УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетров. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПОЛИНОМОВ И СПЛАЙНОВ

We obtain new inequalities of various metrics for differentiable periodic functions. In particular, for $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $s \in [p, q]$, we prove that functions $x \in L_\infty^r$ satisfy the best possible inequality

$$\left\| \left(x - c_{s+1}(x)\right)_\pm \right\|_q \le \frac{\left\| (\varphi_r)_\pm \right\|_q}{\left\| \varphi_r \right\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} \left\| x - c_{s+1}(x) \right\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}},$$

where φ_r is the Euler perfect spline of order r and $c_{s+1}(x)$ is a constant of the best approximation of function x in the space L_{s+1}. By using the considered inequality, we obtain a new Bernstein-type inequality for trigonometric polynomials τ of order at most n:

$$\left\| (\tau^{(k)})_\pm \right\|_q \le n^{k+1/p-1/q} \frac{\left\| (\cos(\cdot))_\pm \right\|_q}{\left\| \cos(\cdot) \right\|_p} \left\| \tau \right\|_p,$$

where $k \in N$, $p \in (0, 1]$, and $q \in [1, \infty]$. We consider other applications of the best possible inequality.

Одержано нові нерівності різних метрик для диференційовних періодичних функцій, зокрема, доведено, що при $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $s \in [p, q]$ для функцій $x \in L_\infty^r$ справедлива непокращувана нерівність

$$\left\| \left(x - c_{s+1}(x)\right)_\pm \right\|_q \le \frac{\left\| (\varphi_r)_\pm \right\|_q}{\left\| \varphi_r \right\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} \left\| x - c_{s+1}(x) \right\|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}},$$

де φ_r — ідеальний сплайн Ейлера порядку r, $c_{s+1}(x)$ — константа найкращого наближення функції x у просторі L_{s+1}. За допомогою наведеної нерівності одержано нову нерівність типу Бернштейна для тригонометричних поліномів τ порядку, що не перевищує n:

$$\left\| (\tau^{(k)})_\pm \right\|_q \le n^{k+1/p-1/q} \frac{\left\| (\cos(\cdot))_\pm \right\|_q}{\left\| \cos(\cdot) \right\|_p} \left\| \tau \right\|_p,$$

де $k \in N$, $p \in (0, 1]$, $q \in [1, \infty]$. Розглянуто інші застосування цієї нерівності.

1. Введение. Пусть L_p, $0 < p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций x, для которых $\| x \|_p < \infty$, где

$$\| x \|_p := \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad 0 < p < \infty,$$

и

$$\| x \|_\infty := \operatorname*{sup\,vrai}_{t \in R} |x(t)|.$$

Для заданных $s \in (0, \infty]$ и $r \in N$ обозначим через L_s^r множество непрерывных 2π-периодических функций x таких, что $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} := x)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s$; $W_s^r := \left\{ x \in L_s^r : \left\| x^{(r)} \right\|_s \le 1 \right\}$.

Для пространств функций, определенных на оси R, обозначения $L_p(R)$ $\| \cdot \|_{L_p(R)}$, $L_s^r(R)$ имеют тот же смысл, что и соответствующие обозначения дл пространств периодических функций.

Положим еще $L^r_{p,s}(R) := L_p(R) \cap L^r_s(R)$.

В работе [1] для функций $x \in L^r_{p,s}(R)$ установлены точные неравенства вида

$$\| x \|_{L_q(R)} \le K(q,p,s) \cdot \| x \|^{\alpha}_{L_p(R)} \left\| x^{(r)} \right\|^{1-\alpha}_{L_s(R)}, \tag{1.1}$$

где $\alpha := \dfrac{r+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$ в следующих случаях: $r=1$, $0<p<q\le\infty$, $s\in[1,\infty)$.

В работах [2–5] изучались неравенства вида (1.1) для 2π-периодических функций и их аналоги. Некоторые результаты из этих работ, необходимые в дальнейшем, сформулированы ниже в виде теорем 1.1, 1.2 и 1.3.

