \varphi_0(\theta, \lambda) l_0 \chi_0 - \chi_0(\theta, \lambda) l_0 \varphi_0 =$$

$$= \sqrt{\sin\theta}\, F_{\nu,0}^m(\theta), \quad -\Gamma_m(\nu)\,\chi(\theta, \lambda) = \sqrt{\sin\theta}\, F_{\nu,1}^m(\theta),$$

где

$$F_{\nu,j}^m(\theta) = P_\nu^m(\cos\theta)\, l_j \chi_0 - Q_\nu^m(\cos\theta)\, l_j \varphi_0, \quad j = 0, 1,$$

находим их производные и определитель Вронского.

В результате функция $\Phi(\theta, \lambda)$, определяемая формулой (1.6.2) из [1], будет построена, причем собственные числа λ_k задачи (12) и связанные с ними числа $\nu_k = -1/2 + i\sqrt{\lambda_k}$ должны находиться из уравнения (8). Согласно [1], для получения разложения (3) функции $f(\theta)$ по собственным функциям задачи (12) следует подсчитать вычет функции $\Phi(\theta, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$ по приведенной там формуле и вычислить отношение $\chi(\theta, \lambda_k)$ к $\varphi(\theta, \lambda_k)$. Выполнив эти операции, получим разложение (3).

Утверждения теоремы относительно сходимости полученного разложения и класса функций, для которого оно справедливо, доказываются точно так же, как и в работе [1].

Таким образом, теорема доказана.

Ее результаты можно интерпретировать еще и так. Введем функцию $g(\theta) = (\sin\theta)^{-1/2} f(\theta)$, для которой существует интеграл

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{\sin\theta}\,|g(\theta)|\,d\theta. \tag{13}$$

Тогда разложение (3) можно трактовать как формулу обращения

$$g(\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^m \varphi_1(\theta, \nu_k)}{\sigma_{mk}(\omega_0, \omega_1)} \tag{14}$$

для интегрального преобразования

$$g_k^m = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta\, \varphi_1(\theta, \nu_k)\, g(\theta)\, d\theta. \tag{15}$$

2. Установим связь между построенной собственной функцией (5) краевой задачи (12) и собственными функциями краевых задач $(1)_a$, $(1)_b$ и $(1)_c$. Собственную функцию $\varphi_a(\theta, \nu_k)$ краевой задачи $(1)_a$ получим из (5), если в (6) и в граничном условии из (7) примем $\alpha_j = 0$, $j = 0, 1$. В результате получим

$$\varphi_a(\theta, \nu_k) = P_{\nu_k}^m(\cos\theta) Q_{\nu_k}^m(\cos\omega_1) - P_{\nu_k}^m(\cos\omega_1) Q_{\nu_k}^m(\cos\theta). \tag{16}$$

Она удовлетворяет дифференциальному уравнению из (7) и граничным условиям

$$\varphi_a(\omega_j, \nu_k) = 0, \quad j = 0, 1,$$

а числа ν_k следует находить из уравнения (8), которое в данном случае, если ввести обозначение

$$\Omega_\nu^{l,n}(\omega_0, \omega_1) = \Omega_\nu^{l,n} = P_\nu^l(\cos\omega_1) Q_\nu^n(\cos\omega_0) - \\ - P_\nu^n(\cos\omega_0) Q_\nu^l(\cos\omega_1), \tag{17}$$

можно записать в виде

$$\Omega_{\nu_k}^{m,m}(\omega_0, \omega_1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

При этом изменится и формула (4), так как в данном случае

$$l_j^* Q_{\nu_k}^m = Q_{\nu_k}^m(\cos\omega_j), \quad j = 0, 1,$$

и примет вид

$$\frac{1}{\sigma_{mk}^a(\omega_0, \omega_1)} = \frac{Q_{\nu_k}^m(\cos\omega_0)}{Q_{\nu_k}^m(\cos\omega_1)} (2\nu_k + 1) \left[\frac{\partial \Omega_\nu^{m,m}(\omega_0, \omega_1)}{\partial \nu} \bigg|_{\nu=\nu_k} \right]^{-1}.$$

