УДК 517.925

М. Т. Терехин (Рязан. пед. ун-т)

СУЩЕСТВОВАНИЕ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We investigate the cases where conditions for the existence of a nonzero periodic solution of a system of ordinary differential equations are defined by properties of elements of a linear approximation matrix as well as properties of nonlinear terms.

Досліджено випадки, коли умови існування ненульового періодичного розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь визначаються як властивостями елементів матриці лінійного наближення, так і властивостями нелінійних членів.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t,\lambda)x + F(t,x,\lambda)x, \tag{1}$$

в которой $x \in E_n$, $A(t,\lambda)$, $F(t,x,\lambda)$ — ω-периодические по t матрицы, $\lambda \in E_r$, λ — параметр, $t \in R =]-\infty, \infty[$, E_s — s-мерное векторное пространство.

Задача состоит в определении условия существования ненулевого периодического решения системы (1). Аналогичная задача рассматривалась в работах [1, 2] в предположении, что матрица системы линейного приближения постоянная, имеющая собственные значения вида $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$, $\mu(\lambda)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, $\beta(0) \neq 0$, $\mu'(0) \neq 0$. Эта же задача в работе [3] исследовалась при условии, что матрица системы линейного приближения при критическом значении параметра имеет только нулевые собственные значения, в работе [4] — при условии, что матрица системы линейного приближения имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$, $\alpha(\lambda) = \lambda^m k(\lambda)$, $m > 0$, $k(0) \neq 0$, $\beta(0) > 0$, все остальные собственные значения при $\lambda = 0$ имеют ненулевые действительные части. В работе [5] для системы дифференциальных уравнений, правая часть которой — голоморфная вектор-функция по переменным x, λ, в условиях выполнимости бифуркационной системы равенств доказана теорема о существовании периодического решения.

В настоящей статье рассмотрены случаи, когда условия существования ненулевого периодического решения определяются как свойствами элементов матрицы $A(t,\lambda)$, так и свойствами нелинейных членов системы.

Пусть

$$|x| = \max_i |x_i|, \quad D(\delta_0) = \{(x,\lambda) : |x| \leq \delta_0, |\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0\},$$

$$W(\delta_0) = \{\alpha : \alpha \in E_n, |\alpha| \leq \delta_0\}, \quad \Lambda(\delta_0) = \{\lambda : \lambda \in E_r, |\lambda - \lambda_0| \leq \delta_0\},$$

δ_0 — некоторое число, λ_0 — значение параметра, $\|B\| = \sup\limits_{|z| \leq 1} |Bz|$, B — матрица. Для простоты записей будем считать, что $\lambda_0 = 0$.

Далее предполагаем, что на множестве $R \times D(\delta_0)$ матрицы $A(t,\lambda)$ и $F(t,x,\lambda)$ непрерывны, $\lim\limits_{x\to 0} \|F(t,x,\lambda)\|/|x| \leq c$ равномерно относительно $t \in [0,\omega]$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, $A(t,\lambda) = A_0(t) + A_1(t,\lambda)$, $A_0(t)$, $A_1(t,\lambda)$ — непрерывные ω-периодические матрицы, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \|A_1(t,\lambda)\|/|\lambda| \leq c$ равномерно относительно $t \in [0,\omega]$, $0 \leq c < \infty$, система (1) имеет свойство единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра.

Символом $x(\cdot,\alpha,\lambda)$ обозначим решение $x(t,\alpha,\lambda)$ системы (1), удовлетворяющее условию $x(0,\alpha,\lambda) = \alpha$.

Очевидно, что при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ $x \equiv 0$ является решением системы (1).

Поэтому число $\delta_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы при любых $\alpha \in W(\delta_0)$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (1) было определено на сегменте $[0, \omega]$.