Через $\varphi_r(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, $r \in N$, обозначим r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Через $E_0(x)_p$, $p\in(0,\infty)$, обозначим наилучшее приближение константой функции $x \in L_p$ в метрике пространства L_p, а через $c_p(x)$ — константу наилучшего приближения в пространстве L_p функции x.

Отметим, что на всем пространстве L^r_s соответствующее неравенство вида (1.1) невозможно (ибо если $x \in L^r_s$, то и $x + c \in L^r_s$ для любого $c \in \boldsymbol{R}$). Поэтому для периодических функций неравенство вида (1.1) нужно рассматривать на подмножествах функций $x \in L^r_s$, имеющих нули, либо нормы $\| x \|_p$ заменять на величины типа $\| x - c_s(x) \|_p$.

Теорема 1.1. *Пусть* $r \in N$ *и* $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty$ *имеют место неулучшаемые неравенства*

$$\| x - c_s(x) \|_q \le \frac{\| \varphi_r \|_q}{\| \varphi_r \|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}}} \| x - c_s(x) \|_p^{\frac{r+1/q}{r+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{1/p-1/q}{r+1/p}}, \tag{1.2}$$

где $s = p+1$ *или* $s = \infty$, *и*

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\| \varphi_r \|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p^{\frac{r}{r+1/p}}} E_0(x)_p^{\frac{r}{r+1/p}} E_0\left(x^{(r)}\right)_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}}. \tag{1.3}$$

С помощью неравенств (1.2) и (1.3) в работах [2–5] получены неравенства разных метрик типа Никольского для тригонометрических полиномов и полиномиальных сплайнов.

Через $\mathcal{T}_n$, $n \in N$, обозначим множество тригонометрических полиномов порядка не превышающего n, а через $S_{n,r}$, $n, r \in \boldsymbol{N}$, — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $k\pi/n$, $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Теорема 1.2. *Пусть* $r \in N$ *и* $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$. *Тогда для любого полинома* $\tau \in \mathcal{T}_n$ *выполняется неравенство*

$$\| \tau - c_s(\tau) \|_q \le n^{1/p-1/q} \frac{\| \cos(\cdot) \|_q}{\| \cos(\cdot) \|_p} \| \tau - c_s(\tau) \|_p, \tag{1.4}$$

где $s = p+1$ *или* $s = \infty$. *Неравенство* (1.4) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in N}\ \sup_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_n\\ \tau\neq\text{const}}} \frac{\|\tau-c_s(\tau)\|_q}{n^{1/p-1/q}\|\tau-c_s(\tau)\|_p} = \frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}.$$

Теорема 1.3. *Пусть* $r\in N$ *и* $p,q\in(0,\infty]$, $q>p$. *Тогда для любого сплайна* $\sigma\in S_{n,r}$

$$\|\sigma-c_s(\sigma)\|_q \le n^{1/p-1/q}\frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p}\|\sigma-c_s(\sigma)\|_p, \tag{1.5}$$

где $s=p+1$ *или* $s=\infty$. *Неравенство* (1.5) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in N}\ \sup_{\substack{\sigma\in S_{n,r}\\ \sigma\neq\text{const}}} \frac{\|\sigma-c_s(\sigma)\|_q}{n^{1/p-1/q}\|\sigma-c_s(\sigma)\|_p} = \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p}.$$

В настоящей работе неравенство (1.2) доказано для $s\in[p+1,\ q+1]$ (теорема 3.1) и с его помощью получено новое неравенство типа Бернштейна: для любых $n,k\in N$, $q\in(1,\infty]$, $p\in(0,1]$ и для любого тригонометрического полинома $\tau\in\mathcal{T}_n$

$$\left\|\left(\tau^{(r)}\right)_\pm\right\|_q \le n^{k+1/p-1/q}\frac{\|(\cos(\cdot))_\pm\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}\|\tau\|_p$$

(теорема 3.2), где $x_\pm := \max\{\pm x, 0\}$. Для $q=\infty$, $p\in(0,\infty)$ это неравенство было доказано ранее в [6].

