УДК 519.41/47

**Н. С. Черников** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# СВОЙСТВА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ПРЕДСТАВИМОЙ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП*

We establish a number of new properties of a finite group $G=AB$ with nilpotent subgroups $A$ and $B$.

Встановлено низку нових властивостей скінченної групи $G=AB$ із нільпотентними підгрупами $A$ і $B$.

В настоящей работе продолжены исследования автора [1] свойств и строения конечной группы $G=AB$ с нильпотентными подгруппами-множителями $A$ и $B$.

Ниже $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\prod$ и $\times$ — знаки произведения и прямого произведения. Условимся считать, что для пустого семейства $\{X_i\}$ подгрупп группы $\prod_{i\in\varnothing}X_i=\times_{i\in\varnothing}X_i=1$. Пусть $G$ — группа и $X\subseteq G$, $X\neq\varnothing$. Записи $X\leq G$ и $X\trianglelefteq G$ означают, что $X$ — соответственно подгруппа и нормальная подгруппа группы $G$. $X^G=\{x^g\mid x\in X, g\in G\}$, $X_G=\bigcap_{g\in G}X^g$. $\pi(G)$ — множество всех $p\in\mathbb{P}$, для которых $G$ имеет элемент порядка $p$. (Если $G=1$, то $\pi(G)=\varnothing$). Для $p\in\mathbb{P}$ и $\sigma\subseteq\mathbb{P}$ $G_p$ и $G_\sigma$ — силовские $p$- и $\sigma$-подгруппы $G$ соответственно. (Отметим, что если $\sigma=\varnothing$, то $G_\sigma=1$.) Очевидно, при произвольном гомоморфизме $\varphi$ группы $G$ $(X^G)^\varphi=(X^\varphi)^{G^\varphi}$ и $\langle X^G\rangle^\varphi=\langle (X^\varphi)^{G^\varphi}\rangle$; в случае, когда $G$ конечна, вследствие теоремы Силова $G_p^\varphi$ — силовская $p$-подгруппа $G^\varphi$, и в случае, когда $G$ конечна и разрешима, вследствие теоремы Ф. Холла $G_\sigma^\varphi$ —силовская и холлова $\sigma$-подгруппа $G^\varphi$. $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы $G$, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$ (т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы $G$). В случае конечной $G$ $\Phi(G)$ и $F(G)$ нильпотентны соответственно в силу теорем Фраттини и Фиттинга. $G^{(d)}$ — $d$-й коммутант $G$, $d=0,1,2,\ldots$, $F_t(G)/F_{t-1}(G)=F(G/F_{t-1}(G))$, $t=1,2,\ldots$, $F_0(G)=1$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть $G=AB$ — конечная группа, $A$ и $B$ — ее нильпотентные подгруппы, $H=[A,B]F(G)$, $\varphi$ — гомоморфизм $G$ на $G/F(G)$ и для произвольных $p,q\in\mathbb{P}$, $D_{pq}=H^\varphi\cap\langle A_p^G\rangle^\varphi\cap\langle B_q^G\rangle^\varphi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Выполняются соотношения*

$$D_{pq}=(D_{pq}\cap A_p^\varphi)(D_{pq}\cap B_q^\varphi)\ \text{и}\ D_{pp}=1. \tag{1}$$

*В частности, $D_{pq}$ является $\{p,q\}$-группой.*

2. *Имеют место соотношения*

$$\langle A^G\rangle^\varphi=\mathop{\times}_{p\in\pi(A^\varphi)}\langle A_p^G\rangle^\varphi,\langle A_p^G\rangle^\varphi=A_p^\varphi(\langle A_p^G\rangle^\varphi\cap B_{p'}^\varphi)\ \text{и}\ H^\varphi=\mathop{\times}_{p,q\in\pi(G^\varphi)}D_{pq}. \tag{2}$$

3. *Нильпотентный корадикал группы $G^\varphi$ совпадает с $H^\varphi$ $(=[A^\varphi,B^\varphi])$.*

---

* Выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00462).

4. $A \cap B \subseteq H = (H \cap A)(H \cap B).$ (3)

Докажем сначала следующие лемму и представляющие самостоятельный интерес предложения и следствия.

**Лемма.** *Пусть* $G = AB$ — *группа,* $A, B \leq G$; $N, M \trianglelefteq G$, $N \subseteq M$, $\varphi$ *и* $\psi$ — *гомоморфизмы* $G$ *на* $G/N$ *и* $G/M$ *и* $M^{\varphi} = (M^{\varphi} \cap A^{\varphi})(M^{\varphi} \cap B^{\varphi})$. *Пусть* $N = (N \cap A)(N \cap B)$ *или* $NA \cap NB \subseteq M$. *Тогда* $M = (M \cap A)(M \cap B)$ *и если* $A \cap B \subseteq M$, *то* $A^{\Psi} \cap B^{\Psi} = 1$.

***Доказательство.*** Очевидно, $M = (M \cap AN)(M \cap BN)$. Поэтому ввиду леммы Дедекинда (см., например, [2], лемма 1.7) $M = (M \cap A)N(M \cap B)$. В силу леммы Н. Ф. Сесекина (см., например, [2] лемма 1.9) $NA \cap NB = (NB \cap A)(NA \cap \cap B)$. Следовательно, или

$$M = (M \cap A)(N \cap A)(N \cap B)(M \cap B) = (M \cap A)(M \cap B),$$

или

$$NB \cap A = (NB \cap NA) \cap A \subseteq M \cap A, \quad NA \cap B \subseteq M \cap B$$

и

$$M = (M \cap A)(NA \cap NB)(M \cap B) =$$
$$= (M \cap A)(NB \cap A)(NA \cap B)(M \cap B) = (M \cap A)(M \cap B).$$

Пусть $A \cap B \subseteq M$. Возьмем произвольный элемент $g \in A^{\Psi} \cap B^{\Psi}$. Тогда для некоторых $a \in A$ и $b \in B$ $g = a^{\Psi} = b^{\Psi}$. Поскольку $ab^{-1} \in M$, то для некоторых $a^* \in M \cap A$, $b^* \in M \cap B$ $ab^{-1} = a^* b^*$. В таком случае $a^{*-1}a = b^* b \in A \cap B$. Следовательно, $a \in a^* M = M$ и, значит, $g = a^{\Psi} = 1$. Лемма доказана.

Напомним, что согласно теореме Гашюца (см., например, [3], гл. III, предложения 3.5 и 3.7) в конечной группе $G$ погруппа $N \trianglelefteq G$ нильпотентна тогда и только тогда, когда фактор-группа $N/(N \cap \Phi(G))$ нильпотентна. Поэтому в предложениях 1 и 2 $K$ нильпотентна.

