УДК 519.2

П. Грачик[1] (Ун-т Анже, Франция),

Г. М. Фельдман[2] (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

НЕЗАВИСИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИСТИКИ НА КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

We give the complete description of the class of with finite Abelian groups X for which the independence of linear statistics $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2) + \alpha_3(\xi_3)$ and $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2) + \beta_3(\xi_3)$ (ξ_j, $j = 1, 2, 3$, are independent random variables with values in X and distributions μ_j; α_j and β_j are automorphisms of X) implies that either one or two or three of the distributions μ_j are idempotents.

Наведено повний опис класу всіх скінченних абелевих груп X, для яких з незалежності лінійних статистик $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2) + \alpha_3(\xi_3)$ та $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2) + \beta_3(\xi_3)$ (ξ_j, $j = 1, 2, 3$, — незалежні випадкові величини зі значеннями в X і з розподілами μ_j; α_j, β_j — автоморфізми групи X) випливає, що або один, або два, або три з розподілів μ_j є ідемпотентами.

Известно, что если $\xi_j, j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины и линейные статистики $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \ldots + \beta_n \xi_n$ (α_j, β_j отличны от нуля) независимы, то ξ_j — гауссовские. Эта теорема, доказанная В. П. Скитовичем [1] и Дармуа [2], завершает серию исследований, начатых С. Н. Бернштейном, который доказал, что из независимости суммы и разности двух независимых случайных величин следует, что они гауссовские. Теорема Скитовича – Дармуа была обобщена Гурье и Олкиным, которые доказали аналогичную теорему, где вместо независимых случайных величин рассматриваются независимые случайные векторы, а коэффициенты α_j, β_j — невырожденные матрицы [3], [4] (гл. 3). Рассмотрим следующую общую постановку задачи.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева группа, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов X, $\Gamma(X)$ — множество гауссовских распределений на группе X. (Отметим, что на вполне несвязных группах, в частности на конечных группах, гауссовские распределения вырождены [5].) Пусть $I(X)$ — множество идемпотентных распределений на X, т. е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Предположим, что $\xi_j, j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Рассмотрим линейные статистики $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \ldots + \alpha_n(\xi_n)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \ldots + \beta_n(\xi_n)$, $n \geq 2$, где $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$.

Возникает задача: для каких групп X из независимости L_1 и L_2 следует, что все $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$.

(Сдвиги на идемпотентные распределения естественным образом возникают в характеризационных задачах на группах (см. [6], гл. 3).)

Эта задача была решена в классах конечных абелевых групп [7], компактных абелевых групп [8] и дискретных периодических абелевых групп [9].[3] Как было установлено в [14], для $n = 2$ теорема Скитовича – Дармуа справедлива для

---

[1] Частично поддержана European Commission (TMR 1998-2001 Network Harmonic Analysis).

[2] Работа выполнена при поддержке Programme de Bourses de Recherche Scientifique et Technique de l'OTAN (France).

[3] Отметим, что в последнее время появились работы (см., например, [10 – 13]), в которых рассматриваются аналоги характеризационных теорем Бернштейна и Скитовича – Дармуа в неабелевой ситуации, а именно, на группах Ли, квантовых группах, симметричных пространствах.

всех конечных абелевых групп, в то время как класс конечных абелевых групп, для которых теорема Скитовича–Дармуа верна при любом $n \geq 2$, весьма узок. Эта ситуация противоположна классической, где нет разницы между случаями $n=2$ и произвольного n. Обозначим через $\mathbb{Z}(n)$ группу вычетов по модулю n. Следующая теорема была доказана в [7].

Теорема А. *Пусть X — конечная абелева группа вида*

$$\mathbb{Z}(2^{m_1}) + \ldots + \mathbb{Z}(2^{m_l}), \qquad 0 \leq m_1 < \ldots < m_l. \tag{1}$$

Тогда из независимости L_1 и L_2 следует, что все μ_j — вырожденные распределения. Если X имеет вид

$$\mathbb{Z}(3) + G, \tag{2}$$

где группа G такая, как в (1), *то существуют такие сдвиги μ_j' распределений μ_j, что носители всех μ_j' лежат в $\mathbb{Z}(3)$ и либо все μ_j — вырожденные распределения, либо $\mu_{j_1}' = \mu_{j_2}' = m_{\mathbb{Z}(3)}$, по крайней мере, для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}, а остальные μ_j произвольны.*

Если X не изоморфна группам вида (1) *или* (2), *то для любого натурального $n \geq 4$ существуют независимые случайные величины $\xi_j, j = 1, 2, \ldots, n$, со значениями в X и с распределениями μ_j и автоморфизмы α_j, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что L_1 и L_2 независимы, а все $\mu_j \notin I(X)$.*

С другой стороны, при $n=2$ имеет место следующее утверждение.