Определение. *Решение* $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ *системы* (1) *называется малым* ω*-периодическим решением, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существуют векторы* $\alpha \in W(\delta_0)$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ *такие, что* $x(0, \alpha, \lambda) = x(\omega, \alpha, \lambda)$ *и* $|x(\cdot, \alpha, \lambda)| < \varepsilon$ *при любом* $t \in [0, \omega]$.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A_0(t)x$, $X(0) = E$, E — единичная матрица. Решение системы (1) можно представить в виде $x(\cdot, \alpha, \lambda) = (X(\cdot) + \Phi(\cdot, \alpha, \lambda))\alpha$, где $\Phi(\cdot, \alpha, \lambda)$ — решение матричного уравнения

$$\dot{\Phi} = [A(t, \lambda) + F(t, x(t, \alpha, \lambda), \lambda)]\Phi + [A_1(t, \lambda) + F(t, x(t, \alpha, \lambda), \lambda)]X(t),$$

удовлетворяющее условиям $\Phi(0, \alpha, \lambda) = 0$; $\Phi(t, \alpha, \lambda) \to 0$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$ при $\mu = \max\{|\alpha|, |\lambda|\} \to 0$.

Решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (1) тогда и только тогда является ω-периодическим, когда векторы α и λ удовлетворяют системе

$$[X(\omega) - E]\alpha + X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(t)(A_1(t, \lambda) + F(t, x, \lambda))x\,dt = 0, \tag{2}$$

в которой $x = (X(t) + \Phi(t, \alpha, \lambda))\alpha$.

Равенство (2) запишем в следующем виде:

$$[X(\omega) - E]\alpha + Q(\lambda)\alpha + R(\alpha, \lambda)\alpha + S(\alpha, \lambda)\alpha = 0, \tag{3}$$

где

$$Q(\lambda) = X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(t)A_1(t, \lambda)X(t)\,dt,$$

$$R(\alpha, \lambda) = X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(t)F(t, (X(t) + \Phi(t, \alpha, \lambda))\alpha, \lambda))X(t)\,dt,$$

$\lim\limits_{\alpha \to 0} R(\alpha, \lambda) = 0$ равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, $\lim\limits_{\mu \to 0} \|S(\alpha, \lambda)\| / |\mu| = 0$.

Непосредственно из равенства (3) следует, что если $\operatorname{rang}[X(\omega) - E] = n$, то существует число $\delta \in]0, \delta_0]$ такое, что при любых $\alpha \in W(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ решение $x(\cdot, \alpha, \lambda)$ системы (1) не является ω-периодическим.

1. Пусть $\operatorname{rang}[X(\omega) - E] = k$, $0 \leq k < n$. Заменой переменных $\alpha = L_1\gamma$ (при $k = 0$, $\alpha = \gamma$), в которой $L_1 - n \times (n - k)$-мерная матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы $[X(\omega) - E]\alpha = 0$, система (3) сводится к системе

$$Q_1(\lambda)\gamma + R_1(\gamma, \lambda)\gamma + S_1(\gamma, \lambda)\gamma = 0, \tag{4}$$

где $Q_1(\lambda) = Q(\lambda)L_1$, $R_1(\gamma, \lambda) = R(L_1\gamma, \lambda)L_1$, $S_1(\gamma, \lambda) = S(L_1\gamma, \lambda)L_1$.

Пусть $r \geq n$, $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_r)$, при любом $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$ $\overline{\lambda}_s = \lambda_s^{\nu_s}$, число $\nu_s > 0$ и удовлетворяет равенству $(-\gamma)^{\nu_s} = -\gamma^{\nu_s}$, $\gamma > 0$ — некоторое число, и пусть векторы $p = (\overline{\lambda}_{p_1}, \overline{\lambda}_{p_2}, \ldots, \overline{\lambda}_{p_n})$, $q = (\overline{\lambda}_{q_1}, \overline{\lambda}_{q_2}, \ldots, \overline{\lambda}_{q_m})$ таковы, что $n + m = r$, при любых i, j $\overline{\lambda}_{p_i}$, $\overline{\lambda}_{q_j}$ — координаты вектора $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda}_{p_i} \neq \overline{\lambda}_{q_j}$, при $i < j$ $p_i < p_j$, $q_i < q_j$. В частности, если $r = n$, то $p = \overline{\lambda}$, вектор q не определен.