**Предложение 1.** *Пусть* $G = AB$ — *конечная группа,* $A, B \leq G$, $K/\Phi(G) = = Z(G/\Phi(G))$, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi \supseteq \pi(A) \cap \pi(B)$ *и группы* $AK_{\pi}/K_{\pi}$, $BK_{\pi}/K_{\pi}$ *нильпотентны. Тогда найдутся* $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, \ldots, m$, *такие, что*

$$\bigcap_{i=1}^{m} N_i = \Phi(G)_{\pi} \tag{4}$$

*и для некоторого* $k \leq m$:

1) *выполняются соотношения*

$$A \cap B \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} N_i = K_{\pi} = (K_{\pi} \cap A)(K_{\pi} \cap B); \tag{5}$$

2) *при* $i = 1, \ldots, k$

$$\pi(AN_i/N_i) \cap \pi(BN_i/N_i) = \varnothing, \tag{6}$$

$$A \cap B \subseteq N_i = (N_i \cap A)(N_i \cap B), \tag{7}$$

*и хотя бы одна из групп* $AN_i/N_i$, $BN_i/N_i$ *примарна;*

3) *в случае, когда* $\Phi(G)_{\pi} \neq K_{\pi}$, *при* $i = k+1, \ldots, m$ $\Phi(G) \subseteq N_i$, $|G : N_i| \in \in \mathbb{P}$ *и* $N_i/\Phi(G)$ *выделяется в* $G/\Phi(G)$ *прямым множителем; в противном случае* $k = m$.

$T \subseteq A$, $\varnothing \neq M \subseteq B$, *и* $L^{\varphi} \subseteq A_{\sigma}^{\varphi}$, $T^{\varphi} \subseteq A_{p}^{\varphi}$, $M^{\varphi} \subseteq B_{\tau}^{\varphi}$.

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *В случае, когда для некоторого* $\mu \in \mathbb{P}$ *и* $\mu \supseteq \pi$ $\operatorname{Ker}\varphi = K_{\mu}$ *или* $\operatorname{Ker}\varphi = F(G)_{\mu}$,

$$A^{\varphi} \cap B^{\varphi} = 1. \tag{11}$$

2. *Выполняются соотношения*

$$(A^{\varphi})_{\sigma}(B^{\varphi})_{\tau} = (B^{\varphi})_{\tau}(A^{\varphi})_{\sigma} \leq G^{\varphi}. \tag{12}$$

3. *Имеет место равенство*

$$[\langle A_p^G \rangle^{\varphi}, \langle B_p^G \rangle^{\varphi}] = 1. \tag{13}$$

*Более того,*

$$[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle] \subseteq \Phi(G)_{\pi}. \tag{14}$$

4. *Нильпотентный корадикал группы* $G^{\varphi}$ *совпадает с* $[A^{\varphi}, B^{\varphi}]$.

5. *Справедливы соотношения*

$$(T^G)^{\varphi} = (T^{A_p B_{p'}})^{\varphi}, \tag{15}$$

$$\langle A_p^G \rangle^{\varphi} = A_p^{\varphi}(\langle A_p^G \rangle^{\varphi} \cap B_{p'}^{\varphi}) \tag{16}$$

*и*

$$\langle T^G \rangle^{\varphi} = (\langle T^G \rangle^{\varphi} \cap A_p^{\varphi})(\langle T^G \rangle^{\varphi} \cap B_{p'}^{\varphi}). \tag{17}$$

6. *Справедливы соотношения*

$$(L^G)^{\varphi} = (L^{A_{\sigma} B})^{\varphi}, \tag{18}$$

$$\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} = A_{\sigma}^{\varphi}(\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap B^{\varphi}) \tag{19}$$

*и*

$$\langle L^G \rangle^{\varphi} = (\langle L^G \rangle^{\varphi} \cap A_{\sigma}^{\varphi})(\langle L^G \rangle^{\varphi} \cap B^{\varphi}). \tag{20}$$

7. *Выполняется соотношение*

$$\langle (L \cup M)^G \rangle^{\varphi} = (\langle (L \cup M)^G \rangle^{\varphi} \cap A^{\varphi})(\langle (L \cup M)^G \rangle^{\varphi} \cap B^{\varphi}). \tag{21}$$

8. $$\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap \langle A_{\tau}^G \rangle^{\varphi} = A_{\sigma \cap \tau}^{\varphi}(\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap \langle A_{\tau}^G \rangle^{\varphi} \cap B^{\varphi}). \tag{22}$$

*В частности, если* $\sigma \cap \tau = \varnothing$ *и* $(B^{\varphi})_{G^{\varphi}} = 1$, *то* $\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap \langle A_{\tau}^G \rangle^{\varphi} = 1$.

9. $$\langle A_p^G \rangle^{\varphi} \cap \langle B_p^G \rangle^{\varphi} = (A^{\varphi} \cap B^{\varphi})_p \times (\langle A_p^G \rangle^{\varphi} \cap \langle B_p^G \rangle^{\varphi} \cap (A^{\varphi} \cap B^{\varphi})_{p'}). \tag{23}$$

10. *Выполняются соотношения*

$$\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap \langle B_{\tau}^G \rangle^{\varphi} =$$
$$= (\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap \langle B_{\tau}^G \rangle^{\varphi} \cap A_{\sigma}^{\varphi} B_{\tau}^{\varphi}) \times (\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap \langle B_{\tau}^G \rangle^{\varphi} \cap (A^{\varphi} \cap B^{\varphi})_{\nu}) \tag{24}$$

*и*

$$\langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi} \cap \langle B_{\tau}^G \rangle^{\varphi} \cap A_{\sigma}^{\varphi} B_{\tau}^{\varphi} = (A_{\sigma}^{\varphi} \cap \langle B_{\tau}^G \rangle^{\varphi})(B_{\tau}^{\varphi} \cap \langle A_{\sigma}^G \rangle^{\varphi}). \tag{25}$$

11. *Справедливы соотношения*

$$F(G^{\varphi}) = (A^{\varphi})_{G^{\varphi}}(B^{\varphi})_{G^{\varphi}}, \quad (A^{\varphi})_{G^{\varphi}} = F(G^{\varphi}) \cap A^{\varphi},$$
$$(B^{\varphi})_{G^{\varphi}} = F(G^{\varphi}) \cap B^{\varphi} \tag{26}$$

*и*

***Доказательство.*** Поскольку группы $AK_\pi/K_\pi$ и $BK_\pi/K_\pi$ нильпотентны, то на основании теоремы Кегеля – Виландта [4, 5] группа $G/K_\pi = (AK_\pi/K_\pi)(BK_\pi/K_\pi)$ разрешима. Следовательно, $G$ разрешима.

