УДК 517.5

Вит. В. Волчков (Донец. ун-т)

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

We investigate the accuracy of some sufficient conditions for multipliers of power series in the Hardy spaces.

Досліджується точність деяких достатніх умов для мультиплікаторів степеневих рядів у просторах Харді.

Введение. Пусть H^q, $0 < q < +\infty$, — класс голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f с конечной квазинормой:

$$\|f\|_q = \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta \right)^{1/q}.$$

Последовательность $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{C}$ называют мультипликатором в пространстве H^q, если для любой функции f из H^q функция

$$(Mf)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

принадлежит H^q и $\exists\, \gamma > 0 : \|Mf\|_q \le \gamma \|f\|_q \;\; \forall\, f \in H^q$. При этом полагают $\left\| \{\mu_k\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{M_q} = \sup_{\|f\|_q \le 1} \|Mf\|_q$, где, как обычно, M_q — класс мультипликаторов в пространстве H^q. Пусть также $M_q[0, +\infty)$ — класс функций $\varphi : [0, +\infty) \to \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|\varphi\|_{M_q[0,+\infty)} = \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \{\varphi(\varepsilon k)\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{M_q} < \infty.$$

При $q \in (1, +\infty)$ последовательность $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ является мультипликатором в H^q тогда и только тогда, когда ее продолжение нулем на $\mathbb{Z}$ является мультипликатором рядов Фурье в $L_q[-\pi, \pi)$. Этот случай изучался многими авторами (см. [1] и приведенную в ней библиографию). В [2, 3] получены оценки сверху для норм мультипликаторов в H^q, $0 < q \le 1$, и показано их применение к вопросам теории приближений функций линейными средними степенных рядов. В [3] приведены также некоторые необходимые условия для мультипликаторов. Подобным вопросам в пространствах L_q, $1 \le q < \infty$, посвящена работа [4]. В работе [5] показано, что достаточные условия для мультипликаторов, полученные в [3], являются в ряде случаев точными.

В данной статье изучается зависимость между ростом вариации функции φ на отрезке $[x, 1]$ при $x \to +0$ и ее принадлежностью $M_q[0, +\infty)$. Из теоремы Марцинкевича о мультипликаторах следует, что любая функция φ, равная нулю при $x \ge 1$ и имеющая ограниченную вариацию на $[0, 1]$, принадлежит

$M_q[0,+\infty)$ при $1 < q < +\infty$ и $\|\varphi\|_{M_q[0,+\infty)} \le c_q \left(\sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)| + \operatorname{Var}_{[0,1]} \varphi \right)$ (здесь далее символами $c_1, c_2, c_q, \ldots$ обозначаются абсолютные положительные по стоянные, зависящие от указанных параметров, в разных случаях, вообще гово ря, разные). Возникает вопрос о том, можно ли в этом утверждении ослабит условие $\operatorname{Var}_{[0,1]} \varphi < \infty$. В данной работе показано, что ограниченность вариаци функции φ на $[0,1]$ нельзя заменить никаким ростом $\operatorname{Var}_{[x,1]} \varphi$ при $x \to +0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть Φ — возрастающая положительная функция на $[0, +\infty)$ и $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty$. Тогда существует функция $\varphi : [0,+\infty) \to R^1$ с следующими свойствами:*

1) $\varphi \in C[0,+\infty) \cap C^\infty(0,+\infty)$; $\varphi(x) = 0$ *при* $x = 0$ *и* $x \ge 1$;

2) $\operatorname{Var}_{[x,1]} \varphi \underset{x \to +0}{\sim} \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$;

3) φ *не принадлежит* $M_q[0,+\infty)$ *ни при каком* $q \in (0,2)$.

Отметим, что гладкость функции φ на $[0,+\infty)$ усилить нельзя: если $\varphi \in C^1[0,+\infty)$ и равна нулю при $x \ge 1$, то $\varphi \in M_q[0,+\infty)$ при $q \in (2/3, 1]$ (см [3], теорема 3).

Более слабый результат анонсирован автором в [6].