В данной работе рассмотрены также приложения теоремы 3.1 к неравенствам типа Никольского для тригонометрических полиномов и сплайнов. А именно, неравенства (1.4) и (1.5) доказаны для $s\in[p+1,\ q+1]$ (теоремы 3.3 и 3.4).

В заключение работы приведен пример, показывающий, что неравенство (1.2) не выполняется при $s<p+1$.

С другой стороны, принимая во внимание теоремы 1.1 и 3.1, можно высказать гипотезу о том, что неравенство (1.2) справедливо для $s\in[p+1,\ \infty]$.

2. Вспомогательные утверждения. Следующие ниже леммы 2.1 и 2.2 получены автором совместно с В. Ф. Бабенко и С. А. Пичуговым и публикуются здесь с согласия авторов. Эти утверждения наряду с леммой 2.3 составляют основу полученных в работе результатов.

Для $p\in(0,\infty)$, $\lambda>0$, $r\in N$ положим

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{p,\lambda} := \left\{\int_0^{2\pi/\lambda}\left|\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Лемма 2.1 (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов). *Пусть* $r\in N$, $x\in W^r_\infty$. *Если существует* $s\in(0,\infty)$ *такое, что*

$$\|x_+\|_s = \|x_-\|_s, \tag{2.1}$$

и число $\lambda>0$ *выбрано из условия*

$$\|x\|_s = \|\varphi_{\lambda,r}\|_{s,\lambda}, \tag{2.2}$$

то

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть для определенности

$$\|x_-\|_\infty \le \|x_+\|_\infty. \tag{2.4}$$

Предположим, что (2.3) неверно. Тогда $\|x_+\|_\infty > \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$. Следовательно, существует число $\lambda' \in (0, \lambda)$ такое, что

$$\|x_+\|_\infty = \|\varphi_{\lambda',r}\|_\infty. \tag{2.5}$$

Тогда в силу (2.4)

$$\|x_-\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda',r}\|_\infty. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) в силу теоремы сравнения Колмогорова (см., например, § 3.3 в [7]) следует, что если

$$x_+(t_1) = (\varphi_{\lambda',r})_+(t_2), \tag{2.7}$$

то

$$|x'_+(t_1)| \le \left|(\varphi_{\lambda',r})'_+(t_2)\right| \tag{2.8}$$

(в случае $r=1$ в предположении, что $x'_+(t_1)$ существует).

Используя (2.5), выбираем $u, u_1 \in \boldsymbol{R}$ так, чтобы

$$x_+(u) = \|(\varphi_{\lambda',r})_+\|_\infty = \varphi_{\lambda',r}(u_1).$$

Тогда из (2.7) и (2.8) вытекает, что

$$x_+(t+u) \ge \varphi_{\lambda',r}(t+u_1) \tag{2.9}$$

для всех $t \in [-\pi/\lambda', \pi/\lambda']$. Из (2.9) следует неравенство

$$\|x_+\|_s \ge \|(\varphi_{\lambda',r})_+\|_{s,\lambda'}. \tag{2.10}$$

Поскольку $\lambda' \in (0, \lambda)$, то из (2.10) в силу очевидного равенства

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_{s,\lambda} = \lambda^{-r-1/s}\|\varphi_r\|_s \tag{2.11}$$

получаем

$$\|x_+\|_s > \|(\varphi_{\lambda,r})_+\|_{s,\lambda}.$$

Тогда согласно (2.1)

$$\|x_-\|_s > \|(\varphi_{\lambda,r})_-\|_{s,\lambda}$$

и, значит,

$$\|x\|_s > \|\varphi_{\lambda,r}\|_{s,\lambda},$$

что противоречит (2.2). Тем самым (2.3) доказано. Лемма доказана.

Через $r(x,t)$ будем обозначать убывающую перестановку [8, с.18] сужения функции $x \in L_1$ на отрезок длиной 2π. Символами $r((\varphi_{\lambda,r})_\pm, t)$ будем обозначать убывающую перестановку сужения положительной (отрицательной) части сплайна $(\varphi_{\lambda,r})_\pm$ на отрезок, длина которого равна периоду этого сплайна, т. е. $2\pi/\lambda$.

