УДК 517.9
В. Г. Самойленко, Ю. І. Каплун (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

РІВНЯННЯ $g(t, x) = 0$: ІСНУВАННЯ ТА ПРОДОВЖУВАНІСТЬ ЙОГО РОЗВ'ЯЗКІВ

For an equation $g(t, x) = 0$, we consider the problem of continuability and existence of solutions on their maximal definition interval.

Розглядаються питання продовжуваності та існування розв'язків на максимальному інтервалі їх визначення для рівняння $g(t, x) = 0$.

1. Вступ. В теорії диференціальних рівнянь важливе значення мають теореми про існування та єдиність розв'язків. Більшість цих теорем лише стверджують існування та єдиність розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, записаних у нормальному вигляді. Інші ж теореми є конструктивними в тому сенсі, що поруч з доведенням існування та єдиності розв'язків даних рівнянь в цих теоремах вказується алгоритм побудови їх розв'язків.

На сьогодні відомо багато теорем (для різноманітних типів диференціальних рівнянь), що стверджують існування розв'язку в деякому околі, тобто локально. У той же час питанням продовжуваності розв'язків, існування та єдиності розв'язків на максимальному інтервалі їх визначеності приділялось значно менше уваги (див., наприклад, [1, с. 64; 2, с. 22]). Зокрема, одним з загальних і фундаментальних результатів є доведена в [3, с. 24] для диференціальних рівнянь у нормальному вигляді теорема про продовжуваність розв'язку на максимальний інтервал його визначеності (ω_-, ω_+), де числа ω_-, ω_+ можуть бути скінченними або нескінченними. При цьому також показано, що якщо розв'язок $x(t)$ існує і визначений на деякому інтервалі, то цей розв'язок може бути продовжений на максимальний інтервал існування (ω_-, ω_+) і даний розв'язок при $t \to\to \omega_-$ (відповідно при $t \to \omega_+$) прямує до межі деякої області, в якій визначена і неперервна права частина розглядуваного рівняння. Якщо, крім цього, права частина даного рівняння задовольняє умову Ліпшиця в будь-якій обмеженій області з розширеного фазового простору, то кожний розв'язок при зростанні t (відповідно при спаданні t) або необмежено продовжується до $+\infty$ (відповідно до $-\infty$), або має вертикальну асимптоту $t = t_0$ для деякого скінченного значення t_0 [1, с. 67].

Іншими словами, якщо дане диференціальне рівняння має єдиний розв'язок $x(t)$, визначений на деякому (максимальному) інтервалі (ω_-, ω_+), то для випадку, коли ω_- — скінченне число (відповідно ω_+ — скінченне число) при $t \to \omega_-$ (відповідно при $t \to \omega_+$) модуль розв'язку $|x(t)|$ прямує до нескінченності. Якщо ж $\omega_- = -\infty$ (відповідно $\omega_+ = +\infty$), то розв'язок $x(t)$, визначений для будь-якого від'ємного (додатного) як завгодно великого (за модулем) значення t, може бути продовжений нескінченно вліво (відповідно нескінченно вправо).

Виявляється, що подібна ситуація може мати місце і для рівнянь вигляду

$$g(t, x) = 0. \tag{1}$$

Рівняння (1) має важливе значення, оскільки такі рівняння виникають в різних галузях математики, зокрема рівняння такого вигляду розглядаються як породжуючі рівняння в теорії сингулярно збурених диференціальних рівнянь [4], які використовуються для опису релаксаційних коливань. Це ж рівняння можна також розглядати як функціональне рівняння [5, с. 698].

У математичному аналізі співвідношення (1) відоме як рівняння для визначення деякої функції, що задана в неявному вигляді. При аналізі рівняння (1) можна скористатись класичною теоремою про неявну функцію, яка стверджує існування неперервно диференційовного розв'язку рівняння (1) у деякому околі розглядуваної точки (t_0, x_0) такої, що $g(t_0, x_0) = 0$.

Якщо із співвідношення (1) потрібно визначити деяку нескінченно диференційовну функцію від t, то можна скористатись результатами роботи [6], де розв'язана задача про побудову розв'язку рівняння (1) у вигляді степеневих рядів при умові, що функція $g(t, x)$ є голоморфною відносно t, x у деякій області.

Однією з перших робіт, де розглядались питання про продовжуваність розв'язків рівняння (1), є робота Гурса [7, с. 81]. Проте відповідно до даного в [7] означення розв'язку отриманий інтервал існування не є максимальним.