Обозначим через $\varphi$ естественный гомоморфизм группы $G$ на $G/\Phi(G)_\pi$. Очевидно, $A^\varphi$ и $B^\varphi$ нильпотентны. С учетом того, что $\pi(A^\varphi) \cap \pi(B^\varphi) \subseteq \subseteq \pi(A) \cap \pi(B) \subseteq \pi$, ввиду следствия 1 [6] найдутся подгруппы $N_i/\Phi(G)_\pi \trianglelefteq \trianglelefteq G/\Phi(G)_\pi$, $i = 1, \ldots, l$, для которых

$$\bigcap_{i=1}^{l} N_i/\Phi(G)_\pi = F(G/\Phi(G)_\pi)_\pi, \tag{8}$$

при каждом $i$

$$\pi(A^\varphi N_i^\varphi / N_i^\varphi) \cap \pi(B^\varphi N_i^\varphi / N_i^\varphi) = \varnothing$$

и хотя бы одна из групп $A^\varphi N_i^\varphi / N_i^\varphi$, $B^\varphi N_i^\varphi / N_i^\varphi$ примарна. Очевидно, при каждом $i = 1, \ldots, l$ выполняется (6) и хотя бы одна из групп $AN_i/N_i$, $BN_i/N_i$ примарна. С учетом (6) ввиду леммы 4 [6] при каждом $i = 1, \ldots, l$ выполняется (7). В силу отмеченной выше теоремы Гашюца $F(G/\Phi(G)_\pi) = F(G)/\Phi(G)_\pi$. Поэтому, очевидно, $F(G/\Phi(G)_\pi)_\pi = F(G)_\pi/\Phi(G)_\pi$. Следовательно, в силу (8)

$$\bigcap_{i=1}^{l} N_i = F(G)_\pi. \tag{9}$$

Пусть $Z(G^\varphi/\Phi(G^\varphi)) = R/\Phi(G^\varphi)$. На основании утверждений 2 и 3 предложения 1 [1] найдутся подгруппы $N_i/\Phi(G)_\pi \trianglelefteq G/\Phi(G)_\pi$, $i = l+1, \ldots, k$, такие, как выше, для которых $\bigcap_{i=l+1}^{k} N_i^\varphi = R$. Поскольку, очевидно, $\Phi(G^\varphi) = \Phi(G)^\varphi$ и $Z(G^\varphi/\Phi(G)^\varphi) = K^\varphi/\Phi(G)^\varphi$, то $R = K^\varphi$. Следовательно, $\bigcap_{i=l+1}^{k} N_i = K$ и, значит, с учетом (6), (9) и равенства $K_\pi = F(G)_\pi \cap K$ в силу леммы 4 [6] выполняется (5).

Пусть $\Phi(G)_\pi \neq K_\pi$. Тогда на основании утверждений 2 и 3 предложения 1 [1] найдутся подгруппы $N_i/\Phi(G)_\pi \trianglelefteq G/\Phi(G)_\pi$, $i = k+1, \ldots, m$, такие, что $|G^\varphi : N_i^\varphi| \in \mathbb{P}$, $N_i^\varphi/\Phi(G^\varphi)$ выделяется прямым множителем в $G^\varphi/\Phi(G^\varphi)$ и $\bigcap_{i=l+1}^{m} N_i^\varphi = \Phi(G^\varphi)$. Очевидно,

$$\bigcap_{i=l+1}^{m} N_i = \Phi(G) \tag{10}$$

и выполняются требования из утверждения п. 3 настоящего предложения. Ввиду (5) и (10) выполняется (4). Предложение доказано.

Из предложения 1 и теоремы Гашюца с учетом того, что группа $G$ в нем разрешима, вытекает следующее предложение.

***Следствие* 1.** *Пусть в предложении* 1 $d$ — *максимум ступеней разрешимости фактор-групп* $G/N_i$ $i = 1, \ldots, k$. *Тогда* $G^{(d)} \subseteq \Phi(G)_\pi$ *и* $G^{(d-1)}$ *нильпотентен.*

**Предложение 2.** *Пусть при условиях предложения* 1 $\varphi$ — *произвольный гомоморфизм группы* $G$ *с* $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq K_\pi$; $p \in \mathbb{P}$ *и* $\sigma, \tau \subseteq \mathbb{P}$, $\nu = \mathbb{P} \setminus (\sigma \cup \tau)$; $\varnothing \neq L$,

$$[(A^{\varphi})_{G^{\varphi}}, (B^{\varphi})_{G^{\varphi}}] = 1. \tag{27}$$

***Доказательство*** 1. Поскольку $\mu \supseteq \pi$, то группы $AK_{\mu}/K_{\mu}$ и $BK_{\mu}/K_{\mu}$ нильпотентны. Поэтому ввиду предложения 1 (п.1)

$$A \cap B \subseteq K_{\mu} = (K_{\mu} \cap A)(K_{\mu} \cap B).$$

Пусть $\varphi$ — гомоморфизм $G$ на $G/K_{\mu}$. В силу леммы $A^{\varphi} \cap B^{\varphi} = 1$. Так как $G^{\varphi} = A^{\varphi}B^{\varphi}$ и $A^{\varphi}$, $B^{\varphi}$ нильпотентны, то ввиду [7]

$$F(G^{\varphi}) = \left(F(G^{\varphi}) \cap A^{\varphi}\right)\left(F(G^{\varphi}) \cap B^{\varphi}\right). \tag{28}$$

Вследствие отмеченной выше теоремы Гашюца $F(G^{\varphi}) = F(G)^{\varphi}$. Поэтому с учетом соотношения (28) и леммы имеем $F(G) = \left(F(G) \cap A\right)\left(F(G) \cap B\right)$. Тогда, как легко убедиться,

$$F(G)_{\mu} = \left(F(G)_{\mu} \cap A\right)\left(F(G)_{\mu} \cap B\right). \tag{29}$$

Поскольку $K_{\mu} \subseteq F(G)$, то

$$A \cap B \subseteq F(G)_{\mu}, \tag{30}$$

С учетом (29) и (30) в силу леммы соотношение (11) выполняется и если $\mathrm{Ker}\,\varphi = F(G)_{\mu}$.