Теорема Б [14]. *Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в конечной абелевой группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Тогда из независимости $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2)$, где α_j, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, следует, что $\mu_j \in I(X)$, $j = 1, 2$.*

Таким образом, в классе конечных абелевых групп остался неисследованным случай, когда число независимых случайных величин $n = 3$. Его изучению и посвящена эта работа. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ — независимые случайные величины со значениями в конечной абелевой группе X и с распределениями μ_j. Если X имеет вид*

$$\mathbb{Z}(5) + G, \tag{3}$$

где группа G такая, как в (1), *то из независимости $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2) + \alpha_3(\xi_3)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2) + \beta_3(\xi_3)$, где α_j, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, следует, что существуют такие сдвиги μ_j' распределений μ_j, что носители всех μ_j' лежат в $\mathbb{Z}(5)$ и справедливо одно из следующих утверждений:*

i) *все μ_j — вырожденные распределения;*

ii) *$\mu_{j_1}' = \mu_{j_2}' = m_{\mathbb{Z}(5)}$ для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}, а μ_{j_3} произвольно;*

iii) *$\mu_{j_1}' = m_{\mathbb{Z}(5)}$ для одного распределения μ_{j_1} и характеристические функции распределений μ_{j_2} и μ_{j_3} обращаются в нуль.*

Если X не изоморфна группам вида (1)–(3), *то существуют независимые случайные величины $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ со значениями в X и с распределениями μ_j и автоморфизмы α_j, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что L_1 и L_2 независимы, а все $\mu_j \notin I(X)$.*

Прежде чем доказывать основной результат, введем некоторые обозначения. Для произвольной локально компактной абелевой группы X обозначим через $Y = X^*$ ее группу характеров, через (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ определим сопряженный автоморфизм $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$ формулой $(x, \tilde{\alpha}(y)) = (\alpha(x), y)$ для всех $x \in X, y \in Y$. Сверточную полугруппу вероятностных распределений на X обозначим через $M^1(X)$. Если распределение $\mu \in M^1(X)$, то его характеристическую функцию обозначим через $\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y)\, d\mu(x)$. Отметим, что если X — компактная группа, то характеристическая функция распределения Хаара m_K имеет вид

$$\hat{m}_X(y) = \begin{cases} 1, & y = 0; \\ 0, & y \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ элементы групп $\mathbb{Z}(n) \approx (\mathbb{Z}(n))^*$.

Если $\xi_j, j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j, то, учитывая, что $\hat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}[(\xi_j, y)]$, так же, как и в классическом случае, убеждаемся в том, что независимость линейных статистик $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \ldots + \alpha_n(\xi_n)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \ldots + \beta_n(\xi_n)$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, эквивалентна тому, что характеристические функции распределений μ_j удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(\tilde{\alpha}_j u + \tilde{\beta}_j v) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(\tilde{\alpha}_j u) \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(\tilde{\beta}_j v) \qquad u, v \in Y. \tag{4}$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $\xi_j, j = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины со значениями в группе $X = \mathbb{Z}(5)$ и с распределениями μ_j. Если линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \delta_2(\xi_2) + \delta_3(\xi_3)$, где $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, независимы, то справедливо одно из следующих утверждений:*

i) *все μ_j — вырожденные распределения;*

ii) *$\mu_{j_1} = \mu_{j_2} = m_{\mathbb{Z}(5)}$ для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2}, а μ_{j_3} произвольно;*

iii) *$\mu_{j_1} = m_{\mathbb{Z}(5)}$ для одного распределения μ_{j_1} и характеристические функции распределений μ_{j_2} и μ_{j_3} обращаются в нуль.*

Доказательство. Предположим сначала, что не все δ_j различны. Пусть для определенности $\delta_2 = \delta_3$. Положим $\xi_2' = \xi_2 + \xi_3$. Тогда случайные величины ξ_1 и ξ_2' независимы и ξ_2' имеет распределение $\mu_2 * \mu_3$. Очевидно, что линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2'$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \delta_2(\xi_2')$ независимы. Из теоремы Б в таком случае следует, что либо все μ_j — вырожденные распределения, и, следовательно, справедливо утверждение i), либо $\mu_1 = \mu_2 * \mu_3 = m_{\mathbb{Z}(5)}$, и тогда справедливо утверждение ii), либо iii).