Теорема 1. *Пусть:*

1) *матрица* $Q_1(\lambda)$ *представима в виде* $Q_1(\lambda) = M(\overline{\lambda}) + o(|\overline{\lambda}|)$, *элементы матрицы* $M(\overline{\lambda})$ *линейно зависят от координат вектора* $\overline{\lambda}$, $\lim_{\overline{\lambda} \to 0} \|o(|\overline{\lambda}|)\| / |\overline{\lambda}| = 0$;

2) *существуют вектор* p *и* $(n-k)$*-мерный вектор* e^* $(|e^*|=1)$ *такие, что* $M(\overline{\lambda}) = Y(p) + Z(q)$, $\det B(e^*) \neq 0$, *матрица* $B(\gamma)$ *определяется равенством* $Y(p)\gamma = B(\gamma)p$;

3) $\lim\limits_{\overline{\mu}\to 0} \| S_1(|\gamma, \lambda|)\| / |\overline{\mu}| = 0$, $\overline{\mu} = \max\{|\gamma|, |\overline{\lambda}|\}$.

Тогда система (1) *имеет малое* ω*-периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $\rho = |\gamma|$. Тогда, положив при любом $i \in \{1, 2, \ldots$ $\ldots, n-k\}$ $e_i = \gamma_i/\rho$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-k})$, получим $|e| = 1$. Выберем векторы p и $e^*(|e^*|=1)$ таким образом, чтобы $\det B(e^*) \neq 0$. В силу условия 2 теоремы систему (4) можно записать так:

$$B(e^*)p + Z(q)e^* + R_1(\rho e^*, \lambda)e^* + S_1(\rho e^*, \lambda)e^* = 0. \tag{5}$$

Оператор Γ определим равенством

$$\Gamma p = -B^{-1}(e^*)[Z(q)e^* + R_1(\rho e^*, \lambda)e^* + S_1(\rho e^*, \lambda)e^*].$$

Из условия 3 теоремы следует, что число $\delta_1 > 0$ можно выбрать так, что при любом $\overline{\mu} \le \delta_1$ $\|S_1(\rho e^*, \lambda)\| < \delta_1/3\|B^{-1}(e^*)\|$. Кроме того, существует число $\delta_2 \in]0, \delta_1]$ такое, что при любых фиксированных $\rho < \delta_2$ и $|q| < \delta_2$ будут выполнены неравенства $\|Z(q)\| < \delta_1/3\|B^{-1}(e^*)\|$, $\|R(\rho e^*, \lambda)\| <$ $< \delta_1/3\|B^{-1}(e^*)\|$. Поэтому оператор Γ на множестве $\{p : |p| \le \delta_1\}$ имеет неподвижную точку. Пусть при произвольных, но фиксированных $\rho^* < \delta_2$, $q^*(|q^*| < \delta_2)$ неподвижной точкой оператора Γ является $p^*(|p^*| < \delta_1)$. Это значит, что пара (γ^*, λ^*), $\gamma^* = \rho^* e^* \neq 0$, $\overline{\lambda}_s^* = \lambda$, $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$, удовлетворяет системе (4), а система (1) имеет малое ω-периодическое решение. Теорема доказана.

В теореме 1 существенным является требование существования вектора $e^*(|e^*|=1)$, удовлетворяющего неравенству $\det B(e^*) \neq 0$. Определим условия, при которых такой вектор действительно существует.

Пусть

$$B(e) = \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{ij}^k e_k\right)_1^n, \quad e = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu),$$

a_{ij}^k — действительные числа и пусть $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu)$, при любом $i \in \{1,$ $2, \ldots, \nu\}$ $\eta_i \ge 0$ — целое число, $e^\eta = \left(e_1^{\eta_1} e_2^{\eta_2} \ldots e_\nu^{\eta_\nu}\right)$, $(\eta) = \sum_{k=1}^{\nu} \eta_k$. Тогда $\det B(e) = \sum_{(\eta)=n} A(\eta) e^\eta$, $A(\eta)$ — символическое обозначение коэффициента при e^η.