Далее, пусть $N_i$, $i = 1, \ldots, m$, — те же, что в предложении 1, и $\psi_i$ — гомоморфизм группы $G^{\varphi}$ на $G^{\varphi}/N_i^{\varphi}$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда, очевидно,

$$\pi(A^{\varphi\psi_i}) \cap \pi(B^{\varphi\psi_i}) = \varnothing, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{31}$$

$$A^{\varphi} \cap B^{\varphi} \subseteq N_i^{\varphi} = (N_i^{\varphi} \cap A^{\varphi})(N_i^{\varphi} \cap B^{\varphi}), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{32}$$

и в случае, когда $\mathrm{Ker}\,\varphi = K_{\pi}$,

$$\bigcap_{i=1}^{k} N_i^{\varphi} = 1. \tag{33}$$

2. Достаточно показать, что

$$A_{\sigma}B_{\tau}K_{\pi} \leq G. \tag{34}$$

Пусть $\mathrm{Ker}\,\varphi = K_{\pi}$, $\rho_i = \sigma \cup \pi(B^{\varphi\psi_i})$, $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, с учетом (31), $A_{\sigma}^{\varphi\psi_i}$ и $B^{\varphi\psi_i}$ — силовские $\rho_i$-подгруппы соответственно групп $A^{\varphi\psi_i}$ и $B^{\varphi\psi_i}$. Следовательно, поскольку $A^{\varphi\psi_i}$ и $B^{\varphi\psi_i}$ нильпотентны, то в силу леммы Виландта [8] $A_{\sigma}^{\varphi\psi_i} B^{\varphi\psi_i} \leq G^{\varphi\psi_i}$. Аналогично $A^{\varphi\psi_i}B_{\tau}^{\varphi\psi_i} \leq G^{\varphi\psi_i}$. Поэтому с учетом (32) и (33) ввиду леммы 3 [1] $A_{\sigma}^{\varphi}B_{\tau}^{\varphi} \leq G^{\varphi}$ и, значит, выполняются (34) и (12).

3. Очевидно, достаточно показать, что (13) выполняется в случае, когда $\mathrm{Ker}\,\varphi = K_{\pi}$. На основании (31) для каждого $i = 1, \ldots, k$ $\langle A_p^G \rangle^{\varphi\psi_i} = 1$ или $\langle B_p^G \rangle^{\varphi\psi_i} = 1$. Поэтому $[\langle A_p^G \rangle^{\varphi\psi_i}, \langle B_p^G \rangle^{\varphi\psi_i}] = 1$, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, $[\langle A_p^G \rangle^{\varphi}, \langle B_p^G \rangle^{\varphi}] \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} N_i^{\varphi} = 1$. Вместе с этим $[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle] \subseteq N_i$, $i = 1, \ldots, k$. В случае, когда $\Phi(G)_{\pi} \neq K_{\pi}$, $G' \subseteq N_i$, $i = k+1, \ldots, m$, и, значит, $[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle] \subseteq N_i$, $i = k+1, \ldots, m$. Следовательно,

$$[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle] \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} N_i = \Phi(G)_\pi.$$

Таким образом, выполняется (14).

4. Пусть $N$ — нильпотентный корадикал $G^\varphi$ и $\psi$ — гомоморфизм $G^\varphi$ на $G^\varphi/N$. Очевидно, группа $G^\varphi/[A^\varphi, B^\varphi]$ является центральным произведением нильпотентных подгрупп $A^\varphi[A^\varphi, B^\varphi]/[A^\varphi, B^\varphi]$ и $B^\varphi[A^\varphi, B^\varphi]/[A^\varphi, B^\varphi]$. Поэтому она нильпотентна. Следовательно, $N \subseteq [A^\varphi, B^\varphi]$. Далее, так как группа $G^{\varphi\psi}$ нильпотентна, то для произвольного $p \in \mathbb{P}$ при $q \in \mathbb{P}$, $q \neq p$, $[A_p^{\varphi\psi}, B_q^{\varphi\psi}] = 1$. В силу утверждения 3 $[A_p^{\varphi\psi}, B_p^{\varphi\psi}] = 1$. Следовательно, $[A_p^{\varphi\psi}, B^{\varphi\psi}] = 1$ и, значит, ввиду произвольности $p$ $[A^{\varphi\psi}, B^{\varphi\psi}] = 1$. Поэтому $[A^\varphi, B^\varphi] \subseteq N$. Таким образом, $N = [A^\varphi, B^\varphi]$.

5. Так как

$$G^\varphi = A^\varphi B^\varphi, \quad A^\varphi = A_p^\varphi \times A_{p'}^\varphi, \quad B^\varphi = B_p^\varphi \times B_{p'}^\varphi \text{ и } T^\varphi \subseteq A_p^\varphi,$$

то

$$(T^G)^\varphi = (T^{A_{p'} A_p B_p B_{p'}})^\varphi = (T^{A_p B_p B_{p'}})^\varphi.$$

Поскольку $(T^{A_p})^\varphi \subseteq A_p^\varphi$ и $[A_p^\varphi, B_p^\varphi] = 1$, то, очевидно, $((T^{A_p})^{B_p B_{p'}})^\varphi = (T^{A_p B_{p'}})^\varphi$. Следовательно, выполняется (15). Так как в силу утверждения 2 $A_p^\varphi B_{p'}^\varphi \leq G^\varphi$, то $\langle T^G \rangle^\varphi = \langle T^{A_p B_{p'}} \rangle^\varphi \subseteq A_p^\varphi B_{p'}^\varphi$. Поэтому выполняется (16) (при $T = A_p$) и ввиду леммы 2.13 [2] — (17).

6. Так как $L^\varphi \subseteq A_\sigma^\varphi$ и $A^\varphi = A_{\sigma'}^\varphi \times A_\sigma^\varphi$, то $(L^{A_{\sigma'}}) = L^\varphi$ и, значит,

$$(L^G)^\varphi = (L^{A_{\sigma'} A_\sigma B})^\varphi = (L^{A_\sigma B})^\varphi,$$

т. е. выполняется (18).

Поскольку ввиду утверждения 2 $A_\sigma^\varphi B^\varphi \leq G^\varphi$, то $\langle L^G \rangle^\varphi \subseteq A_\sigma^\varphi B^\varphi$. Поэтому при $L = A_\sigma$ выполняется (19), и в силу леммы 2.13 [2] выполняется (20).

7. В силу утверждения 6 выполняется (20) и $\langle M^G \rangle^\varphi = (\langle M^G \rangle^\varphi \cap A^\varphi)(\langle M^G \rangle^\varphi \cap B^\varphi)$. Поэтому ввиду леммы 5 [1] справедливо (21).