1. Вспомогательные конструкции. Далее будем использовать следующи стандартные обозначения, принятые в аналитической теории чисел: p — про стое число, $\sum_{p \le x} f(p)$ — сумма по всем простым числам p, не превышающи x, $\pi(x) = \sum_{p \le x} 1$, Λ — функция Мангольдта, т. е.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если} \quad n = p^m, \ m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{— для остальных } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Лемма 1. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что пр $N \ge 2$*

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{p \le N} \frac{e^{ipt}}{\ln p} \right| dt \ \ge \ c \frac{\sqrt{N}}{\ln^3 N}.$$

Доказательство. Сначала оценим

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{p \le N} (\ln p) e^{ipt} \right| dt.$$

Из определения Λ имеем

$$\sum_{n \le N} \Lambda(n) e^{int} = \sum_{p \le N} (\ln p) e^{ipt} + \sum_{\substack{n \le N \\ n \ne p}} \Lambda(n) e^{int}. \qquad (1$$

Покажем, что

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\substack{n \le N \\ n \ne p}} \Lambda(n) e^{int} \right| dt \ \le \ c_1 N^{1/4} \ln^{3/2} N. \qquad (2$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi} I_2^2 \le \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\substack{n \le N \\ n \ne p}} \Lambda(n) e^{int} \right|^2 dt = \sum_{\substack{n \le N \\ n \ne p}} \Lambda^2(n) \le \sum_{m=1}^{\infty} \pi\left(N^{1/m}\right) \ln N. \tag{3}$$

Поскольку количество ненулевых слагаемых в правой части (3) не превышает $c_2 \ln N$, то имеем (2). Учитывая, что

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \le N} \Lambda(n) e^{int} \right| dt \ge c_3 \sqrt{N}$$

(см. [7]), из (1) и (2) получаем $I_1 \ge I_3 - I_2 \ge c_4 \sqrt{N}$. Обозначим

$$f(t) = \sum_{p \le N} \frac{e^{ipt}}{\ln p}, \qquad g(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(\ln^2 n\right) e^{int},$$

тогда

$$\sum_{p \le N} (\ln p) e^{ipt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(t-x)\, dx.$$

Следовательно, $I_1 \le \| f \|_1 \| g \|_1$, где $\| \cdot \|_1$ — норма в пространстве $L_1[0, 2\pi]$. Используя преобразование Абеля в интегральной форме [8, с. 29] и оценку L_1-нормы ядра Дирихле, получаем $I_1 \le c_5 \ln^3 N \| f \|_1$. Отсюда следует утверждение леммы 1. Обозначим

$$\alpha_n = \sum_{k=2}^{n} \sum_{\sqrt{k} < p \le k} \frac{1}{\ln p}, \quad n \ge 2.$$

Лемма 2. *Последовательность* $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$ *возрастает и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n \ln^2 n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Возрастание $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$ следует из теоремы Чебышева [9, с. 69 – 70]. Далее, из определения $\pi(x)$ имеем

$$\sum_{p \le N} \frac{1}{\ln p} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\pi(n) - \pi(n-1)}{\ln n}. \tag{4}$$

Применяя преобразование Абеля и используя асимптотический закон распределения простых чисел [8, с. 78], из (4) получаем

$$\sum_{p \le N} \frac{1}{\ln p} = \int_2^N \frac{\pi(x) - 1}{x \ln^2 x} dx + \frac{\pi(N)}{\ln N} = \frac{N}{\ln^2 N} + O\left(\frac{N}{\ln^3 N}\right).$$

Следовательно,

$$\alpha_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\ln^2 k} + O\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\ln^3 k}\right) = \frac{n^2}{2 \ln^2 n} + o\left(\frac{n^2}{\ln^2 n}\right)$$

и лемма 2 доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть Φ^{-1} — функция, обратная к Φ, тогда $\Phi^{-1}(\alpha_n) > 1$ при всех n, начиная с некоторого номера n_0. Положим

$x_n = 1/\left(\Phi^{-1}(\alpha_n)\right)$ при $n \ge n_0$ и пусть $\{x_n\}_{n=0}^{n_0-1}$ — произвольные числа, удовле воряющие условию $x_{n_0} < x_{n_0-1} < \ldots < x_1 < x_0 = 1$. Выберем Q_n и $l_n \in \mathbb{N}$ та чтобы

$$\frac{n}{Q_n} < \frac{x_{n-1} - x_n}{2}, \quad x_n < \frac{l_n + 1}{Q_n} < \frac{x_n + x_{n-1}}{2}. \qquad ($$

Это возможно, поскольку в силу (5)

$$\frac{Q_n\left(x_n + x_{n-1}\right)}{2} - Q_n x_n = Q_n \frac{\left(x_{n-1} - x_n\right)}{2} > 1.$$

Далее,

$$\frac{l_n + n}{Q_n} < \frac{x_n + x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-1} - x_n}{2} = x_{n-1},$$

поэтому $(l_n + m)/Q_n \in (x_n, x_{n-1})$ $\forall\, m = 1, 2, \ldots, n$.