Для получения собственной функции $\varphi_b(\theta, \nu_k)$ краевой задачи $(1)_b$ разделим граничное условие в (7) на $\sin\alpha_j$. Тогда граничные условия краевой задачи (7) будут иметь вид условий задачи $(1)_b$, если положить

$$\operatorname{ctg}\alpha_j + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega_j = h_j, \quad \operatorname{ctg}\alpha_j = h_j - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega_j, \quad j = 0, 1. \tag{19}$$

При этом функционалы l_j^* преобразуются в функционалы l_j^h, т. е.

$$l_j^* P_\nu^m = l_j^h P_\nu^m = \frac{dP_\nu^m(\cos\omega_j)}{d\omega_j} + h_j P_\nu^m(\cos\omega_j), \tag{20}$$

и на основании (5) можно заключить, что

$$\varphi_b(\theta, \nu_k) = P_{\nu_k}^m(\cos\theta)\, l_1^h Q_{\nu_k}^m - Q_{\nu_k}^m(\cos\theta)\, l_1^h Q_{\nu_k}^m. \tag{21}$$

Эта собственная функция краевой задачи $(1)_b$ в силу (7) и (19) будет удовлетворять граничным условиям

$$\varphi_b^{\cdot}(\omega_j, \nu_k) + h_j \varphi_b(\omega_j, \nu_k) = 0, \quad j = 0, 1.$$

Числа ν_k должны находиться из уравнения (8), которое в силу (19) и (20) запишется так:

$$\Delta_{\nu_k}^m = l_1^h P_{\nu_k}^m l_0^h Q_{\nu_k}^m - l_0^h P_{\nu_k}^m l_1^h Q_{\nu_k}^m = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Если же воспользоваться равенством

$$\frac{dP_\nu^m(\cos\theta)}{d\theta} = P_\nu^{m+1}(\cos\theta) + m \operatorname{ctg}\theta\, P_\nu^m(\cos\theta), \tag{23}$$

справедливым и для $Q_\nu^m(\cos\theta)$ и вытекающим из формулы 3.6.1 (6) из [2], и обозначением (17), то уравнение (22) можно представить в виде

$$\Omega_{\nu_k,h}^m(\omega_0, \omega_1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\nu,h}^m(\omega_0, \omega_1) = {} & \Omega_\nu^{m+1,m+1} + (m \operatorname{ctg}\omega_0 + h_0)\Omega_\nu^{m+1,m} + \\ & + (m \operatorname{ctg}\omega_1 + h_1)\Omega_\nu^{m,m+1} + \left[m^2 \operatorname{ctg}\omega_0 \operatorname{ctg}\omega_1 + \right. \\ & \left. + m(h_0 \operatorname{ctg}\omega_1 + h_1 \operatorname{ctg}\omega_0) + h_0 h_1\right]\Omega_\nu^{m,m}. \end{aligned} \tag{25}$$

Формула (4) в данном случае примет вид

$$\frac{1}{\sigma_{mk}^b(\omega_0, \omega_1)} = \frac{l_0^h Q_{\nu_k}^m (2\nu_k + 1)}{l_1^h Q_{\nu_k}^m \Gamma_m(\nu_k)} \left[\frac{\partial}{\partial\nu} \Omega_{\nu,h}^m \bigg|_{\nu=\nu_k}\right]^{-1}.$$

Собственную функцию $\varphi_c(\theta, \nu_k)$ краевой задачи $(1)_c$ получим из (21), положив $h_j = 0$, $j = 0, 1$, что приведет к формуле

$$\varphi_c(\theta, \nu_k) = P_{\nu_k}^m(\cos\theta) \frac{dQ_{\nu_k}^m(\cos\omega_1)}{d\omega_1} - Q_{\nu_k}^m(\cos\theta) \frac{dP_{\nu_k}^m(\cos\omega_1)}{d\omega_1}. \tag{26}$$