У роботі В. І. Зубова [8] вивчалась задача про існування розв'язку рівняння (1) з параметром для багатовимірного випадку. За допомогою диференціювання співвідношення (1) за функціональними змінними t, x та дослідження відповідних диференціальних та інтегральних рівнянь було знайдено в явному вигляді нелокальний (на деякому інтервалі) розв'язок рівняння (1). Проте функція $g(t, x, \lambda)$ при цьому мала бути двічі неперервно диференційовною за змінними t, x.

У [9] було запропоновано дещо інший підхід до дослідження розмірів інтервалу існування розв'язку рівняння (1), а саме, дослідження інтервалу існування розв'язку рівняння (1) зводиться до дослідження існування розв'язку деякого диференціального рівняння.

Зауважимо в цілому, що хоча в [7 – 9] розглядалась задача про нелокальне існування розв'язку співвідношення (1), проте в них не було досліджено питання про максимальний інтервал існування розв'язків (1).

Не менш цікавою є задача про існування неявної функції в дещо інших просторах, а саме, у випадку, коли функція $g: \mathcal{T} \times X \to Y$, де $\mathcal{T}$, X, Y є банаховими просторами [10, с. 155; 11, с. 671] або простори X, Y є банаховими, а простір $\mathcal{T}$ — топологічним [12, с. 161]. Зокрема, в [10, с. 155 – 202] доведено узагальнену теорему про неявну функцію, яка при умові неіснування оберненого відображення для $g'_x(t_0, x_0)$ стверджує існування неперервного в деякому околі точки (t_0, x_0) розв'язку рівняння (1).

Нещодавно з'явились праці [13, 14], в яких за допомогою дещо іншого, ніж в [10], підходу досліджувалась задача про існування розв'язку (1) в околі нерегулярної точки, тобто в околі такої точки (t_0, x_0), що $g(t_0, x_0) = 0$ і в цьому околі не існує неперервного оберненого оператора для оператора $g'_x(t_0, x_0)$. Проте ці теореми також є локальними.

В [15] доведено глобальну теорему про існування розв'язку рівняння (1), але для випадку, коли $g: \mathcal{T} \times X \to Y$, функція $g(t, x)$ є голоморфною функцією своїх змінних, а банахові простори $\mathcal{T}$, X, Y — комплексні. При цьому можна також згадати низку статей, в яких проблема про існування неявної функції зводиться до задачі про існування відповідних обернених відображень, але обмежений обсяг даної статті не дозволяє це зробити.

Як теорема про неявну функцію, так і згадані вище її узагальнення не дають можливості стверджувати глобальне існування розв'язку рівняння (1) та продовжуваність тих розв'язків, що існують внаслідок умов теорем для випадку лише неперервної диференційовності функції $g(t, x)$. Саме ці питання і розглядаються в даній статті.

2. Існування розв'язків. Нехай $\mathcal{T}$ і X — відкриті лінійно-зв'язні непорожні множини з $\mathbf{R}^1$, множина $D = \mathcal{T} \times X$ — їх декартів добуток, на якому визначено деяку неперервну функцію $g = g(t, x)$, яка майже скрізь (за мірою Лебега) в області D має неперервні похідні першого порядку відносно t і x, тобто $g(t, x) \in C^{(1,1)}_{(t,x)}(D)$ майже скрізь.

У подальшому суттєво використовується згадана вище теорема про неявну функцію, що формулюється таким чином [16, с. 72; 17, с. 353].

Теорема 1 (про неявну функцію). *Нехай U — відкрита множина з $\mathbf{R}^2$, точка $(t_0, x_0) \in U$, функція $g : U \to \mathbf{R}^1$. Припустимо, що виконуються умови:*

1) $g(t_0, x_0) = 0$;

2) $g(t, x) \in C^{(1,1)}_{(t,x)}(U, \mathbf{R}^1)$;

3) $g'_x(t_0, x_0) \neq 0$.

Тоді існує окіл $B(t_0) \subset \mathbf{R}^1$ точки t_0 та існує єдина неперервно диференційовна функція $x = h(t)$, визначена в даному околі, така, що $h(t_0) = x_0$ та $g(t, h(t)) = 0$ для всіх $t \in B(t_0)$, і похідну функції $h(t)$ можна обчислити згідно з формулами

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t, h(t))\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t, h(t)), \qquad t \in B(t_0). \tag{2}$$

Теорема про неявну функцію дає достатні умови існування неперервно диференційовного розв'язку рівняння (1) в околі деякої точки (t_0, x_0). Якщо в даній точці (t_0, x_0) умова 2 або 3 теореми про неявну функцію не виконується, то питання про існування розв'язку рівняння (1) в околі точки (t_0, x_0) є відкритим.