Предположим теперь, что все δ_j различны. Легко видеть, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}(5)) \approx \mathbb{Z}(4)$ и каждый автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}(5))$ имеет вид $\delta(x) = kx$, $k = 1, 2, 3, 4$, $x \in \mathbb{Z}(5)$. Поскольку L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда независимы L_1 и $\delta(L_2)$, можно предполагать, не ограничивая общности, что

$L_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$. Обозначим $f(y) = \hat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \hat{\mu}_2(y)$, $h(y) = \hat{\mu}_3(y)$. В этих обозначениях уравнение (4) принимает вид

$$f(u+v)g(u+2v)h(u+3v) =$$
$$= f(u)g(u)h(u)f(v)g(2v)h(3v), \quad u, v \in Y. \tag{5}$$

Предположим сначала, что все $\hat{\mu}_j(y)$ не обращаются в нуль. Обозначим

$$\mathrm{F} = \prod_{y \in Y} f(y), \quad \mathrm{G} = \prod_{y \in Y} g(y), \quad \mathrm{H} = \prod_{y \in Y} h(y).$$

Положим в (5) $u = v = y$, рассмотрим полученные равенства для каждого $y \in Y$ и перемножим их. В результате получим $\mathrm{FGH} = \mathrm{F}^2\mathrm{G}^2\mathrm{H}^2$. Следовательно, $\mathrm{FGH} = 1$, а значит, $|f(y)| = |g(y)| = |h(y)| \equiv 1$. Это эквивалентно тому, что все μ_j — вырожденные распределения, т. е. справедливо утверждение i).

Заметим, что невозможно, чтобы только одна из характеристических функций обращалась в нуль. Это следует из того факта, что для любого $u \in Y$, $u \neq 0$, и любого автоморфизма $\tilde{\delta} \in \mathrm{Aut}(Y)$ существует элемент $v \in Y$ такой, что $u + \tilde{\delta} v = 0$.

Предположим, что только две характеристические функции обращаются в нуль. Пусть для определенности это $f(y)$ и $g(y)$. Тогда они должны иметь общие нули. Действительно, в противном случае $f(u_0) = g(2u_0) = 0$, $f(2u_0) \neq 0$, $g(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$, и, следовательно, при $u = 3u_0$, $v = 4u_0$ правая часть уравнения (5) обращается в нуль, в то время как левая часть не равна нулю.

Таким образом, $f(y)$ и $g(y)$ имеют общие нули. Пусть $f(u_0) = g(u_0) = 0$. Подставляя в (5) $u = u_0$, $v = 2u_0$, получаем $f(3u_0) = 0$, т. е. $\mu_1 = m_{\mathbb{Z}(5)}$. Подставляя в (5) $u = 3u_0$, $v = 2u_0$, имеем $g(2u_0) = 0$, т. е. $\mu_2 = m_{\mathbb{Z}(5)}$. Из (5), очевидно, следует, что если $\mu_1 = \mu_2 = m_{\mathbb{Z}(5)}$, то распределение μ_3 может быть произвольным. В этом случае справедливо утверждение ii). Остальные случаи, когда либо $f(y)$ и $h(y)$, либо $g(y)$ и $h(y)$ обращаются в нуль, рассматриваются аналогично.

Предположим теперь, что все три характеристические функции $f(y)$, $g(y)$ и $h(y)$ обращаются в нуль. Рассмотрим сначала случай, когда

$$f(u_0) = g(u_0) = h(u_0) = 0 \tag{6}$$

в некоторой точке $u_0 \in Y$. Полагая в (5) $u = u_0$, $v = 2u_0$, получаем $f(3u_0)h(2u_0) = 0$, т. е. либо $\mu_1 = m_{\mathbb{Z}(5)}$, либо $\mu_3 = m_{\mathbb{Z}(5)}$, и, следовательно, справедливо утверждение iii).

Если (6) не выполнено, то возможны 3 следующих случая.