Лемма 2.2 (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов). *В условиях леммы* 2.1 *для любого* $t > 0$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^t r^s(x_\pm, u)\,du \le \int_0^t r^s((\varphi_{\lambda,r})_\pm, u)\,du, \tag{2.12}$$

и, следовательно, для любого $q \in (s, \infty]$

$$\|x_\pm\|_q \le \|(\varphi_{\lambda,r})_\pm\|_{q,\lambda}. \tag{2.13}$$

Доказательство. В силу леммы 2.1 справедливо неравенство (2.3). Поэтому из теоремы сравнения Колмогорова следует, что если точки $t_1^\pm$, $t_2^\pm \in \boldsymbol{R}$ выбраны так, что

$$x_\pm(t_1^\pm) = (\varphi_{\lambda,r})_\pm(t_2^\pm), \tag{2.14}$$

то

$$\left|x'_\pm(t_1^\pm)\right| \le \left|(\varphi_{\lambda,r})'_\pm(t_2^\pm)\right| \tag{2.15}$$

(при $r = 1$ в предположении, что $x'_\pm(t_1^\pm)$ существуют).

Далее, поскольку в силу (2.1) x обращается в нуль, то перестановка $r(x_\pm, t)$ непрерывна на $[0, \mu^\pm]$, где $\mu^\pm := \operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : x_\pm(t) > 0\}$. При этом всегда $r(x_\pm, \mu^\pm) = 0$. Учитывая также (2.3), видим, что для любого $y^\pm \in [0, \|x_\pm\|_\infty]$ существуют $\theta_1^\pm \in [0, \mu^\pm]$ и $\theta_2^\pm \in [0, 2\pi/\lambda]$ такие, что

$$y^\pm = r(x_\pm, \theta_1^\pm) = r\big((\varphi_{\lambda,r})_\pm, \theta_2^\pm\big). \tag{2.16}$$

При этом из (2.14) и (2.15) в силу теоремы о производной перестановки (см., например, предложение 1.3.2 [8]) вытекает, что для любых точек $\theta_1^\pm$ и $\theta_2^\pm$, удовлетворяющих (2.16),

$$\left|r'(x_\pm, \theta_1^\pm)\right| \le \left|r'\big((\varphi_{\lambda,r})_\pm, \theta_2^\pm\big)\right|. \tag{2.17}$$

(Не ограничивая общности, можем считать функцию x тригонометрическим полиномом. Тогда все условия этого предложения выполнены.)

Подытоживая изложенное, заключаем, что, во-первых,

$$r(x_\pm, 0) \le r((\varphi_{\lambda,r})_\pm, 0)$$

(это сразу следует из (2.3)) и, во-вторых, каждая из разностей

$$\Delta_\pm(t) := r(x_\pm, t) - r((\varphi_{\lambda,r})_\pm, t)$$

изменяет знак (с „–" на „+") не более одного раза (это сразу следует из (2.17) ввиду непрерывности $\Delta_\pm(t)$.

То же самое, очевидно, верно и для s-х степеней $r^s(x_\pm, t)$ и $r^s((\varphi_{\lambda,r})_\pm, t)$, т. е.

$$r^s(x_\pm, 0) \le r^s((\varphi_{\lambda,r})_\pm, 0),$$

причем каждая из разностей

$$r^s(x_\pm, t) - r^s((\varphi_{\lambda,r})_\pm, t)$$

изменяет знак (с „–" на „+") не более одного раза .

Отсюда, учитывая (2.1) и (2.2), получаем (2.12).