Введемо поняття критичної точки. Розглянемо множину $\mathcal{L} \subset \overline{D}$, для точок (t, x) якої виконується рівність

$$\mathcal{L} = \left\{(t, x) \in \overline{D} \colon g(t, x) = 0\right\}. \tag{3}$$

Тут $\overline{D}$ — замикання множини D в сферичній метриці [18, с. 13].

Очевидно, що якщо $\mathcal{L} = \varnothing$, то рівняння (1) не має розв'язків в області D. Тому надалі вважатимемо, що $\mathcal{L} \neq \varnothing$.

Означення 1. *Критичною точкою рівняння* (1) *називається точка* $(t_0, x_0) \in \mathcal{L}$, *будь-який проколотий окіл якої містить точки з множини* $\mathcal{L}$ *і в якій* (*точці* (t_0, x_0)) *порушується умова* 2 *або* 3 *теореми про неявну функцію.*

Іншими словами, критична точка рівняння (1) — це така точка $(t_0, x_0) \in \mathcal{L}$, що або не існує околу U точки (t_0, x_0) такого, що функція $g(t, x)$ неперервно диференційовна в кожній точці (t, x) з околу U, або $g(t, x)$ неперервно диференційовна в деякому околі точки (t_0, x_0), але її частинна похідна $g'_x(t, x)$ в точці (t_0, x_0) дорівнює нулеві, тобто $g'_x(t_0, x_0) = 0$. При цьому будь-який проколотий окіл такої точки (t_0, x_0) містить елементи з множини $\mathcal{L}$.

Звідси, як наслідок, випливає таке твердження: якщо функція $g(t, x)$ не має критичних точок у деякій обмеженій області з $\mathbf{R}^2$, то дана функція є неперервно диференційовною функцією в цій області.

В подальшому множину критичних точок рівняння (1) позначатимемо за допомогою $\mathcal{N}$. Очевидно, що множина $\mathcal{N}$ містить точки, в яких: або існує неперервна частинна похідна $g'_x(t, x)$ і ця похідна в даній точці дорівнює нулеві; або частинна похідна $g'_x(t, x)$ існує, але ця похідна в даній точці має розрив чи дорівнює нескінченності; або ж у даній точці частинна похідна функції $g(t, x)$ відносно x не існує взагалі. Очевидно, що, крім вказаних точок, множина $\mathcal{N}$ містить точки, що мають таку властивість: частинна похідна $g'_t(t, x)$ в даній точці існує, але ця похідна має розрив чи дорівнює нескінченності, або ж в даній точці не існує частинної похідної функції $g(t, x)$ відносно t.

У загальному випадку множина $\mathcal{N}$ може містити зліченну або ж незліченну множину точок, зокрема, може мати потужність континуум.

Зауважимо також, що для випадку $X=\mathbf{R}^1$ множина $\mathcal{N}$ може мати критичні точки вигляду $t=t^*$, $x=\infty$.

***Приклад* 1.** Розглянемо рівняння вигляду (1) для випадку, коли $g(t,x) = t^2+x^2-1$, $(t,x)\in\mathbf{R}^2$. Маємо $g'_x(t,x)=2x$. Очевидно, що критичними точками в цьому випадку є точки $\{(-1,0),(1,0)\}$.

***Приклад* 2.** Розглянемо рівняння вигляду (1) для випадку, коли $g(t,x) = tx-1$, $(t,x)\in\mathbf{R}^2$. Тоді $g'_x(t,x)=t$. Згідно з означенням критичної точки множина $\mathcal{N}=\{(0,-\infty),(0,+\infty),(+\infty,0),(-\infty,0)\}$.

***Приклад* 3.** Розглянемо рівняння вигляду (1) для випадку, коли $g(t,x) = tx-t\sin(1/t)$, коли $t\neq 0$ та $g(0,x)=0$. Тут $t\in\mathbf{R}^1$, $x\in\mathbf{R}^1$. Тоді $g'_x(t,x)=t$. Згідно з означенням критичної точки множина $\mathcal{N}$ містить множину $\left\{(t,x)\in\mathbf{R}^2: t=0,\ x\in\mathbf{R}^1\right\}$.

Розглянемо питання про опис розв'язків рівняння (1).