Теорема 2. *Если вектор* η^* *такой, что* $A(\eta^*) \neq 0$, *то существует вектор* $e^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_\nu^*)$ $(|e^*|=1)$, *удовлетворяющий неравенству* $\det B(e^*) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_\nu^*)$, $A(\eta^*) \neq 0$ и пусть для определенности $\eta_1^* \neq 0$. Тогда, положив $e_2 = e_3 = \ldots = e_\nu = 1$, получим, что $\det B(e)$ — многочлен степени не больше, чем n, относительно e_1, имеющий, по крайней мере, один коэффициент, отличный от нуля. Следовательно, уравнение $\det B(e) = 0$ имеет не более n действительных корней. Поэтому число e_1^*

$(|e^*| < 1)$ можно выбрать так, что $\det B(e^*) \neq 0$, где $e^* = (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_\nu^*)$, $e_2^* = e_3^* = \ldots = e_\nu^* = 1$. Теорема доказана.

2. Пусть на множестве $[0, \omega] \times D(\delta_0)$ вектор-функция $f(t, x, \lambda) = F(t, x, \lambda)x$ представима равенством $f(t, x, \lambda) = \varphi(t, x, \lambda) + \psi(t, x, \lambda)$, в котором $\varphi(t, x, \lambda)$ и $\psi(t, x, \lambda)$ — непрерывные ω-периодические по t вектор-функции; $\varphi(t, 0, \lambda) \equiv 0$; $\psi(t, 0, \lambda) \equiv 0$, $\varphi(t, x, \lambda)$ — форма порядка k относительно совокупности переменных x, λ, $\lim\limits_{z \to 0} \psi(t, x, \lambda)/|z|^k = 0$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$, $z = (x, \lambda)$, матрица $Q(\lambda) = Q^*(\lambda) + Q^{**}(\lambda)$, элементы матрицы $Q^*(\lambda)$ — формы порядка $k-1$ относительно λ, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \|Q^*(\lambda)\| / |\lambda|^{k-1} = 0$. Тогда систему (2) можно записать в виде

$$[X(\omega) - E]\alpha + R_2(\alpha, \lambda) + \overline{R}_2(\alpha, \lambda) = 0, \tag{6}$$

где $R_2(\alpha, \lambda)$ — форма порядка k относительно совокупности переменных α, λ, $\overline{R}_2(\alpha, \lambda) = o\left((\max\{|\alpha|, |\lambda|\})^k\right)$.

Как отмечено выше, интерес представляет тот случай, когда

$$\operatorname{rang}[X(\omega) - E] = d_1, \quad 0 \le d_1 < n.$$

Заменой переменных $\alpha = L_1\gamma$, рассмотренной в п. 1, система (6) преобразуется в систему

$$R_3(y) + \overline{R}_3(y) = 0, \tag{7}$$

где $y = (\gamma, \lambda) \in E_{n+r-d_1}$, $R_3(y)$ — форма порядка k относительно y, $\overline{R}_3(y) = o(|y|^k)$, $\lim\limits_{y \to 0} o(|y|^k)/|y|^k = 0$. Следовательно, для определения условий существования малого ω-периодического решения системы (1) необходимо определить условия существования малого решения системы (7) (по определению система (7) имеет малое решение, если для любого $\varepsilon > 0$ существует решение y_0 системы (7), удовлетворяющее неравенствам $y_0 \neq 0$, $|y_0| < \varepsilon$).

Теорема 3. *Пусть вектор* y^* $(|y^*| = 1)$ *такой, что* $R_3(y^*) \neq 0$. *Тогда в окрестности точки* $y = 0$ *существует множество, в котором нет решения системы* (7).

Доказательство. Пусть $y = \rho y^*$, $\rho > 0$. Поскольку $R_3(y^*) \neq 0$, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого вектора Δy, $|\Delta y| \le \varepsilon$, выполнены неравенства $y^* + \Delta y \neq 0$ и $R_3(y^* + \Delta y) \neq 0$. А это значит, что для любого Δy, $|\Delta y| \le \varepsilon$, $|R_3(y^* + \Delta y)| \ge a/2$, $a > 0$ — некоторое число. Но тогда существует число $\delta > 0$ такое, что при любых $\rho < \delta$ и Δy $(|\Delta y| \le \varepsilon)$ $|R_3(y^* + \Delta y)| - \left|\overline{R}_3[\rho(y^* + \Delta y)]\right|/\rho^k > 0$. Отсюда следует, что на множестве $\{y : y = \rho(y^* + \Delta y),\ \rho < \delta, |\Delta y| \le \varepsilon\}$ система (7) не имеет решения. Теорема доказана.