Соотношение (2.13) для $q \ge p$ вытекает из (2.12) в силу предложения 1.3.10 из [8]. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *В условиях леммы* 2.1 *для любого* $p \in (0, s)$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^{\mu_+} f(t)g(t)\,dt = \int_0^{\mu_+} f(t)\,dg_1(t) =$$

$$= g_1(\mu_+)f(\mu_+) - g_1(0)f(0) - \int_0^{\mu_+} f'(t)g_1(t)\,dt = -\int_0^{\mu_+} f'(t)g_1(t)\,dt. \qquad (2.25)$$

Заметим, что из (2.1) и (2.2) сразу следует неравенство $\|x_+\|_\infty > 0$. Следовательно, множество $\{t: f'(t) < 0\}$ имеет положительную меру. Поэтому из (2.24) и (2.25) следует

$$\int_0^{\mu_+} f(t)g(t)\,dt < 0$$

или

$$\int_0^{\mu_+} r^q(x_+, t)\,dt < \int_0^{\mu_+} r^{q-p}(x_+, t)\,r^p((\varphi_{\lambda,r})_+, t)\,dt.$$

Применяя к правой части последнего соотношения неравенство Гельдера с показателями $q/(q-p)$ и q/p, получаем

$$\int_0^{\mu_+} r^q(x_+, t)\,dt < \left(\int_0^{\mu_+} r^q(x_+, t)\,dt\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_0^{\mu_+} r^q((\varphi_{\lambda,r})_+, t)\,dt\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Отсюда имеем

$$\|r(x_+, \cdot)\|_q^p < \|r(\varphi_{\lambda,r}, \cdot)_+\|_{q,\lambda}^p,$$

т. е., действительно, неравенство (2.23) строгое. В частности, при $q = s$

$$\|x_+\|_s < \|(\varphi_{\lambda,r})_+\|_{s,\lambda},$$

что противоречит (2.1) и (2.2). Лемма доказана.

3. Некоторые новые неравенства типа Надя и Бернштейна – Никольского.

Теорема 3.1. *Пусть* $r \in N$, $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$, $s \in [p, q]$. *Тогда для любой функции* $x \in L_\infty^r$ *имеют место неравенства*

$$\|(x - c_{s+1}(x))_\pm\|_q \le \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|(\varphi_r)_+\|_p^\alpha} \|(x - c_{s+1}(x))_\pm\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \qquad (3.1)$$

(при любой расстановке знаков „+" и „–" в индексах). В частности,

$$\|(x - c_{s+1}(x))_\pm\|_q \le \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \|x - c_{s+1}(x)\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \qquad (3.2)$$

и

$$\|x - c_{s+1}(x)\|_q \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha} \|x - c_{s+1}(x)\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}. \qquad (3.3)$$

и

$$\|x\|_q \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}. \tag{3.9}$$

Для доказательства этого следствия достаточно заметить, что если $\int_0^{2\pi} x(t)\,dt = 0$, то $c_2(x) = 0$.

При $p = 1$ это следствие получено ранее в работе [5].

***Следствие* 3.2.** *Пусть* $r \in N$, $q, s \in (0, \infty]$, $q \ge s$. *Тогда для любой функции* $x \in L_\infty^r$

$$\left\|(x - c_{s+1}(x))_\pm\right\|_q \le \|(\varphi_r)_+\|_q \left\|x^{(r)}\right\|_\infty.$$

Для доказательства этого следствия достаточно в (3.2) перейти к пределу при $p \to 0$.

В следующей теореме приведено новое неравенство типа Бернштейна для тригонометрических полиномов.

Теорема 3.2. *Пусть* $k, n \in N$, $q \in [1, \infty]$, $p \in (0, 1)$. *Тогда для любого полинома* $\tau \in \mathcal{T}_n$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\tau_\pm^{(k)}\right\|_q \le n^{k+1/p-1/q}\frac{\|(\cos(\cdot))_+\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}\|\tau\|_p. \tag{3.10}$$

Неравенство (3.10) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in N}\ \sup_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_n\\ \tau\ne 0}} \frac{\left\|\tau_\pm^{(k)}\right\|_q}{n^{k+1/p-1/q}\|\tau\|_p} = \frac{\|(\cos(\cdot))_+\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Зафиксируем $k \in N$ и выберем любое $r \in N$, $r > k$. Применив к $x = \tau^{(k)}$ неравенство (3.8), получим

$$\left\|\tau_\pm^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|(\varphi_{r-k})_+\|_q}{\|\varphi_{r-k}\|_p^\alpha}\left\|\tau^{(k)}\right\|_p^\alpha \left\|\tau^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{3.12}$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r-k+1/p}$. Оценим $\left\|\tau^{(k)}\right\|_p$ с помощью неравенства Арестова [9]:

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_p \le n^k\|\tau\|_p, \quad p \in (0,1),$$

а $\left\|\tau^{(r)}\right\|_\infty$ с помощью неравенства Бернштейна (см., например, § 3.1 [8])

$$\left\|\tau^{(r)}\right\|_\infty \le n^r\|\tau\|_\infty. \tag{3.13}$$

Тогда из (3.12) имеем

$$\left\|\tau_\pm^{(k)}\right\|_q \le n^{k\alpha+r(1-\alpha)}\frac{\|(\varphi_{r-k})_+\|_q}{\|\varphi_{r-k}\|_p^\alpha}\|\tau\|_p^\alpha\|\tau\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Устремляя в этом неравенстве $r \to \infty$ и замечая, что при этом $\alpha \to 1$,

$$k\alpha + r(1-\alpha) = k\frac{r-k+1/q}{r-k+1/p} + r\frac{1/p-1/q}{r-k+1/p} \to k+1/p-1/q,$$

а

$$\|\varphi_r\|_p \to \frac{4}{\pi}\|\cos(\cdot)\|_p \tag{3.14}$$

для любого $p \in (0, \infty]$, получаем (3.10).

Ясно, что (3.10) обращается в равенство для $\tau(t) = \cos t$. Поэтому (3.11) очевидно. Теорема доказана.

При $k = 0$ неравенство (3.10) без дополнительных ограничений на $\tau \in \mathcal{T}_n$, вообще говоря, неверно. В следующей теореме представлен вариант неравенства (3.10) при $k = 0$.

Теорема 3.3. *Пусть* $n \in N$, $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $s \in [p, q]$. *Тогда для любого полинома* $\tau \in \mathcal{T}_n$ *справедливо неравенство*

$$\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_q \le n^{1/p-1/q}\frac{\|(\cos(\cdot))_+\|_q}{\|(\cos(\cdot))_+\|_p}\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_p \tag{3.15}$$

(*при любой расстановке знаков* „+" *и* „−" *в индексах*) *и*

$$\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_q \le n^{1/p-1/q}\frac{\|(\cos(\cdot))_+\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}\|(\tau - c_{s+1}(\tau))\|_p. \tag{3.16}$$

Неравенства (3.15) *и* (3.16) *неулучшаемы в том смысле, что*

$$\sup_{n\in N}\sup_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_n\\ \tau\ne\mathrm{const}}}\frac{\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_q}{n^{1/p-1/q}\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_p} = \frac{\|(\cos(\cdot))_+\|_q}{\|(\cos(\cdot))_+\|_p}$$

и

$$\sup_{n\in N}\sup_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_n\\ \tau\ne\mathrm{const}}}\frac{\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_q}{n^{1/p-1/q}\|\tau - c_{s+1}(\tau)\|_p} = \frac{\|(\cos(\cdot))_+\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}.$$

Доказательство. Докажем (3.15). Зафиксируем $\tau \in \mathcal{T}_n$. Ясно, что при любом $r \in N$ $\tau \in L^r_\infty$. Применим к τ неравенство (3.1):

$$\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_q \le \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|(\varphi_r)_+\|_p^\alpha}\|(\tau - c_{s+1}(\tau))_\pm\|_p^\alpha\|\tau^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$.

Оценим $\|\tau^{(r)}\|_\infty$ в правой части последнего неравенства с помощью неравенства Бернштейна (3.13) и затем перейдем к пределу при $r \to \infty$. Учитывая (3.14) и соотношение

$$r(1-\alpha) = r\frac{1/p - 1/q}{r+1/p} \to \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad r \to \infty,$$

получаем (3.15). Неравенство (3.16) вытекает из (3.15).

Неулучшаемость (3.15) и (3.16) очевидна. Теорема доказана.