Она удовлетворяет граничному условию

$$\varphi_c^{\cdot}(\omega_j, \nu_k) = 0, \quad j = 0, 1,$$

а числа ν_k следует находить из уравнения

$$\Delta_{\nu_k}^m \equiv \Omega_{\nu_k,0}^m(\omega_0, \omega_1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Выражение для $\Omega_{\nu_k,0}^m(\omega_0, \omega_1)$ получаем из (25), полагая $h_0 = h_1 = 0$. Формула (4) в данном случае запишется так:

$$\frac{1}{\sigma_{mk}^c(\omega_0, \omega_1)} = (2\nu_k + 1) \frac{dQ_{\nu_k}^m(\cos\omega_0)}{d\omega_0} \left[\frac{dQ_{\nu_k}^m(\cos\omega_1)}{d\omega_1} \frac{\partial}{\partial\nu} \Omega_{\nu,0}^m \bigg|_{\nu=\nu_k}\right]^{-1}. \tag{28}$$

Таким образом, интегральные преобразования, базирующиеся на задачах Штурма – Лиувилля $(1)_a$, $(1)_b$ и $(1)_c$ и справедливые для функций, имеющих конечный интеграл (13), согласно (14), (15) можно записать в виде

$$g_k^m = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta\, \varphi_e(\theta, \nu_k) g(\theta)\, d\theta, \quad e = a, b, c,$$

$$g(\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^m \varphi_e(\theta, \nu_k)}{\sigma_{mk}^e(\omega_0, \omega_1)}, \quad \omega_0 \le \theta \le \omega_1. \tag{29}$$

Важным моментом при использовании интегральных преобразований (29) является отыскание чисел ν_k из уравнений (18), (24) и (27).

Для анализа сходимости рядов в (29) достаточно знать асимптотическое поведение ν_k при $k \to \infty$.

Найдем асимптотическое решение перечисленных трансцендентных уравнений. Начнем с наиболее сложного (24). Воспользовавшись асимптотическим представлением функций Лежандра при больших значениях индекса (см. формулы 3.9.1 (1) и 3.9.1 (2) из [2]), получим асимптотическое представление и для функций (17), в силу (25) входящих в исследуемое уравнение.

Подставляя полученные асимптотические представления в уравнение (24) и сохраняя в нем лишь главные члены асимптотики, получаем асимптотическую формулу

$$\nu_k = \gamma k - \frac{3}{2}, \quad \gamma = \pi(\omega_1 - \omega_0)^{-1}, \tag{30}$$

справедливую для больших значений k.

Формула (30) пригодна и для подсчета корней уравнения (27). Асимптотическое решение трансцендентного уравнения (18) получается аналогично и имеет вид

$$\nu_k = \gamma k - \frac{1}{2}.$$

3. Рассмотрим еще один важный частный случай разложения (3), когда $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$. Для этого в (3) следует выполнить предельный переход $\omega_0 \to 0$.

Начнем с трансцендентного уравнения (8). Если учесть (6) и принять во внимание формулу 3.6.1 (2) из [2], то можно убедиться, что второе слагаемое при $\omega_0 = 0$ в (8) равно нулю и это уравнение преобразуется в следующее:

$$l_1^* P_{\nu_k}^m \equiv P_{\nu_k}^{m+1}(\cos\omega)\sin\alpha_1 + P_{\nu_k}^m(\cos\omega)\Big[\cos\alpha_1 +$$
$$+ (\operatorname{ctg}\omega \sin\alpha_1)\left(\frac{1}{2} + m\right)\Big] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{31}$$

Согласно (31) и (5) получаем формулу

$$\varphi_1(\theta, \nu_k) = l_1^* Q_{\nu_k}^m P_{\nu_k}^m(\cos\theta). \tag{32}$$