Аналогично устанавливается, что если при любом y, $|y| = 1$, $R_3(y) \neq 0$, то существует окрестность точки $y = 0$, любая точка которой, отличная от точки $y = 0$, не является решением системы (7).

Таким образом, необходимым условием существования малого решения системы (7) является существование вектора y^*, $|y^*| = 1$, удовлетворяющего равенству $R_3(y^*) = 0$.

Пусть вектор $u^*(|u^*| = 1)$ такой, что $R_3(u^*) = 0$. Тогда, полагая $y = \rho u$, $\rho > 0$, $v = u - u^*$ и применяя формулу Тейлора, систему (7) запишем в виде

$a > 0$ — некоторое число. Зафиксируем $\rho_1 < \delta_1$ и выберем $\delta_2 > 0$ таким образом, что при любом $\rho < \delta_2$ $|O(\rho u)|/\rho_1^{k_1} < a/2$. А это значит, что во множестве $\{\bar{\gamma} : \bar{\gamma} = \rho_1(\bar{\gamma}^* + \Delta\bar{\gamma}),\ \rho_1 < \delta_1,\ |\Delta\bar{\gamma}| \le \varepsilon\}$ при любом $\rho < \delta_2$ система (9) не имеет решений. Но тогда, учитывая замену переменных $v = L_2\bar{\gamma}$, получаем, что во множестве

$$\left\{y : y = \rho\left(u^* + L_2\rho_1(\bar{\gamma}^* + \Delta\bar{\gamma})\right),\ |\Delta\bar{\gamma}| \le \varepsilon,\ \rho_1 < \delta_1,\ \rho < \delta_2\right\}$$

система (7) не имеет решений. Теорема доказана.

Отметим, что если при любом $\bar{\gamma}$, $|\bar{\gamma}| = 1$, $R_4(\bar{\gamma}) \ne 0$, то аналогично устанавливается, что в окрестности точки $y = 0$ пространства E_{n+r-d_1} существует множество, в котором нет решения системы (7).

Пусть вектор $\bar{u}^*$, $\left|\bar{u}^*\right| = 1$, такой, что $R_4\left(\bar{u}^*\right) = 0$. Тогда, полагая $\bar{\gamma} = \rho_1\bar{u}$, $\rho_1 > 0$, $\bar{v} = \bar{u} - \bar{u}^*$ и применяя формулу Тейлора, записываем систему (9) в виде

$$D\left[R_4\left(\bar{u}^*\right)\right]\bar{v} + \sum_{j=2}^{k_1}\bar{P}_j\left(\bar{u}^*; \bar{v}\right) + O_1(\rho_1\bar{u}) + \frac{O(\rho u)}{\rho_1^{k_1}} = 0, \tag{10}$$

где $D\left[R_4\left(\bar{u}^*\right)\right]$ — матрица Якоби при любом $j \in \{2, \ldots, k_1\}$, $\bar{P}_j\left(\bar{u}^*; \bar{v}\right)$ — форма порядка j по переменной $\bar{v}$, $\lim\limits_{\rho_1 \to 0} O_1(\rho_1\bar{u}) = 0$ равномерно относительно $\bar{u}$.

Теорема 6. *Если* $r - d_1 - d_2 > 0$ *и* $\operatorname{rang} D\left[R_4\left(\bar{u}^*\right)\right] = n$, *то система* (7) *имеет малое решение.*