Ниже будет приведен аналог неравенства (3.16) для сплайнов. Для этого нам потребуются следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть* $n, r \in N$. *Тогда для любого сплайна* $\sigma \in S_{n,r}$

$$\left\|\sigma^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} E_0(\sigma)_\infty. \tag{3.17}$$

Доказательство. Учитывая равенство $n^{-r}\|\varphi_r\|_\infty = \|\varphi_{n,r}\|_\infty$, переписываем неравенство (3.17) в виде

$$\frac{\left\|\sigma^{(r)}\right\|_\infty}{E_0(\sigma)_\infty}\|\varphi_{n,r}\|_\infty \le 1.$$

Предположим, что доказываемое неравенство неверно для некоторого сплайна $\sigma \in S_{n,r}$. Тогда существует $\gamma \in (0,1)$ такое, что

$$\gamma\frac{\left\|\sigma^{(r)}\right\|_\infty}{E_0(\sigma)_\infty}\|\varphi_{n,r}\|_\infty = 1. \tag{3.18}$$

Рассмотрим сплайн

$$\sigma_\gamma(t) := \gamma\frac{\sigma(t) - c_\infty(\sigma)}{E_0(\sigma)_\infty}\|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Ясно, что $\sigma_\gamma \in S_{n,r}$. Поскольку $\|\sigma_\gamma\|_\infty < \|\varphi_{n,r}\|_\infty$, то каждая из разностей

$$\delta_\pm(t) := \pm\varphi_{n,r}(t) - \sigma_\gamma(t)$$

имеет не менее $2n$ перемен знака на периоде. Следовательно, согласно теореме Ролля каждая из разностей

$$\delta_\pm^{(r)}(t) = \pm\varphi_{n,r}^{(r)}(t) - \sigma_\gamma^{(r)}(t)$$

также имеет не менее $2n$ перемен знака на периоде.

С другой стороны, в силу (3.18)

$$\left\|\sigma_\gamma^{(r)}\right\|_\infty = 1 = \left\|\varphi_{n,r}^{(r)}\right\|_\infty.$$

Это означает, что существует отрезок $[k\pi/n, (k+1)\pi/n]$, $k = 1, \ldots, n-1$, на котором одна из разностей $\delta_\pm^{(r)}(t)$ тождественно равна нулю. Поскольку эта разность постоянна на отрезках $[k\pi/n, (k+1)\pi/n]$, то число ее перемен знака на периоде меньше $2n$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.2. *Пусть* $n, r \in N$, $p \in (0, \infty]$. *Тогда для любого сплайна* $\sigma \in S_{n,r}$

$$\left\|\sigma^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{n^{r+1/p}}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(\sigma)_p. \tag{3.19}$$

Доказательство. Применяя неравенство (3.17) из предыдущей леммы, а затем оценивая $E_0(\sigma)_\infty$ с помощью неравенства (1.3), имеем

$$\left\|\sigma^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} E_0(\sigma)_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty}\frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} E_0(\sigma)_p^\alpha \left\|\sigma^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha := \dfrac{r}{r+1/p}$. Отсюда получаем неравенство

$$\left\|\sigma^{(r)}\right\|_{\infty}^{\alpha} \le \frac{n^r}{E_0(\varphi_r)_p^{\alpha}} E_0(\sigma)_p^{\alpha},$$

из которого в силу равенства $r \cdot 1/\alpha = r + 1/p$ следует (3.19). Лемма доказана.

Неравенство (3.19) получено автором совместно с В. Ф. Бабенко и С. А. Пичуговым.

Теорема 3.4. *Пусть* $r, n \in N$; $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$; $s \in [p, q]$. *Тогда для любого сплайна* $\sigma \in S_{n,r}$

$$\left\|(\sigma - c_{s+1}(\sigma))_{\pm}\right\|_q \le n^{1/p-1/q} \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|\varphi_r\|_p} \|\sigma - c_{s+1}(\sigma)\|_p. \tag{3.20}$$

Неравенство (3.20) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n \in N} \sup_{\substack{\tau \in S_{n,r} \\ \sigma \ne 0}} \frac{\left\|(\sigma - c_{s+1}(\sigma))_{\pm}\right\|_q}{n^{1/p-1/q} \|\sigma - c_{s+1}(\sigma)\|_p} = \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|\varphi_r\|_p}.$$