8. Пусть $\rho = \sigma \setminus \tau$, $\upsilon = \tau \setminus \sigma$ и $\kappa = \sigma \cap \tau$. Возьмем произвольный элемент $g \in \langle A_\sigma^G \rangle^\varphi \cap \langle A_\tau^G \rangle^\varphi$. На основании утверждения 6 для некоторых $a_\rho \in A_\rho^\varphi$, $a_\upsilon \in A_\upsilon^\varphi$, $a_\kappa$, $a_\kappa^* \in A_\kappa^\varphi$ и $b_1, b_2 \in B^\varphi$ $g = a_\kappa a_\rho b_1 = a_\kappa^* a_\upsilon b_2$. Тогда

$$a_\upsilon^{-1} a_\kappa^{*-1} a_\kappa a_\rho = a_\kappa^{*-1} a_\kappa a_\upsilon^{-1} a_\rho = b_2 b_1^{-1} \in B^\varphi$$

и, значит,

$$a_\upsilon^{-1} a_\rho = a_\kappa^{-1} a_\kappa^* B^\varphi \subseteq A_\kappa^\varphi B^\varphi.$$

Следовательно, $\langle a_\upsilon^{-1} a_\rho \rangle \subseteq A_\kappa^\varphi B^\varphi$ $(\leq G^\varphi)$. Так как $\upsilon \cap \rho = \varnothing$, то $\left(|a_\upsilon^{-1}|, |a_\rho|\right) = 1$ и $\left[a_\upsilon^{-1}, a_\rho\right] = 1$. Поэтому $a_\rho \in \langle a_\upsilon^{-1} a_\rho \rangle$ и, значит, $a_\rho \in A_\kappa^\varphi B^\varphi$. Следовательно, $g = a_\kappa a_\rho b_1 \in A_\kappa^\varphi B^\varphi$. Таким образом, $\langle A_\sigma^G \rangle^\varphi \cap \langle A_\tau^G \rangle^\varphi \subseteq A_{\sigma\cap\tau}^\varphi B^\varphi$. Поэтому ввиду леммы Дедекинда выполняется (22).

9. Пусть $g$ — произвольный элемент из $\langle A_p^G\rangle^\varphi \cap \langle B_p^G\rangle^\varphi$. В силу утверждения 5 для некоторых $a \in A_p^\varphi$, $b \in B_{p'}^\varphi$ и $b_1 \in B_p^\varphi$, $a_1 \in A_{p'}^\varphi$ $g = ab = b_1 a_1$. Тогда

$$b_1^{-1}a = a_1 b^{-1} \in B_p^\varphi A_p^\varphi \cap A_{p'}^\varphi B_{p'}^\varphi.$$

На основании утверждения 2 $B_p^\varphi A_p^\varphi$, $A_{p'}^\varphi B_{p'}^\varphi \le G^\varphi$. В таком случае $B_p^\varphi A_p^\varphi$ и $A_{p'}^\varphi B_{p'}^\varphi$ — соответственно $p$- и $p'$-подгруппы и, значит, $B_p^\varphi A_p^\varphi \cap A_{p'}^\varphi B_{p'}^\varphi = 1$. Следовательно, $b_1^{-1}a = a_1 b^{-1} = 1$, т. е. $a = b_1$ и $a_1 = b$. Поэтому $a \in A_p^\varphi \cap B_p^\varphi$ и $b \in A_{p'}^\varphi \cap B_{p'}^\varphi$. Следовательно, $g \in (A_p^\varphi \cap B_p^\varphi)(A_{p'}^\varphi \cap B_{p'}^\varphi)$. Таким образом,

$$\langle A_p^G\rangle^\varphi \cap \langle B_p^G\rangle^\varphi \subseteq (A_p^\varphi \cap B_p^\varphi)(A_{p'}^\varphi \cap B_{p'}^\varphi).$$

Поэтому с учетом очевидных равенств $A_p^\varphi \cap B_p^\varphi = (A^\varphi \cap B^\varphi)_p$, $A_{p'}^\varphi \cap B_{p'}^\varphi = (A^\varphi \cap B^\varphi)_{p'}$ и $A^\varphi \cap B^\varphi = (A^\varphi \cap B^\varphi)_p \times (A^\varphi \cap B^\varphi)_{p'}$ имеет место (23).

10. Ввиду утверждения 6 для произвольного $g \in \langle A_\sigma^G\rangle^\varphi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\varphi$ найдутся $a_\sigma \in A_\sigma^\varphi$, $b \in B^\varphi$ и $b_\tau \in B_\tau^\varphi$, $a \in A^\varphi$ такие, что $g = a_\sigma b = ab_\tau$. Тогда $bb_\tau^{-1} = a_\sigma^{-1}a \subseteq A^\varphi \cap B^\varphi$ и, значит,

$$b \in (A^\varphi \cap B^\varphi) b_\tau \subseteq (A^\varphi \cap B^\varphi) B_\tau^\varphi \quad \text{и} \quad g = a_\sigma b \in A_\sigma^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi) B_\tau^\varphi.$$

Следовательно,

$$\langle A_\sigma^G\rangle^\varphi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\varphi \subseteq A_\sigma^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi) B_\tau^\varphi.$$

Далее, очевидно,

$$A^\varphi \cap B^\varphi = (A^\varphi \cap B^\varphi)_{\sigma\cup\tau} \times (A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu, \quad (A^\varphi \cap B^\varphi)_{\sigma\cup\tau} =$$

$$= (A^\varphi \cap B^\varphi)_\sigma (A^\varphi \cap B^\varphi)_\tau, \quad (A^\varphi \cap B^\varphi)_\sigma \subseteq A_\sigma^\varphi, \quad (A^\varphi \cap B^\varphi)_\tau \subseteq B_\tau^\varphi,$$

и $(A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu$ централизует $A_\sigma^\varphi$ и $B_\tau^\varphi$. Следовательно, $A_\sigma^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi) B_\tau^\varphi = A_\sigma^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi)_\sigma (A^\varphi \cap B^\varphi)_\tau (A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu B_\tau^\varphi = A_\sigma^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi)_\tau B_\tau^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu = A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu$. В силу утверждения 2 $A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi \le G^\varphi$, а $(A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu$ централизует $A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi$. Поэтому

$$A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi (A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu = A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi \times (A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu.$$

Таким образом, $\langle A_\sigma^G\rangle^\varphi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\varphi \subseteq A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi \times (A^\varphi \cap B^\varphi)_\nu$. Поэтому, очевидно, выполняется (24).