1. $f(u_0) = g(u_0) = h(2u_0) = 0$, $h(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$. Полагая в (5) $u = 2u_0$, $v = 3u_0$, получаем $g(3u_0) = 0$, т. е. $\mu_2 = m_{\mathbb{Z}(5)}$, и, значит, справедливо утверждение iii).

2. $f(u_0) = g(2u_0) = h(u_0) = 0$, $g(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$. Полагая в (5) $u = 2u_0$, $v = u_0$, имеем $f(3u_0) = 0$, т. е. $\mu_1 = m_{\mathbb{Z}(5)}$. Полагая в (5) $u = u_0$, $v = 4u_0$, получаем $h(3u_0) = 0$, т. е. $\mu_3 = m_{\mathbb{Z}(5)}$. Из (5), очевидно, следует, что если $\mu_1 = \mu_3 = m_{\mathbb{Z}(5)}$, то распределение μ_2 может быть произвольным. В этом случае справедливо утверждение ii).

3. $f(2u_0) = g(u_0) = h(u_0) = 0$, $f(u_0) \neq 0$ для некоторого $u_0 \in Y$. Полагая в

(5) $u = 4u_0$, $v = 2u_0$, имеем $g(3u_0) = 0$, т. е. $\mu_2 = m_{\mathbb{Z}(5)}$, и, следовательно, справедливо утверждение iii).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для каждой из групп* $X = \mathbb{Z}(3) + \mathbb{Z}(3)$, $X = \mathbb{Z}(5) + \mathbb{Z}(5)$, $X = \mathbb{Z}(2^k) + \mathbb{Z}(2^k)$ *существуют независимые случайные величины* ξ_j, $j = 1, 2, 3$, *со значениями в* X *и с распределениями* μ_j *и автоморфизмы* $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ *такие, что линейные статистики* $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ *и* $L_2 = \xi_1 + \alpha(\xi_2) + \beta(\xi_3)$ *независимы, а все* $\mu_j \notin I(X)$.

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{Z}(3) + \mathbb{Z}(3)$. Обозначим элементы групп X и Y через (p, q), $p, q \in \mathbb{Z}(3)$. Рассмотрим на группе X распределение $\mu(\{x\}) = (1 + \mathrm{Re}\,(x, (0, 1)))/9$, $x \in X$. Очевидно, что $\hat{\mu}(p, q) = 0$, если $p \neq 0$. Пусть автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеют вид

$$\alpha(p, q) = (p, p+q), \quad \beta(p, q) = (q, p), \quad p, q \in \mathbb{Z}(3).$$

Тогда

$$\tilde{\alpha}(p, q) = (p+q, q), \quad \tilde{\beta}(p, q) = (q, p), \quad p, q \in \mathbb{Z}(3).$$

Предположим, что ξ_j, $j = 1, 2, 3$, — независимые одинаково распределенные с распределением μ случайные величины со значениями в группе X. Мы покажем, что линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $L_2 = \xi_1 + \alpha(\xi_2) + \beta(\xi_3)$ независимы. Для этого достаточно убедиться в справедливости уравнения (4), которое принимает вид

$$\hat{\mu}(u+v)\hat{\mu}(u+\tilde{\alpha}v)\hat{\mu}(u+\tilde{\beta}v) =$$

$$= \hat{\mu}^3(u)\hat{\mu}(v)\hat{\mu}(\tilde{\alpha}v)\hat{\mu}(\tilde{\beta}v), \quad u, v \in Y. \tag{7}$$

Очевидно, что (7) выполнено, если либо $u = 0$, либо $v = 0$. Поэтому предположим, что $u \neq 0$, $v \neq 0$. Обозначим через $a = (1, 0)$ и $b = (0, 1)$ образующие группы Y. Тогда $u = pa + qb$, $v = p'a + q'b$, $p, p', q, q' \in \{0, 1, 2\}$. Если либо $p \neq 0$, либо $p' \neq 0$, то соответственно либо $\hat{\mu}(u) = 0$, либо $\hat{\mu}(v) = 0$ и правая часть уравнения (7) равна нулю. Если $p = p' = 0$, то $v = q'b$, $q' \neq 0$ и $\hat{\mu}(\tilde{\alpha}v) = \hat{\mu}(\tilde{\alpha}q'b) = \hat{\mu}(q'a + q'b) = \hat{\mu}(q', q') = 0$. Таким образом, правая часть уравнения (7) обращается в нуль при любых $u \neq 0$, $v \neq 0$. Покажем, что и левая часть уравнения (7) обращается в нуль. Предположим сначала, что $p + p' \neq 0 \pmod 3$. В этом случае $\hat{\mu}(u+v) = 0$. Если $p + p' = 0 \pmod 3$ и $q' \neq 0$, то