Доказательство. Применяя неравенство (3.2) из теоремы 3.1, а затем оценивая $\left\|\sigma^{(r)}\right\|_{\infty}$ с помощью неравенства (3.19) из леммы 3.2 и учитывая очевидную оценку $E_0(\sigma)_p \le \|\sigma - c_{s+1}(\sigma)\|_p$, имеем

$$\left\|(\sigma - c_{s+1}(\sigma))_{\pm}\right\|_q \le \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|\varphi_r\|_p^{\alpha}} \|\sigma - c_{s+1}(\sigma)\|_p^{\alpha} \left\|\sigma^{(r)}\right\|_{\infty}^{1-\alpha} \le$$

$$\le \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|\varphi_r\|_p^{\alpha}} \|\sigma - c_{s+1}(\sigma)\|_p^{\alpha} \left(\frac{n^{r+1/p}}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(\sigma)_p\right)^{1-\alpha} \le$$

$$\le n^{(r+1/p)(1-\alpha)} \frac{\|(\varphi_r)_+\|_q}{\|\varphi_r\|_p} \|\sigma - c_{s+1}(\sigma)\|_p,$$

где $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$. Отсюда следует (3.20), если учесть, что $(r+1/p)(1-\alpha) = 1/p - 1/q$.

Неулучшаемость (3.20) очевидна. Теорема доказана.

В заключение приведём пример, показывающий, что при $s < p$ неравенство (3.3), вообще говоря, неверно.

Пример. Рассмотрим функцию

$$x_{\varepsilon}(t) := \max\{\varphi_1(t), -\varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \left(0, \|\varphi_1\|_{\infty}\right).$$

Легко видеть, что $x_{\varepsilon} \in W_{\infty}^1$, при этом

$$c_1(x_{\varepsilon}) = 0, \quad \|x_{\varepsilon}\|_{\infty} = \|\varphi_1\|_{\infty}, \quad \|x_{\varepsilon}'\|_{\infty} = 1, \quad \|x_{\varepsilon}\|_p < \|\varphi_1\|_p$$

для любого $p \in (0, \infty)$. Поэтому

$$\|x_{\varepsilon} - c_1(x_{\varepsilon})\|_{\infty} > \frac{\|\varphi_1\|_{\infty}}{\|\varphi_1\|_p^{\alpha}} \|x_{\varepsilon} - c_1(x_{\varepsilon})\|_p^{\alpha} \|x_{\varepsilon}'\|_{\infty}^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{1+1/p}.$$

Тогда в силу непрерывной зависимости $c_{s+1}(x_\varepsilon)$ от параметра $s \in [0, \infty]$ и $\|\cdot\|_q$ от параметра $q \in (0, \infty]$ для достаточно малых $s \in (0, p)$ и достаточно больших $q \in (p, \infty]$ будем иметь

$$\| x_\varepsilon - c_{s+1}(x_\varepsilon) \|_q > \frac{\| \varphi_1 \|_q}{\| \varphi_1 \|_p^\alpha} \| x_\varepsilon - c_{s+1}(x_\varepsilon) \|_p^\alpha \| x'_\varepsilon \|_\infty^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{1 + 1/q}{1 + 1/p}.$$

Таким образом, неравенство (3.3) при $s < p$, вообще говоря, неверно.

1. *Sz.-Nagy B.* Über Integralungleichungen zwischen einer Function und ihrer Ableitung // Acta sci. math. – 1941. – **10**. – P. 64 – 74.
2. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some of their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
3. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Тез. докл. междунар. конф. „Теория приближений и гармонический анализ". – Тула, 1998. – С. 29.
4. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Сучасні проблеми математики: Матер. міжнар. наук. конф. – Чернівці; Київ, 1998. – Ч. 1. – С. 9 – 11.
5. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Допов. НАН України. – 2000. – № 4. – С. 7 – 10.
6. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // East J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
7. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
8. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
9. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер мат. – 1982. – **45**, № 1. – С. 3 – 32.

Получено 07.07.99,
после доработки — 02.06.2000