Далее, используя лемму Дедекинда, получаем

$$\langle A_\sigma^G\rangle^\varphi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\varphi \cap A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi = (\langle A_\sigma^G\rangle^\varphi \cap A_\sigma^\varphi B_\tau^\varphi) \cap \langle B_\tau^G\rangle^\varphi =$$

$$= A_\sigma^\varphi (\langle A_\sigma^G\rangle^\varphi \cap B_\tau^\varphi) \cap \langle B_\tau^G\rangle^\varphi = (A_\sigma^\varphi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\varphi)(B_\tau^\varphi \cap \langle A_\sigma^G\rangle^\varphi).$$

Утверждение 10 доказано.

11. Действительно, $(A^\varphi)_{G^\varphi} \subseteq F(G^\varphi) \cap A^\varphi$ и $(B^\varphi)_{G^\varphi} \subseteq F(G^\varphi) \cap B^\varphi$. Далее, ввиду [7] $F(G^\varphi) = (F(G^\varphi) \cap A^\varphi)(F(G^\varphi) \cap B^\varphi)$, откуда, очевидно, для произвольного $p$ имеем $F(G^\varphi)_p = (F(G^\varphi) \cap A_p^\varphi)(F(G^\varphi) \cap B_p^\varphi)$. Обозначим через $U$

нормальное замыкание $F(G^{\varphi}) \cap A_p^{\varphi}$ в $G^{\varphi}$. Тогда $U \subseteq F(G^{\varphi})_p$, и в силу утверждения 5 $U \subseteq (U \cap A_p^{\varphi})(U \cap B_{p'}^{\varphi})$. В таком случае $U \cap B_{p'}^{\varphi} = 1$ и, следовательно, $U \subseteq A_p^{\varphi}$. Поэтому $U \subseteq F(G^{\varphi}) \cap A_p^{\varphi}$ и, значит, $F(G^{\varphi}) \cap A_p^{\varphi} = U \trianglelefteq$ $\trianglelefteq G^{\varphi}$. Следовательно, $F(G^{\varphi}) \cap A_p^{\varphi} \subseteq (A^{\varphi})_{G^{\varphi}}$. Поэтому ввиду произвольности $p$, очевидно, $F(G^{\varphi}) \cap A^{\varphi} \subseteq (A^{\varphi})_{G^{\varphi}}$. Таким образом, выполняются второе из соотношений (26) и, аналогично, третье. Поэтому выполняется и первое из них.

Далее, при любом $q \neq p$, очевидно, $[F(G^{\varphi}) \cap A_p^{\varphi}, F(G^{\varphi}) \cap B_q^{\varphi}] = 1$, и ввиду утверждения 3 $[F(G^{\varphi}) \cap A_p^{\varphi}, F(G^{\varphi}) \cap B_p^{\varphi}] = 1$. Следовательно, $[F(G^{\varphi}) \cap A_p^{\varphi}$, $F(G^{\varphi}) \cap B^{\varphi}] = 1$, и в силу произвольности $p$ $[F(G^{\varphi}) \cap A^{\varphi}, F(G^{\varphi}) \cap B^{\varphi}] = 1$. Поэтому ввиду (26) выполняется (27). Предложение доказано.

***Замечания.* 1.** В связи с утверждением 3 предложения 2 заметим, что $A_p^{\varphi} \cap B_p^{\varphi} \subseteq Z(G^{\varphi})$ и что согласно утверждению 5 предложения 1 [1] в случае конечной разрешимой группы $G = AB$ с нильпотентными подгруппами $A$ и $B$ для произвольного $p \in \mathbb{P}$ $[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle] \subseteq \Phi(G)_p$.

**2.** В теоремах 1 – 4 [1] и следствиях 1 – 3 [1] требование нильпотентности подгрупп $A$ и $B$ можно ослабить до требования нильпотентности групп $AK/K$ и $BK/K$, где $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$, поскольку в [1] доказательства теорем 1 – 4 автоматически сводятся к установлению их справедливости для группы $G^{\varphi} =$ $= A^{\varphi}B^{\varphi}$, где $\varphi$ — гомоморфизм $G$ на $G/K$. При этом в теореме 3 $U$ можно заменить произвольной подгруппой группы $G$, для которой $U^{\varphi}$ — нормальная $p$-подгруппа группы $A^{\varphi}$.

Из утверждения 4 предложения 2 непосредственно вытекают следующие два предложения.

***Следствие* 2.** *При условиях предложения* 2 *для нильпотентного корадикала* $U$ *группы* $G$ $UK_{\pi} = [A, B]K_{\pi}$.

***Следствие* 3.** *Пусть* $G = AB$ — *конечная группа,* $A$ *и* $B$ — *ее нильпотентные подгруппы,* $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$, $\pi = \pi(A) \cap \pi(B)$, $\varphi$ — *произвольный гомоморфизм группы* $G$ *с* $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq K_{\pi}$ *и* $U$ — *нильпотентный корадикал группы* $G$. *Тогда* $UK_{\pi} = [A, B]K_{\pi}$ и $U^{\varphi} = [A^{\varphi}, B^{\varphi}]$.

***Следствие* 4.** *В предложении* 2 *для произвольного нильпотентного нормального делителя* $N$ *группы* $G^{\varphi}$ $N \cap A_{\sigma}^{\varphi} \trianglelefteq G^{\varphi}$.

***Доказательство.*** Пусть $S$ — силовская $\sigma$-подгруппа группы $(A^{\varphi})_{G^{\varphi}}$. Тогда $S \trianglelefteq G^{\varphi}$ и в силу утверждения 11 предложения 2 имеем $N \cap A_{\sigma}^{\varphi} = (N \cap$ $\cap F(G^{\varphi})) \cap (A^{\varphi} \cap A_{\sigma}^{\varphi}) = N \cap (F(G^{\varphi}) \cap A^{\varphi}) \cap (A^{\varphi} \cap A_{\sigma}^{\varphi}) = N \cap (A^{\varphi})_{G^{\varphi}} \cap$ $\cap A_{\sigma}^{\varphi} = N \cap S \trianglelefteq G^{\varphi}$.

***Следствие* 5.** *При условиях предложения* 2 *для любых подгрупп* $R, N \trianglelefteq G$ *таких, что* $K_{\pi} \subseteq R \subseteq N$ *и фактор-группа* $N/R$ *нильпотентна,* $(N \cap A_{\sigma})R \trianglelefteq$ $\trianglelefteq G$.