При этом в силу соотношений (10), (8), а также поведения функции Лежандра в окрестности единицы выражение для $\tilde{\Delta}_k^m(\omega_0, \omega_1)$ при $\omega_0 \to 0$ переходит в следующее:

$$l_0^* Q_\nu^m(\omega) \Delta_k^m(\omega), \qquad \Delta_k^m(\omega) = \left. \frac{\partial l_1^* P_\nu^m}{\partial \nu} \right|_{\nu = \nu_k},$$

и поэтому интегральное преобразование (14), (15) при $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$ принимает вид щающих левую часть (38) в нуль. При этом первой серии значений ν_k соответствует собственная функция

$$\varphi_k^m(\theta) = P_{\nu_k^0}^m(\cos\theta) = P_{2k-m+1}^m(\cos\theta), \tag{39}$$

но согласно формуле 3.6.1 (2) из [2] для целых индексов имеем

$$P_l^m(z) = 0, \quad m > l,$$

и поэтому собственная функция (39) не будет нулем только при $k \geq m$. По той же причине собственные функции, соответствующие значениям ν_k^1, равны нулю для любого значения $k \geq 0$ и поэтому эти значения ν_k следует отбросить. Тогда интегральное преобразование (33) при $\omega = \pi/2$ будет иметь вид

$$g(\theta) = -\sum_{k=m}^{\infty} \frac{g_k^m (4k+3-2m)(k-m)!\, P_{2k+1-m}^m(\cos\theta)}{2^{2m} k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\left[\Gamma\left(k-m+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}},$$

$$g_k^m = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, g(\theta)\, P_{2k-m+1}^m(\cos\theta)\, d\theta.$$

В частном случае, когда $m = 0$, имеем

$$g(\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} g_k (4k+3) P_{2k+1}(\cos\theta), \quad g_k = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, g(\theta)\, P_{2k+1}(\cos\theta)\, d\theta.$$

что совпадает с известным результатом [4].

Уравнение (36) при $\omega = \pi/2$ так же, как и уравнение (34), имеет вид уравнения (38), в котором m следует заменить на $m+1$, и поэтому в этом случае интегральное преобразование (33) переходит в следующее:

$$g(\theta) = -\sum_{k=m}^{\infty} \frac{g_k^m (4k-2m+1)(k-m)!\,\Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{k!\, 2^{2m}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} P_{2k-m}^m(\cos\theta),$$

$$g_k^m = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, g(\theta)\, P_{2k-m}^m(\cos\theta)\, d\theta,$$

которое в случае $m = 0$ приводит к известному [4] результату:

$$g(\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} g_k (4k+1) P_{2k}(\cos\theta), \quad g_k = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, g(\theta)\, P_{2k}(\cos\theta)\, d\theta.$$

4. Применим полученные результаты к следующим начально-краевым задачам теплопроводности для усеченного кругового полого конуса [5]:

$$\Delta v(r,\theta,\varphi,t) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial v(r,\theta,\varphi,t)}{\partial t}, \quad a < r < b, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1, \quad t > 0, \tag{40}$$

$$v(r,\theta,\varphi,0) = f(r,\theta,\varphi), \quad v(a,\theta,\varphi,t) = v(b,\theta,\varphi,t) = 0, \quad |\varphi| < \pi,$$

$$\text{a)}\ v(r,\omega_j,\varphi,t) = g^j(r,\varphi,t), \quad \text{b)}\ \dot v(r,\omega_j,\varphi,t) + h_j v(r,\omega_j,\varphi,t) = g^j(r,\varphi,t),$$

$$\text{c)}\ \dot v(r,\omega_j,\varphi,t) = g^j(r,\varphi,t), \quad j = 0, 1,$$

где Δ — оператор Лапласа в сферической системе координат, постоянные κ и h объяснены в [5], граничные условия на сферических поверхностях $r = a$ и $r = b$ могут быть трех типов, как и на конических поверхностях, и тоже неоднородными. Указанные здесь условия выбраны ради сокращения записей. Как и выше, производная по переменной θ отмечена точкой, а производная по переменной r — штрихом. От заданных и искомых функций потребуем, чтобы для них были справедливы применяемые ниже интегральные преобразования и формулы обращения.