Доказательство. Для простоты рассуждений положим $D\left[R_4\left(\bar{u}^*\right)\right] = \left[\bar{M}_1, \bar{M}_2\right]$, $\bar{M}_1$ — $n \times n$-мерная матрица, $\det\bar{M}_1 \ne 0$, $\bar{M}_2$ — $n \times (r - d_1 - d_2)$-мерная матрица. Пусть $\bar{v} = \operatorname{colon}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ — соответственно n- и $(r - d_1 - d_2)$-мерный векторы. Систему (10) можно записать так:

$$\bar{M}_1\bar{v}_1 + \bar{M}_2\bar{v}_2 + o(|\bar{v}_1|) + O(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + O_1(\rho_1\bar{u}) + \frac{O(\rho u)}{\rho_1^{k_1}} = 0,$$

$\lim\limits_{\bar{v}_1 \to 0} o(|\bar{v}_1|)/|\bar{v}_1| = 0$, $\lim\limits_{\bar{v}_2 \to 0} O(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$ равномерно относительно $\bar{v}_1$.

Оператор Γ_2 определим равенством

$$\Gamma_2\bar{v}_1 = -\bar{M}_1^{-1}\left[\bar{M}_2\bar{v}_2 + o(|\bar{v}_1|) + O(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + O_1(\rho_1\bar{u}) + \frac{O(\rho u)}{\rho_1^{k_1}}\right].$$

Число $\delta > 0$ выберем так, чтобы при любом $\bar{v}_1$ $(|\bar{v}_1| \le \delta)$ выполнялось неравенство $|o(|\bar{v}_1|)| < \delta/5\|\bar{M}_1^{-1}\|$. Кроме того, число $\delta_1 > 0$ выберем так, чтобы при любых $\bar{v}_2$, $|\bar{v}_2| \le \delta_1$, $\bar{v}_1$, $|\bar{v}_1| \le \delta$, $\rho_1 < \delta_1$ выполнялись неравенства

$$|\bar{M}_2\bar{v}_2| < \delta/5\|\bar{M}_1^{-1}\|, \quad |O(\bar{v}_1, \bar{v}_2)| < \delta/5\|\bar{M}_1^{-1}\|, \quad |O_1(\rho_1\bar{u})| < \delta/5\|\bar{M}_1^{-1}\|.$$

Зафиксируем $\rho_1 < \delta_1$ и выберем $\delta_2 > 0$ так, чтобы при любом $\rho < \delta_2$ $|O(\rho u)|/\rho_1^{k_1} < \delta/5\|\bar{M}_1^{-1}\|$. Следовательно, оператор Γ_2 на множестве $\{\bar{v}_1 : |\bar{v}_1| \le \delta\}$ имеет неподвижную точку. Пусть при произвольных, но фиксированных $\bar{v}_2^*$, $\left|\bar{v}_2^*\right| \le \delta_1$, $\rho_1^* < \delta_1$, $\rho^* < \delta_2$, неподвижной точкой оператора Γ_2 является $\bar{v}_1^*$, $\left|\bar{v}_1^*\right| \le \delta$. Тогда малое решение y^* системы (7) определится равенством $y^* = \rho^*\left(\bar{u}^* + L_2\rho_1^*(\bar{u}^* + \bar{v}^*)\right)$, $\bar{v}^* = \operatorname{colon}\left(\bar{v}_1^*, \bar{v}_2^*\right)$, так как для любого $\varepsilon > 0$ числа

δ, δ_1 и δ_2 можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства $y^* \neq 0$, $|y^*| < \varepsilon$. Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Если среди неравных нулю координат вектора u^* имеются координаты вектора γ, то теорема 6 определяет условия существования малого ω-периодического решения системы (1).

Пусть $\operatorname{rang} D[R_4(u^*)] = d_3$, $0 \le d_3 < n$, и пусть $r - d_1 - d_2 - d_3 > 0$. Тогда преобразованием $\overline{v} = L_3\tilde{\gamma}$, где L_3 — $n \times (n + r - d_1 - d_2 - d_3)$-мерная матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы $D\left[R_4\left(u^*\right)\right]\overline{v} = 0$ ($\overline{v} = \tilde{\gamma}$ при $d_3 = 0$), система (10) сведется к системе

$$R_5(\tilde{\gamma}) + R_6(\tilde{\gamma}) + O_1(\rho_1\overline{u}) + \frac{O(\rho u)}{\rho_1^{k_1}} = 0,$$

где $R_5(\tilde{\gamma})$ — форма порядка $2 \le k_2 \le k$, $\lim\limits_{\tilde{\gamma}\to 0} R_6(\tilde{\gamma})/|\tilde{\gamma}|^{k_2} = 0$. Тогда условия разрешимости задачи о существовании малых решений системы (7) (а следовательно, и малых ω-периодических решений системы (1)) определяются согласно теоремам, аналогичным теоремам 5 и 6. И так далее. Процедура получения условий разрешимости задачи о существовании малых решений системы (7) заканчивается, как только после очередного преобразования будет получена система, в которой число неизвестных не больше числа уравнений.