***Доказательство.*** Действительно, ввиду следствия 4 $N \cap A_{\sigma}R \trianglelefteq G$ и в силу леммы Дедекинда $N \cap A_{\sigma}R = (N \cap A_{\sigma})R$.

***Следствие* 6.** *Если в предложении* 2 $A_\sigma \not\subseteq F(G)$, *то при минимальном* $t$, *для которого* $A_\sigma \subseteq F_t(G)$,

$$A_\sigma F_{t-1}(G) = \langle A_\sigma^G \rangle F_{t-1}(G) \trianglelefteq G. \tag{35}$$

***Доказательство.*** Пусть $A_\sigma \not\subseteq F(G)$. Тогда $t > 1$ и, значит, $K \subseteq F_{t-1}(G)$. Поэтому ввиду следствия 5 $A_\sigma F_{t-1}(G) = (F_t(G) \cap A_\sigma) F_{t-1}(G) \trianglelefteq G$. Тогда, очевидно, выполняется (35).

Пусть, как в [1], для конечной разрешимой группы $G$ $l_{\mathfrak{N}}(G)$ и $l_p(G)$ — соответственно ее нильпотентная и $p$-длины $(p \in \mathbb{P})$.

***Следствие* 7.** *Пусть в предложении* 2 $L \not\subseteq K$ и $\operatorname{Ker}\varphi = K$. *Тогда*

$$l_{\mathfrak{N}}(\langle L^G \rangle) = l_{\mathfrak{N}}(\langle L^G \rangle^\varphi) \le 2 \max\left(l_p(\langle L_p^G \rangle^\varphi) \mid p \in \sigma\right).$$

***Доказательство.*** Повторяем доказательство утверждения 3 предложения 2 [1] с заменой в нем ссылки на утверждение 1 предложения 2 [1] ссылкой на утверждение 5 предложения 2 настоящей работы.

***Замечание* 3.** Если $L = 1$, то $l_{\mathfrak{N}}(\langle L^G \rangle) = l_{\mathfrak{N}}(\langle L^G \rangle^\varphi) = 0$ и в случае, когда $\sigma \neq \varnothing$, $\max\left(l_p(\langle L_p^G \rangle^\varphi) \mid p \in \sigma\right) = 0$. Если $1 \neq L \subseteq K$, то $l_{\mathfrak{N}}(\langle L^G \rangle) = 1$ и $l_{\mathfrak{N}}(\langle L^G \rangle^\varphi) = \max\left(l_p(\langle L_p^G \rangle^\varphi) \mid p \in \sigma\right) = 0$.

**Предложение 3.** *Пусть при условиях предложения* 1 $N \trianglelefteq G$ и $N \supseteq K_\pi$, $\varphi$ — *гомоморфизм* $G$ *на* $G/(NB)_G$. *Тогда*

$$\langle A^G \rangle^\varphi = \mathop{\times}_{p \in \pi(A^\varphi)} \langle A_p^G \rangle^\varphi \quad и \quad \langle A_p^G \rangle^\varphi = A_p^\varphi(\langle A_p^G \rangle^\varphi \cap B_{p'}^\varphi), \quad p \in \mathbb{P}. \tag{36}$$

***Доказательство.*** Очевидно, $(B^\varphi)_{G^\varphi} = 1$. Поэтому в силу утверждения 8 предложения 2 для любого $p \in \mathbb{P}$ $\langle A_p^G \rangle^\varphi \cap \langle A_{p'}^G \rangle^\varphi = 1$. Отсюда вытекает $\prod_{p \in \pi(A^\varphi)} \langle A_p^G \rangle^\varphi = \mathop{\times}_{p \in \pi(A^\varphi)} \langle A_p^G \rangle^\varphi$. Следовательно, поскольку $\langle A^G \rangle^\varphi = \prod_{p \in \pi(A^\varphi)} \langle A_p^G \rangle^\varphi$, справедливо первое из соотношений (36). Второе справедливо в силу утверждения 5 предложения 2.

**Предложение 4.** *Пусть* $G = AB$ — *конечная группа,* $A$ *и* $B$ — *ее нильпотентные подгруппы;* $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$, $\pi = \pi(A) \cap \pi(B)$, $R = (K_\pi B)_G$, $H = \langle A^G \rangle R$ *и* $\varphi$ — *гомоморфизм* $G$ *на* $G/R$. *Тогда выполняются соотношения* (36), *фактор-группа* $G/H (\simeq G^\varphi/\langle A^G \rangle^\varphi)$ *нильпотентна и*

$$R = (R \cap A)(R \cap B), \qquad H = (H \cap A)(H \cap B). \tag{37}$$

***Доказательство.*** Соотношения (36) выполняются в силу предложения 3; $G/H \simeq BH/H$, а потому $G/H$ нильпотентна. Поскольку в силу предложения 1 (п. 1) $K_\pi = (K_\pi \cap A)(K_\pi \cap B)$ и $R/K_\pi \subseteq BK_\pi/K_\pi$, то первое из соотношений (37) справедливо, например, на основании леммы настоящей работы. Следовательно, поскольку в силу леммы С. Н. Черникова (см., например, [2], лемма 1.8) $H^\varphi = \langle A^G \rangle^\varphi = A^\varphi(H^\varphi \cap B^\varphi)$, то ввиду леммы настоящей работы выполняется второе из соотношений (37).

**Предложение 5.** *Пусть при условиях предложения* 1 $N \trianglelefteq G$ *и* $N \supseteq K_\pi$,

$C/N = F(G/N)$, $H = [A, B]C$, $\varphi$ — *гомоморфизм* $G$ *на* $G/C$ *и для произвольных* $p, q \in \mathbb{P}$ $R_{pq} = \langle A_p^G \rangle^\varphi \cap \langle B_q^G \rangle^\varphi$, $D_{pq} = H^\varphi \cap R_{pq}$.

*Тогда*

$$\prod_{p,q\in\pi(G^\varphi)} R_{pq} = \underset{\substack{p,q\in\pi(G^\varphi)\\ p\neq q}}{\times} R_{pq}, \quad R_{pq} = (R_{pq} \cap A_p^\varphi)(R_{pq} \cap B_q^\varphi), \quad R_{pp} = 1, \tag{38}$$

*и выполняются соотношения* (1), (2).