$$u + \tilde{\alpha}v = pa + qb + \tilde{\alpha}(p'a + q'b) =$$

$$= pa + qb + p'a + q'(a+b) = q'a + (q+q')b.$$

Поэтому $\hat{\mu}(u + \tilde{\alpha}v) = 0$. Если $q' = 0$, то

$$u + \tilde{\beta}v = pa + qb + \tilde{\beta}(p'a) = pa + (q+p')b.$$

Заметим, что $p \neq 0$, так как в противном случае было бы $p' = 0$, и, следовательно, $v = 0$. Но если $p \neq 0$, то $\hat{\mu}(u + \tilde{\beta}v) = 0$. Таким образом, (7) выполнено для всех $u, v \in Y$, а, значит, линейные статистики L_1 и L_2 независимы. Очевидно, что $\mu \notin I(X)$.

Доказательство леммы для группы $X = \mathbb{Z}(5) + \mathbb{Z}(5)$ совпадает с приведенным выше с точностью до обозначений.

Если $X = \mathbb{Z}(2^k) + \mathbb{Z}(2^k)$, то нужно рассмотреть независимые случайные величины со значениями в подгруппе $G = \mathbb{Z}(2) + \mathbb{Z}(2) \subset X$ и заметить, что G инвариантна относительно автоморфизмов α и β. Для группы G доказательство также совпадает с приведенным выше с точностью до обозначений. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для каждой из групп* $X = \mathbb{Z}(2n-1)$, $n \geq 4$, *и* $X = \mathbb{Z}(3) + \mathbb{Z}(5)$ *существуют независимые случайные величины* $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ *со значениями в* X *и распределениями* μ_j *и автоморфизмы* $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ *такие, что линейные статистики* $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ *и* $L_2 = \xi_1 + \alpha(\xi_2) + \beta(\xi_3)$ *независимы, а все* $\mu_j \notin I(X)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала группу $X = \mathbb{Z}(7)$. Пусть $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1(\{x\}) = (1 + \mathrm{Re}(x, 1))/7$ и $\mu_2(\{x\}) = \mu_3(\{x\}) = (1 + \mathrm{Re}(x, 2))/7$, $x \in X$. Тогда $\hat{\mu}_1(y) = 0$, если $y \notin \{0, 1, 6\}$, и $\hat{\mu}_2(y) = 0$, если $y \notin \{0, 2, 5\}$. Покажем, что линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $L_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3$ независимы. Уравнение (4) принимает вид

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u+2v)\hat{\mu}_2(u+5v) =$$
$$= \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2^2(u)\hat{\mu}_1(v)\hat{\mu}_2(2v)\hat{\mu}_2(5v), \quad u, v \in Y. \tag{8}$$

Достаточно проверить (8), предполагая, что $u \neq 0$, $v \neq 0$. Очевидно, что тогда правая часть уравнения (8) обращается в нуль. Если левая часть уравнения (8) не равна нулю, то отсюда, в частности, следует, что $u + v \in \{0, 1, 6\}$, $u + 2v \in \{0, 2, 5\}$. Тогда $(u, v) \in \{(5, 2), (2, 5), (2, 6)\ (4, 4), (5, 1), (3, 3)\}$. Но в каждом из этих случаев $u + 5v \notin \{0, 2, 5\}$, и, следовательно, $\hat{\mu}_2(u + 5v) = 0$. Таким образом, (8) выполнено при всех $u, v \in Y$, а поэтому линейные статистики L_1 и L_2 независимы. Очевидно, что все $\mu_j \notin I(X)$.

Рассуждение для группы $\mathbb{Z}(2n-1)$, $n \geq 5$, аналогично. Нужно рассмотреть распределения

$$\mu_1(\{x\}) = \mu_3(\{x\}) = \frac{1}{2n-1}(1 + \mathrm{Re}(x, 1)),$$

$$\mu_2(\{x\}) = \frac{1}{2n-1}(1 + \mathrm{Re}(x, 2)) \quad x \in X,$$

и линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $L_2 = \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$.