3. Предположим, что на множестве $W(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ в системе (6) $R_2(\alpha, \lambda) \equiv \equiv 0$. Это возможно, в частности, тогда, когда на этом множестве

$$Q(\lambda) \equiv 0, \quad X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(t)\varphi(t, X(t)\alpha, \lambda)X(t)\,dt \equiv 0. \tag{11}$$

Пусть $A(t, \lambda) = A_0(t) + A_1(t, \lambda) + A_2(t, \lambda) + A_3(t, \lambda)$, элементы матрицы $A_1(t, \lambda)$ — формы порядка $k-1$ относительно λ, элементы матрицы $A_2(t, \lambda)$ — формы порядка k относительно λ, $\lim\limits_{\lambda\to 0} A_3(t, \lambda)/|\lambda|^k = 0$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$, при любом $i \in \{1, 2, 3\}$ матрицы $A_i(t, \lambda)$ непрерывны, ω-периодические по t на множестве $R \times \Lambda(\delta_0)$ и пусть $\psi(t, x, \lambda) = \psi_1(t, x, \lambda) + \psi_2(t, x, \lambda)$, $\psi_1(t, x, \lambda)$ — форма порядка $k+1$ относительно $z = (x, \lambda)$, $\lim\limits_{z\to 0} \psi_2(t, x, \lambda)/|z|^{k+1} = 0$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$, при любом $i \in \{1, 2\}$ вектор-функция $\psi_i(t, x, \lambda)$ непрерывна, ω-периодична по t, $\psi_i(t, 0, \lambda) \equiv 0$ на множестве $[0, \omega] \times D(\delta_0)$. Тогда с учетом равенств (11) систему (2), в которой

$$x = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)[A_1(\xi, \lambda)\alpha + \varphi(\xi, X(\xi)\alpha, \lambda)]X(\xi)\,d\xi + o\left((\max\{|\alpha|, |\lambda|\})^k\right),$$

можно записать в виде

$$[X(\omega) - E]\alpha + R^*(\alpha, \lambda) + \overline{R}^*(\alpha, \lambda) = 0, \tag{12}$$

где $R^*(\alpha, \lambda)$ — форма порядка $k+1$ относительно совокупности переменных α, λ, $\overline{R}^*(\alpha, \lambda) = o\left((\max\{|\alpha|, |\lambda|\})^{k+1}\right)$. В частности, если на множестве $[0, \omega] \times D(\delta_0)$ $\psi(t, x, \lambda) \equiv 0$, при любом $i \in \{2, 3\}$ $A_i(t, x) \equiv 0$, то $R^*(\alpha, \lambda)$ — форма порядка $2k-1$ относительно совокупности переменных α, λ, $\overline{R}^*(\alpha, \lambda) = o\left((\max\{|\alpha|, |\lambda|\})^{2k-1}\right)$.

Для определения условий существования малого решения системы (12) (малого ω-периодического решения системы (1)) используется метод, с помощью которого определены условия существования малого решения системы (7).