Построим функцию φ на $I_n = (x_n, x_{n-1}]$. Положим

$$\varphi\left(\frac{l_n + m}{Q_n}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \ln m}, & \text{если } m \text{ — простое число из промежутка } (\sqrt{n}, n], \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Продолжим φ на I_n так, чтобы $\varphi \in C^\infty(I_n)$ и

$$\operatorname*{Var}_{[x_n, x_{n-1}]} \varphi = \sum_{\sqrt{n} < p \le n} \frac{1}{\ln p}, \quad n \ge 2. \qquad ($$

Пусть еще $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \ge x_1$. Тогда $\varphi \in C[0, +\infty) \cap C^\infty[0, +\infty)$

Покажем, что $\operatorname*{Var}_{[x,1]} \varphi \underset{x \to +0}{\sim} \Phi\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Пусть $x \in (x_{n+1}, x_n)$, $n \ge n_0$. Очевидн что

$$\operatorname*{Var}_{[x,1]} \varphi = \operatorname*{Var}_{[x, x_n]} \varphi + \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Var}_{[x_k, x_{k-1}]} \varphi = \operatorname*{Var}_{[x, x_n]} \varphi + \alpha_n.$$

Далее, поскольку $\alpha_n = \Phi(1/x_n)$, $1/x_n < 1/x < 1/x_{n+1}$, то из (6) имеем

$$\operatorname*{Var}_{[x,1]} \varphi \le \operatorname*{Var}_{[x_{n+1}, x_n]} \varphi + \Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{\sqrt{n+1} < p \le n+1} \frac{1}{\ln p} + \Phi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\operatorname*{Var}_{[x,1]} \varphi \ge \alpha_n = \Phi\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right) + \Phi\left(\frac{1}{x_n}\right) - \Phi\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right) \ge \Phi\left(\frac{1}{x}\right) - \sum_{\sqrt{n+1} < p \le n+1} \frac{1}{\ln p}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\operatorname*{Var}_{[x,1]} \varphi}{\Phi(1/x)} - 1 \right| \le \frac{\left(\sum_{\sqrt{n+1} < p \le n+1} (1/\ln p)\right)}{\alpha_n}.$$

Отсюда и из леммы 2 заключаем, что

$$\lim_{x \to +0} \frac{\operatorname*{Var}_{[x,1]} \varphi}{\Phi(1/x)} = 1.$$

Проверим выполнение третьего утверждения теоремы 1. Поскольку при $0 < r < q \le 2$ $M_r \subset M_q$ (см. [3, с. 148]), достаточно рассмотреть случай $1 \le q < 2$.

Предположим, что $\varphi \in M_q[0, +\infty)$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{n} \varphi\left(\frac{l_n + m}{Q_n}\right) e^{i(l_n+m)t} \right|^q dt \le c_q \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{n} e^{i(l_n+m)t} \right|^q dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\sqrt{n} < p \le n} \frac{1}{\ln p} e^{ipt} \right|^q dt \le c_q n^{q-1} (\ln n)^q.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем

$$c_{1,q}\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln^3 n}\right)^q - c_{2,q} n^{q/4} \le c_q n^{q-1} (\ln n)^q.$$

Поскольку $q < 2$, последнее неравенство не выполняется при достаточно больших n. Таким образом, $\varphi \notin M_q[0, +\infty)$ и теорема 1 полностью доказана.

1. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.
2. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Докл. АН России. – 1994. – **335**, № 6. – С. 697 – 699.
3. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 4. – С. 145 – 160.
4. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378 – 1409.
5. *Волчков Вит. В.* О мультипликаторах степенных рядов в пространствах Харди // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 585 – 587.
6. *Волчков В. В.* Мультипликаторы степенных рядов в пространствах Харди // Междунар. конф. по теории приближения функций: Тезисы. – Калуга, 1996. – С. 59 – 60.
7. *Vaughan R. C.* The L^1 mean of exponential sums over prives // Bull. London Math. Soc. – 1988. – **20**, № 2. – P. 121 – 123.
8. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
9. *Трост Э.* Простые числа. – М.: Физматгиз, 1959. – 135 с.

Получено 12.02.99