Последовательно применяя к (40) интегральное преобразование Лапласа по времени

$$v_p(r,\theta,\varphi) = \int\limits_0^\infty v(r,\theta,\varphi,t)e^{-pt}dt \tag{41}$$

и преобразование Фурье по углу φ

$$v_{pn}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v_p(r,\theta,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{42}$$

вместо (40) получаем

$$\left[r^2 v'_{pn}(r,\theta)\right]' - \nabla_n v_{pn}(r,\theta) - s^2 r^2 v_{pn}(r,\theta) = f_n(r,\theta), \tag{43}$$

$$v_{pn}(a,\theta) = 0, \quad v_{pn}(b,\theta) = 0, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1, \quad a < r < b,$$

$$\text{a)}\ \ v_{pn}(r,\omega_j) = g^j_{pn}(r), \quad \text{b)}\ \ v^{\cdot}_{pn}(r,\omega_j) + h v_{pn}(r,\omega_j) = g^j_{pn}(r),$$

$$\text{c)}\ \ v^{\cdot}_{pn}(r,\omega_j) = g^j_{pn}(r), \quad j = 0, 1.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$-\nabla_n f(r,\theta) = \frac{\left[\sin\theta\, f^{\cdot}(r,\theta)\right]^{\cdot}}{\sin\theta} - \frac{n^2 f(r,\theta)}{\sin^2\theta}, \quad s^2 = \frac{p}{\kappa}.$$

Применим к краевой задаче (43) интегральное преобразование (15), обозначив соответствующую трансформанту искомой функции так:

$$v_{pnk}(r) = \int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta\,\varphi_1(\theta,\nu_k)\,v_{pn}(r,\theta)\,d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

и аналогично трансформанты заданных функций.

В результате краевая задача (43) примет вид

$$L_s v_{pnk} \equiv \left[r^2 v'_{pnk}(r)\right]' - \nu_k(\nu_k+1)\,v_{pnk}(r) - r^2 s^2 v_{pnk}(r) =$$

$$= f_{pnk}(r) - S_k(r,\omega), \quad a < r < b, \quad v_{pnk}(a) = v_{pnk}(b) = 0,$$

$$S_k(r,\omega) = \left[\varphi_1(\theta,\nu_k)\sin\theta\, v^{\cdot}_{pn}(r,\theta)\right]_{\omega_0}^{\omega_1} - \left[\varphi^{\cdot}_1(\theta,\nu_k)\sin\theta\, v_{pn}(r,\theta)\right]_{\omega_0}^{\omega_1}. \tag{45}$$

При этом выражение для $S_k(r,\omega)$ расшифровывается в зависимости от типа граничных условий a), b) и c) в (43). От этого зависит и из какого уравнения следует находить ν_k, и вид функции $\varphi_1(\theta,\nu_k)$. Так, в случае граничного условия a) вместо $\varphi_1(\theta,\nu_k)$ в (44) следует использовать функцию $\varphi_a(\theta,\nu_k)$, определяемую формулой (16), а числа ν_k находить из уравнения (18), причем выражение $S_k(r,\omega)$ из (45) преобразуется в следующее:

$$S^a_k(r,\omega) = \sum_{j=0}^{1} \sin\omega_j\,\varphi^{\cdot}_a(\omega_j,\nu_k)\,g^j_{pn}(r).$$

В случае граничных условий b) и c) вместо функции $\varphi_1(\theta,\nu_k)$ в (44) следует использовать функции $\varphi_b(\theta,\nu_k)$ и $\varphi_c(\theta,\nu_k)$, определяемые соответственно формулами (21) и (26), а числа ν_k находить иэ уравнений (24), (27) соответственно. Формулу же для $S_k(r,\omega)$ нужно заменить следующими выражениями:

$$\left\| \begin{matrix} S_k^b(r,\omega) \\ S_k^c(r,\omega) \end{matrix} \right\| = -\sum_{j=0}^{1} \left\| \begin{matrix} \varphi_b(\omega_j,\nu_k) \\ \varphi_c(\omega_j,\nu_k) \end{matrix} \right\| g_{pn}^j(r)\sin\omega_j .$$