***Доказательство***. Вследствие утверждения 11 предложения 2 $F(G/N) = ((AN)_G/N)((BN)_G/N)$. Следовательно,

$$C = (AN)_G(BN)_G, \tag{39}$$

Пусть $\psi$ и $\chi$ — гомоморфизмы соответственно $G$ на $G/(BN)_G$ и $G^\psi$ на $G^\psi/((AN)_G)^\psi$ такие, что $\varphi = \psi\chi$ (см. (39)). Так как $(B^\psi)_{G^\psi} = 1$, то в силу утверждения 8 предложения 2 для любого $p$ $\langle A_p^G \rangle^\psi \cap \langle A_{p'}^G \rangle^\psi = 1$. Поскольку $((AN)_G)^\psi \subseteq A^\psi$, то для любого $p$, очевидно, $((AN)_G)^\psi = (((AN)_G)^\psi \cap A_p^\psi) \times (((AN)_G)^\psi \cap A_{p'}^\psi)$. Поэтому, очевидно, $\langle A_p^G \rangle^{\psi\chi} \cap \langle A_{p'}^G \rangle^{\psi\chi} = 1$, т. е.

$$\langle A_p^G \rangle^\varphi \cap \langle A_{p'}^G \rangle^\varphi = 1. \tag{40}$$

Точно так же

$$\langle B_p^G \rangle^\varphi \cap \langle B_{p'}^G \rangle^\varphi = 1. \tag{41}$$

Следовательно, справедливо первое из соотношений (2); второе — в силу утверждения 5 предложения 2. Далее, вследствие утверждения 1 предложения 2 $A^\varphi \cap B^\varphi = 1$. Поэтому в силу утверждения 9 предложения 2

$$R_{pp} = 1. \tag{42}$$

Используя лемму Дедекинда и учитывая соотношения (40) – (42), а также соотношения

$$\prod_{s,t\in\mathbb{P},\, s\neq p} R_{st} \subseteq \langle A_{p'}^G \rangle^\varphi, \qquad \prod_{s,t\in\mathbb{P},\, t\neq q} R_{st} \subseteq \langle B_{q'}^G \rangle^\varphi,$$

получаем

$$R_{pq} \cap \prod_{s,t\in\mathbb{P},\, s\neq p} R_{st} \prod_{s,t\in\mathbb{P},\, t\neq q} R_{st} = \left( \langle A_p^G \rangle^\varphi \cap \prod_{s,t\in\mathbb{P},\, s\neq p} R_{st} \prod_{s,t\in\mathbb{P},\, t\neq q} R_{st} \right) \cap \langle B_q^G \rangle^\varphi =$$

$$= \left( \langle A_p^G \rangle^\varphi \cap \prod_{s,t\in\mathbb{P},\, s\neq p} R_{st} \prod_{t\in\mathbb{P},\, t\neq q} R_{pt} \right) \cap \langle B_q^G \rangle^\varphi =$$

$$= \prod_{t\in\mathbb{P},\, t\neq q} R_{pt} \left( \langle A_p^G \rangle^\varphi \cap \prod_{s,t\in\mathbb{P},\, s\neq p} R_{st} \right) \cap \langle B_q^G \rangle^\varphi = \prod_{t\in\mathbb{P},\, t\neq q} R_{pt} \cap \langle B_q^G \rangle^\varphi = 1.$$

Следовательно, выполняется первое из соотношений (38). Поскольку $A^\varphi \cap B^\varphi = 1$, то ввиду утверждения 10 предложения 2 выполняется второе из них.

Далее, ввиду (42) и (38) $D_{pp} = 1$ при произвольном $p$ и $\prod_{p,q \in \mathbb{P}} D_{pq} = \underset{p \neq q}{\times} D_{pq}$. С учетом (38), в силу леммы 2.13 [2] $D_{pq} = (D_{pq} \cap R_{pq} \cap A_p^{\varphi})(D_{pq} \cap R_{pq} \cap B_q^{\varphi}) = (D_{pq} \cap A_p^{\varphi})(D_{pq} \cap B_q^{\varphi})$. Легко видеть, что $[A_p^{\varphi}, B_q^{\varphi}] \subseteq D_{pq}$. Отсюда вытекает, что $[A^{\varphi}, B^{\varphi}] \subseteq \underset{p \neq q}{\times} D_{pq}$. Однако $\underset{p \neq q}{\times} D_{pq} \subseteq H^{\varphi} = [A^{\varphi}, B^{\varphi}]$. Следовательно, выполняется последнее из соотношений (2).

***Доказательство теоремы.*** Утверждения 1 и 2 теоремы справедливы в силу предложения 5, а утверждение 3 — ввиду утверждения 4 предложения 2. На основании [7] или теоремы 2 [6] $A \cap B \subseteq F(G) = (F(G) \cap A)(F(G) \cap B)$, и вследствие утверждений 1 и 2 настоящей теоремы $H^{\varphi} = (H^{\varphi} \cap A^{\varphi})(H^{\varphi} \cap B^{\varphi})$. Поэтому в силу леммы настоящей работы выполняются (3). Теорема доказана.

**Предложение 6.** *Пусть* $G = AB$ — *конечная группа,* $A$ *и* $B$ — *ее нильпотентные подгруппы,* $\varphi$ — *гомоморфизм* $G$ *на* $G/F(G)$ *и* $R_{pq}$ — *такие же, как в предложении* 5. *Тогда выполняются соотношения* (38).

***Доказательство.*** Пусть $\pi = \pi(A) \cap \pi(B)$, $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$, $N = K_{\pi}$ и $C/N = F(G/N)$. Тогда ввиду теоремы Гашюца $C = F(G)$, т. е. $\varphi$ — гомоморфизм $G$ на $G/C$. Поэтому настоящее предложение справедливо в силу предложения 5.


1. *Черников Н.С.* О конечных разрешимых группах, разложимых в произведение двух нильпотентных подгрупп // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, №6. – С. 809 – 819.
2. *Черников Н.С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
4. *Wielandt H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen // Ill. J. Math. – 1958. – **2**, № 4B. – S. 611 – 618.
5. *Kegel O.H.* Produkte nilpotenten Cruppen // Arch. Math. – 1961. – **12**. № 2. – S. 90 – 93.
6. *Черников Н.С.* Периодические локально разрешимые группы, факторизуемые двумя локально нильпотентными подгруппами // Вопросы алгебры (Гомель). – 1997. – **11**. – С. 90 – 115.
7. *Pennington E.* On products of finite nilpotent groups // Math. Z. – 1973. – **134**. № 1. – S. 81 – 83.
8. *Wielandt H.* Über das Produkt von paarweise vertauschbaren nilpotenten Gruppen // Math. Z. – 1951. – **55**, № 1. – S. 1 – 7.


Получено 10.08.2000