Предположим теперь, что $X = \mathbb{Z}(3) + \mathbb{Z}(5)$. Обозначим элементы групп X и Y через (p, q), $p \in \mathbb{Z}(3)$, $q \in \mathbb{Z}(5)$. Пусть $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями

$$\mu_1(\{x\}) = \mu_3(\{x\}) = \frac{1}{15}(1 + \mathrm{Re}(x, (1, 1)))$$

и

$$\mu_2(\{x\}) = \frac{1}{15}(1 + \mathrm{Re}(x, (2, 1))), \quad x \in X.$$

Тогда $\hat{\mu}_1(y) = 0$, если $y \notin \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$, и $\hat{\mu}_2(y) = 0$, если $y \notin \{(0, 0), (2, 1), (1, 4)\}$. Рассуждая так же, как в случае $X = \mathbb{Z}(7)$, легко убедиться, что линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $L_2 = \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$ независимы. Очевидно, что все $\mu_j \notin I(X)$. Лемма 3 доказана.

***Замечание* 1.** Леммы 2 и 3 и их доказательства не изменяются, если число независимых случайных величин $n \geq 3$. Достаточно рассмотреть линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и $L_2 = \xi_1 + \ldots + \xi_{n-2} + \alpha(\xi_{n-1}) + \beta(\xi_n)$, где все ξ_j одинаково распределены с распределением μ в случае леммы 2, и $\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}$ имеют распределение μ_1, а ξ_{n-1}, ξ_n — распределение μ_2 в случае леммы 3.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть X — произвольная локально компактная абелева группа. Для $\mu \in M^1(X)$ определим распределение $\overline{\mu} \in \in M^1(X)$ по формуле $\overline{\mu}(E) = \mu(-E)$ для любого борелевского множества $E \subset \subset X$. Тогда $\hat{\overline{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$. Обозначим через $\sigma(\mu)$ носитель $\mu \in M^1(X)$. Отметим, что если H — замкнутая подгруппа в Y и $\hat{\mu}(y) \equiv 1$ при $y \in H$, то $\hat{\mu}(y+h) = \hat{\mu}(y)$ для всех $y \in Y$, $h \in H$ и $\sigma(\mu) \subset A(X, H) = \{x \in X : (x, y) = 1$ для всех $y \in H\}$.

Пусть группа X имеет вид (3). Рассмотрим распределения

$$\nu_j = \mu_j * \overline{\mu}_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Тогда $\hat{\nu}_j(y) = \left|\hat{\mu}_j(y)\right|^2 \geq 0$ и характеристические функции $\hat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (4). Обозначим $H = G^*$. Поскольку $a(H) = H$ для каждого $a \in \mathrm{Aut}(Y)$, мы можем рассмотреть ограничение уравнения (4) для характеристических функций $\hat{\nu}_j(y)$ на подгруппу H. Применяя теорему А, получаем $\hat{\nu}_j(y) = 1$ при $y \in H$, $j = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что $\sigma(\nu_j) \subset A(X, H) = = \mathbb{Z}(5)$. Принимая во внимание (9), убеждаемся, что распределения μ_j можно так заменить их сдвигами μ_j', что носители всех распределений μ_j' лежат в $\mathbb{Z}(5)$, $j = 1, 2, 3$. Поскольку подгруппа $\mathbb{Z}(5)$ инвариантна относительно любого автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, утверждения i)–iii) теоремы 1 следуют из леммы 1.

Предположим теперь, что конечная группа X не изоморфна группам вида (1)–(3). Представим группу X как прямую сумму своих p-примарных подгрупп. Поскольку группа X не изоморфна группам вида (1)–(3), легко видеть, что X содержит, как прямое слагаемое B, одну из групп, изоморфных $\mathbb{Z}(2n - -1)$ для $n \geq 4$, $\mathbb{Z}(3) + \mathbb{Z}(3)$, $\mathbb{Z}(3) + \mathbb{Z}(5)$, $\mathbb{Z}(5) + \mathbb{Z}(5)$, $\mathbb{Z}(2^k) + \mathbb{Z}(2^k)$. Поскольку B — прямое слагаемое X, то каждый автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(B)$ продолжается до автоморфизма группы X. Для завершения доказательства достаточно рассмотреть независимые случайные величины $\xi_j, j = 1, 2, 3$, принимающие значения в $B, \alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(B)$, $j = 1, 2, 3$, и применить леммы 2 и 3.