Означення 2. *Неперервна функція* $x(t)$, *визначена на деякому інтервалі* $(\alpha,\beta)\subset\mathcal{T}$, *називається розв'язком рівняння* (1), *якщо виконуються умови*:

1°) *при кожному* $t\in(\alpha,\beta)$ *точка* $(t,x(t))$ *належить області визначення функції* $g(t,x)$;

2°) *для всіх* $t\in(\alpha,\beta)$ *справедлива тотожність* $g(t,x(t))\equiv 0$;

3°) *множина* $\{(t,x(t)): t\in(\alpha,\beta)\}$ *не містить критичних точок рівняння* (1).

Якщо точка (t_0,x_0), в якій порушується умова 2 або 3 теореми про неявну функцію, є ізольованою, тобто існує деякий окіл $U(t_0,x_0)$, для якого виконується умова $\dot{U}\cap\mathcal{L}=\varnothing$, то таку точку називатимемо *ізольованим розв'язком рівняння* (1).

Якщо множина критичних точок рівняння (1) є порожньою, але $\mathcal{L}\cap D\neq\varnothing$, то на підставі теореми 1 про неявну функцію можна стверджувати, що в деякому околі довільної (даної) точки $(t_0,x_0)\in\mathcal{L}\cap D$, що не є ізольованим розв'язком, єдиним чином визначена (на певному проміжку (α,β)) деяка неперервно диференційовна функція $x=h(t)$, що має такі властивості: $h(t_0)=x_0$, $(t,h(t))\in D$ і $g(t,h(t))=0$ для всіх $t\in(\alpha,\beta)$. Тобто справедливе таке твердження.

Лема 1. *Якщо рівняння* (1) *в області* D *не має критичних точок та ізольованих розв'язків, то для довільних початкових умов* $(t_0,x_0)\in\mathcal{L}\cap D$ *рівняння* (1) *має єдиний неперервно диференційовний розв'язок, що визначений в деякому околі* $U\subset D$ *точки* (t_0,x_0).

Припустимо, що множина критичних точок рівняння (1) складається з ізольованих точок. Це, зокрема, означає, що множина $\mathcal{N}$ не містить точок згущення. Очевидно, що в цьому випадку множина $\mathcal{N}$ не більш ніж зліченна. Множину $\mathcal{N}$ можна подати таким чином: $\mathcal{N}=\left\{\left(\tau_k,x_{k_i}\right): i\in B_k,\ k\in B\right\}$, де множини індексів B, B_k — деякі (скінченні або нескінченні) підмножини множини цілих чисел $\mathbf{Z}$. Точки $\left(\tau_k,x_{k_i}\right)$, $i\in B_k$, $k\in B$, занумеровано таким чином, що якщо $n,m\in B$ і $\left(\tau_n,x_{n_i}\right)$, $\left(\tau_m,x_{m_j}\right)$ — деякі критичні точки, то їх координати задовольняють нерівності $\tau_n<\tau_m$, $x_{n_i}<x_{n_j}$, якщо тільки $n<m$ та $i<j$, тобто критичні точки впорядковані за індексами.

Оскільки, згідно з припущенням, множина $\mathcal{N}$ складається з ізольованих точок, то для кожної критичної точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{N} \cap D$ знайдеться проколотий окіл $\dot{U}(t_0, x_0)$, що містить однозв'язну область $D_1 \subset \dot{U}(t_0, x_0)$, в якій функція $g(t, x)$ є неперервно диференційовною.

Розглянемо множину $G = D \setminus \bigcup_{k \in B} \{(t, x) \colon t = \tau_k,\ x \in X\}$. Очевидно, що G — відкрита множина. Якщо $\mathcal{T}$ — необмежена область, то множина G відносно змінної t має одну з таких властивостей: множина G або необмежена зверху і обмежена знизу відносно t, або обмежена зверху і необмежена знизу (за змінною t), або необмежена ні зверху, ні знизу (за змінною t).

Нехай

$$G_k = \{(t, x) \colon \tau_k < t < \tau_{k+1},\ x \in X\}, \quad k \in B,$$

тобто G_k — смуги, межами яких є прямі $t = \tau_k$ та $t = \tau_{k+1}$. Зауважимо, що множина $\{\tau_k,\ k \in B\}$ при відповідному виборі $\mathcal{T}$ може містити точки $\{-\infty, +\infty\}$.

Очевидно, що при кожному $k \in B$ множина G_k є лінійно-зв'язною і відкритою множиною, тобто є областю. Легко бачити, що $G = \bigcup_{k \in B} G_k$, звідки випливає, що область G — багатозв'язна, компонентами зв'язності якої є множини G_k, $k \in B$.