Таким образом, во всех трех случаях граничных условий $S_k(r,\omega)$ в (45) является известной функцией и решение начально-краевой задачи (40) сведено к решению одномерной самосопряженной краевой задачи (45). Чтобы решить последнюю, следует построить функцию Грина $G_s(r,\rho)$ краевой задачи (45). Это можно сделать с помощью приема, изложенного в [6], учитывая, что фундаментальной системой решений $y_0(r)$ и $y_1(r)$ дифференциального уравнения из (45) являются модифицированные функции Бесселя:

$$y_0(r) = r^{-1/2} I_{\nu+1/2}(rs), \qquad y_1(r) = r^{-1/2} K_{\nu+1/2}(rs), \tag{46}$$

определитель Вронского которых $W(y_0,y_1) = -r^2$ согласно формуле 7.11 (32) из [7].

Выполнив операции, предусмотренные упомянутым приемом, найдем

$$G_s(r,\rho) = \frac{\sqrt{ab}}{\Delta_s(a,b)} \begin{cases} \Psi_0(\rho)\,\Psi_1(r), & r \le \rho; \\ \Psi_0(r)\,\Psi_1(\rho), & r \ge \rho, \end{cases} \tag{47}$$

где

$$\Delta_s(a,b) = I_{\nu+1/2}(as)\,K_{\nu+1/2}(bs) - I_{\nu+1/2}(bs)\,K_{\nu+1/2}(as),$$
$$\sqrt{br}\,\Psi_0(r) = K_{\nu+1/2}(bs)\,I_{\nu+1/2}(rs) - I_{\nu+1/2}(bs)\,K_{\nu+1/2}(rs),$$
$$\sqrt{ar}\,\Psi_1(r) = I_{\nu+1/2}(as)\,K_{\nu+1/2}(rs) - K_{\nu+1/2}(as)\,I_{\nu+1/2}(rs).$$

Здесь ν следует заменить на ν_k. Используя построенную функцию Грина (47), можем найти трансформанту $\upsilon_{pnk}(r)$, причем она будет иметь разные выражения в зависимости от граничного условия в (43):

$$\left\| \begin{matrix} \upsilon_{pnk}^a(r) \\ \upsilon_{pnk}^{b,c}(r) \end{matrix} \right\| = \int_a^b G_s(r,\rho)\left[f_{pnk}(\rho) - \sum_{j=0}^{1} \sin\omega_j \left\| \begin{matrix} \varphi_a(\omega_j,\nu_k) \\ \varphi_{b,c}(\omega_j,\nu_k) \end{matrix} \right\| g_{pn}^j(\rho) \right] d\rho .$$

Обратив найденные трансформанты по формуле (29), найдем решение краевых задач (43) по формуле

$$\upsilon_{pn}^e(r,\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\upsilon_{pnk}^e(r)\,\varphi_e(\theta,\nu_k)}{\sigma_{mk}^e(\omega_0,\omega_1)}, \qquad e = a, b, c. \tag{48}$$

Чтобы получить решение исходных начально-краевых задач (40), следует найденные трансформанты Фурье (42) и Лапласа (41) обратить по известным формулам обращения, учтя при этом, что $m = |n|$.

Замечание. Как отмечено в работах [6, 8], поскольку граничные условия при $\theta = \omega_j$, $j = 0, 1$, в краевых задачах (43) являются неоднородными, сходимость рядов (48) будет условной. Поэтому при необходимости выполнения в рядах (48) предельных переходов и дифференцирования следует [6, 8] выделить из них слабосходящиеся части и просуммировать их. Для этого необходимо воспользоваться асимптотическим представлением входящих под знак суммы функций, в том числе асимптотическими решениями трансцендентных уравнений, полученными выше.