***Замечание* 2.** Теоремы А и Б были обобщены в частности, на сепарабельные вполне несвязные компактные абелевы группы X. Обозначим через K группу вида (1), через Δ_p — группу p-адических целых чисел, через $f_n \colon X \to X$ — гомоморфизм $f_n(x) = nx$ и $X^{(n)} = \mathrm{Im} f_n$. Теорема А справедлива для вполне несвязных компактных абелевых групп, если под G понимать одну из групп K, Δ_2, $\Delta_2 + K$. Что касается теоремы Б для этого класса групп, то при $n = 2$ из независимости L_1 и L_2 следует, что $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$ тогда и только тогда, когда для любого простого p фактор-группа $X/X^{(p)}$ конечна (см. [8, 15]). Если число независимых случайных величин $n = 3$, то справедливо следующее предложение.

Предложение. *Теорема* 1 *справедлива для сепарабельных вполне несвязных* *компактных абелевых групп, если под* G *мы понимаем одну из упомянутых выше групп* K, Δ_2, Δ_2+K.

Доказательство этого утверждения следует схеме доказательства теоремы 1 и кроме лемм 1–3 опирается на следующий результат.

Для каждой из групп $X=\Delta_2+\Delta_2$ и $X=\Delta_p$, где p — простое и $p\geq 3$, существуют независимые случайные величины $\xi_j, j=1,2,3$, со значениями в X и с распределениями μ_j и автоморфизмы $\alpha,\beta\in\mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные статистики $L_1=\xi_1+\xi_2+\xi_3$ и $L_2=\xi_1+\alpha(\xi_2)+\beta(\xi_3)$ независимы, а все $\mu_j\notin$ $\notin I(X)$.

1. *Скитович В. П.* Об одном свойстве нормального распределения // Докл. АН СССР. – 1953. – **89**. – С. 217–219.
2. *Darmois G.* Analyse generale des liaisons stochastiques // Rev. Inst. int. statist. – 1953. – **21**. – P. 2–8.
3. *Ghurye S. G., Olkin I.* A characterization of the multivariate normal distribution // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**. – P. 553–541.
4. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
5. *Parthasarathy K. R., Ranga Rao R., Varadhan S. R. S.* Probability distributions on locally compact Abelian groups // Ill. J. Math. – 1963. – **7**. – P. 337–369.
6. *Fel'dman G. M.* Arithmetic of probability distributions and characterisation problems on Abelian groups. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. – 223 p.
7. *Фельдман Г. М.* Теорема Скитовича–Дармуа на абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1992. – **37**, № 4. – С. 695–708.
8. *Фельман Г. М.* К теореме Скитовича–Дармуа для компактных групп // Там же. – 1996. – **41**, № 4. – С. 901–906.
9. *Фельдман Г. М.* Теорема Скитовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп // Там же. – 1997. – **42**, № 4. – С. 747–756.
10. *Neuenschwander D.* Gauss measures in the sense of Bernstein on the Heisenberg group // Probab. and Math. Statist. – 1993. – **14**, Fasc. 2. – P. 253–256.
11. *Neuenschwander D., Roynette B., Schott R.* Characterization of Gauss measures on nilpotent Lie groups and symmetric spaces // C. r. Acad. sci. Ser. I. – 1997. – **324** – P. 87–92.
12. *Franz U., Neuenschwander D., Schott R.* Gauss laws in the sense of Bernstein and uniqueness of embedding into convolution semigroups on quantum groups and braided groups // Ibid. – P. 827–832.
13. *Neuenschwander D., Schott R.* The Bernstein and Skitovich–Darmois characterization theorems for Gaussian distributions on groups, symmetric spaces, and quantum groups // Expo. Math. – 1997. – **15**. – P. 289–314.
14. *Фельдман Г. М.* К теореме Скитовича – Дармуа для конечных абелевых групп // Теория вероятностей и ее применения. – 2000. – **45**, № 3. – С. 603–607.
15. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich–Darmois theorem for compact Abelian groups // J. Theor. Probab. – 2000. – **13**, № 3. – P. 859–869.

Получено 09.03.99