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A_0 x + A_1(t, \lambda)x + F(t, x, \lambda)x, \tag{13}$$

в которой

$$A_0 = [\operatorname{colon}(0, 0, 0, 0), \operatorname{colon}(0, 0, -1, 0), \operatorname{colon}(0, 1, 0, 0), \operatorname{colon}(0, 0, 0, 1)],$$

$$A_1(t, \lambda) = [\operatorname{colon}(2\lambda_1, \lambda_2 \cos t, 3\lambda_1, 0),\ \operatorname{colon}(\lambda_2 \cos t, 2\lambda_1, \lambda_4, \lambda_3),$$

$$\operatorname{colon}(0, 0, -2\lambda_1, \lambda_3),\ \operatorname{colon}(0, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_4 \cos^2 t)],$$

$$F(t, x, \lambda) = [\operatorname{colon}(x_2^2, \lambda_1 x_1 \cos t, x_3^2 \sin t, \lambda_2 x_4),$$

$$\operatorname{colon}(x_1, x_2 \sin t, x_3, \lambda_4 x_2 \cos^2 t), \operatorname{colon}(x_3, x_1, x_4, 3x_2),$$

$$\operatorname{colon}(0, 2x_3, 2x_2, x_4)].$$

Непосредственным вычислением устанавливаем, что для системы (13) в равенстве (3) матрица $Q(\lambda)$ определяется равенством

$$Q(\lambda) = [\operatorname{colon}(2\pi\lambda_1, \pi\lambda_2, 3\pi\lambda_1, 0), \operatorname{colon}(\pi\lambda_2, 0, \pi\lambda_4, 0),$$

$$\operatorname{colon}(0, -\pi\lambda_4, 0, \lambda_3(1 - e^{-2\pi})),\ \operatorname{colon}(0, (e^{2\pi} - 1)\lambda_4, 0, \pi\lambda_4)],$$

$\lim\limits_{\alpha \to 0} R(\alpha, \lambda) = 0$, $\lim\limits_{\mu \to 0} \| S(\alpha, \lambda) \| / |\mu| = 0$. Ранг матрицы $X(2\pi) - E$ равен 1, линейно независимыми решениями системы $(X(2\pi) - E)\alpha = 0$ являются векторы $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$. Тогда преобразованием $\alpha = L^* \gamma$, в котором $L^* = [\operatorname{colon}(1, 0, 0, 0), \operatorname{colon}(0, 1, 0, 0), \operatorname{colon}(0, 0, 1, 0)]$, система (3) для системы уравнений (13) сведется к системе вида (4), в которой матрица

$$Q_1(\lambda) = [\operatorname{colon}(2\pi\lambda_1, \pi\lambda_2, 3\pi\lambda_1, 0), \operatorname{colon}(\pi\lambda_2, 0, \pi\lambda_4, 0),$$

$$\operatorname{colon}(0, -\pi\lambda_4, 0, (1 - e^{-2\pi})\lambda_3)].$$

Следовательно, $Q_1(\lambda) = M(\lambda) = Y(p)$, $p = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, вектор q не определен. Матрица $B(\gamma)$, удовлетворяющая равенству $Y(p)\gamma = B(\gamma)p$, определяется так:

$$B(\gamma) = [\operatorname{colon}(2\pi\gamma_1, 0, 3\pi\gamma_1, 0), \operatorname{colon}(\pi\gamma_2, \pi\gamma_1, 0, 0),$$

$$\operatorname{colon}(0, 0, 0, (1 - \exp(-2\pi))\gamma_3), \operatorname{colon}(0, -\pi\gamma_3, \pi\gamma_2, 0)].$$

Пусть $e^* = (1, 0, 1)$, тогда $\det B(e^*) = 3\pi^3(1 - \exp(-2\pi)) \neq 0$. Следовательно, согласно теореме 1 система (13) имеет малое ω-периодическое решение.

1. *Cronin Jane.* Bifurcation of periodic solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 1979. – **68**, № 1. – P. 130–151.
2. *Spiring Frans.* Sequence of bifurcation in a three-dimentional system a critical point // ZAMP. – 1973. – **34**, № 3. – P. 259–276.
3. *Langman K. A.* Bifurcation and stability of periodic solution from zero eigenvallue // J. Austral. Math. Soc. – 1973. – **21**, № 1. – P. 2–20.
4. *Flockerzi Dietrich.* Bifurcation formulas for O. D. E's in R^n // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 1981. – **5**, № 3. – P. 249–263.
5. *Грудо Э. И.* Периодические решения периодических дифференциальных систем в общем критическом случае // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 5. – С. 763–767.

Получено 15.02.99,
после доработки — 22.06.99