В случае, когда в начально-краевой задаче (40) $a = 0$, $b = \infty$, т. е. имеем круговой полый неусеченный конус для решения краевой задачи (45), необходимость в построении функции Грина отпадает. В этом случае следует поступить так. Чтобы охватить сразу три случая граничных условий в (40) и (43), заменим в (45) $S_k(r,\omega)$ на $S_k^e(r,\omega)$, $e = a, b, c$.

Последующим введением дифференциального оператора

$$L_\nu f(x) = \left[x^2 f'(x)\right]' - \left[\nu_k(\nu_k+1)+x^2\right] f(x)$$

и выполнением замен

$$r \doteq sx^{-1}, \quad \upsilon^e_{pnk}(r) = \upsilon^e_{pnk}(s^{-1}x) = \tilde{\upsilon}^e_{pnk}(x)$$

получаем уравнение

$$L_\nu \tilde{\upsilon}^e_{pnk}(x) = \tilde{f}_{pnk}(x) - \tilde{S}^e_k(x,\omega), \quad 0 < x < \infty,$$

$$\left[\tilde{f}_{pnk}(x),\, \tilde{S}^e_k(x,\omega)\right] = \left[f_{pnk}(s^{-1}x),\, S^e_k(s^{-1}x,\omega)\right].$$

К нему применяем интегральное преобразование Конторовича – Лебедева [9]

$$\tilde{\upsilon}^e_{pnk\tau} = \int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} \tilde{\upsilon}^e_{pnk}(x)\,dx,$$

$$\left\| \tilde{f}_{pnk\tau},\, \tilde{S}^e_{k\tau}(\omega) \right\| = \int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \left\| \tilde{f}_{pnk}(\xi),\, \tilde{S}^e_k(\xi,\omega) \right\| d\xi.$$

В результате получаем алгебраическое уравнение

$$-(\tau^2+\gamma_k^2)\,\tilde{\upsilon}^e_{pnk\tau} = \tilde{f}_{pnk\tau} - \tilde{S}^e_{k\tau}(\omega), \qquad \gamma_k = 1/2+\nu_k,$$

откуда находим $\tilde{\upsilon}^e_{pnk\tau}$. Подставив его выражение в формулу обращения для преобразования Конторовича – Лебедева [9], найдем

$$\tilde{\upsilon}^e_{pnk}(x) = \int_0^\infty \left[\tilde{S}^e_k(\xi,\omega) - \tilde{f}_{pnk}(\xi)\right] J_k(x,\xi)\,d\xi, \tag{49}$$

где

$$J_k(x,\xi) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\tau K_{i\tau}(x) K_{i\tau}(\xi)}{(\operatorname{sh}\pi\tau)^{-1}(\tau^2+\gamma_k^2)}\,d\tau = \begin{cases} I_{\gamma_k}(x)\,K_{\gamma_k}(\xi), & x<\xi; \\ I_{\gamma_k}(\xi)\,K_{\gamma_k}(x), & \xi<x. \end{cases} \tag{50}$$

Второе равенство в (50) — следствие формулы 2.16.52 (11) из [10].

Если в (49) вернуться к переменной $r = xs$ и подставить полученное выражение в (48), то получим решение краевых задач (43) для всех трех граничных условий $e=a$, $e=b$, $e=c$.

Для получения решения начально-краевых задач (40) при $a=0$, $b=\infty$ остается воспользоваться, как и выше, формулами обращения Фурье и Лапласа и учесть замечание.

1. *Титчмарш Э. И.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – Ч. 1. – 278 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: гипергеометрическая функция, функция Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
3. *Титчмарш Э. И.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 463 с.
4. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 1979. – 415 с.
5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. – 487 с.
6. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
8. *Попов Г. Я.* О расширении возможностей метода интегральных преобразований при решении задач механики // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, № 5. – С. 130 – 142.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. – Т. 2. – 295 с.
10. *Прудников А. Л., Брычков Ю. А., Маричев О. М.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.

Получено 17.05.99,
после доработки — 17.01.2000