Очевидно, що $(G_k \cap \mathcal{N}) \subset (G \cap \mathcal{N}) = (D \setminus \mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \varnothing$ для всіх $k \in B$, тобто при кожному $k \in B$ область G_k не містить критичних точок рівняння (1). З іншого боку, множину $\{\tau_k, k \in B\}$ можна подати як проекцію множини критичних точок $\mathcal{N}$ на вісь t, тобто $\mathrm{Pr}_{Ot} \mathcal{N} = \{\tau_k, k \in B\}$.

Позначимо $\mathcal{T}_k = \{t \in \mathcal{T} \colon \tau_k < t < \tau_{k+1}\}$. Очевидно, що $\mathcal{T}_k = \mathrm{Pr}_{Ot} G_k$, а множину $\mathcal{T}$ можна зобразити таким чином:

$$\mathcal{T} = \left(\bigcup_{k \in B} \mathcal{T}_k\right) \cup \left(\bigcup_{k \in B} \tau_k\right) \setminus \partial\mathcal{T} = \bigcup_{k \in B} \overline{\mathcal{T}}_k \setminus \partial\mathcal{T},$$

де $\overline{\mathcal{T}}_k$ — замикання множини $\mathcal{T}_k$, $k \in B$, в сферичній метриці.

Розглянемо задачу про існування розв'язків рівняння (1), що належать множині $G_{k_0} = \mathcal{T}_{k_0} \times X$, та їх продовжуваність, де k_0 — деяке (довільне) ціле число, $k_0 \in B$.

Нехай t_0 — деяка (довільна) точка з множини $\mathcal{T}_{k_0}$, тобто $t_0 \in (\tau_{k_0}, \tau_{k_0+1})$. Припустимо, що для даного t_0 рівняння

$$g(t_0, x) = 0, \tag{4}$$

як рівняння відносно x, має не більш ніж зліченну кількість розв'язків.

Множина $\mathcal{L}(t_0) = \{(t_0, x_\alpha),\ \alpha \in B_{t_0}\}$ є підмножиною множини $\mathcal{L}$. Надалі вважатимемо, що $X = \mathbf{R}^1$. Справедлива така теорема.

Теорема 2. (про існування і єдиність розв'язку рівняння). *Нехай $g(t_0, x_0) = 0$, точка (t_0, x_0) не є критичною для рівняння* (1); *функція $g(t, x)$ є неперервно диференційовною в області $D = \mathcal{T} \times \mathbf{R}^1$ майже скрізь за мірою Лебега, не має в області D ізольованих розв'язків, а множина критичних точок рівняння* (1) *в області $\overline{D}$ складається з ізольованих точок.*

Тоді існує єдиний розв'язок $x = x(t)$ рівняння (1), *визначений на інтервалі $\mathcal{T}_{k_0}$, де $\mathcal{T}_{k_0} \ni t_0$ такий, що $x(t_0) = x_0$. Крім цього, функція $x(t)$ є неперервно диференційовною для всіх $t \in \mathcal{T}_{k_0}$ і її похідну можна обчислити за допомогою формули вигляду* (2).

Доведення. Оскільки в точці (t_0, x_0) виконуються всі умови теореми 1 про неявну функцію, то існує окіл $B_{r_0}(t_0) \subset \mathcal{T}_{k_0}$ точки t_0, в якому визначена єдина неперервно диференційовна функція $h = h(t)$ така, що виконуються умови: $h(t_0) = x_0$ та $g(t, h(t)) = 0$ для всіх $t \in B_{r_0}(t_0)$.

Якщо $B_{r_0}(t_0) = \mathcal{T}_{k_0}$, то розв'язок $x = h(t)$ визначений для всіх t з інтервалу $\mathcal{T}_{k_0}$, тобто теорема 2 має місце.

Покажемо, що якщо $B_{r_0}(t_0) \neq \mathcal{T}_{k_0}$, тобто $\mathcal{T}_{k_0} \setminus B_{r_0}(t_0) \neq \varnothing$, то розв'язок $x = h(t)$ можна продовжити на весь інтервал $\mathcal{T}_{k_0}$.

Вивчимо спочатку питання про продовження розв'язку $x = h(t)$ при $t > t_0$. Нехай $t_1 = t_0 + r_0 < \tau_{k_0+1}$. Розглянемо

$$\lim_{t \to t_1 - 0} h(t). \tag{5}$$

Оскільки смуга G_{k_0} не містить критичних точок рівняння (1), а функція $g(t,x)$ є неперервно диференційовною в області G_{k_0}, то похідну функції $h(t)$ для всіх $t \in B_{r_0}(t_0)$ можна знайти за допомогою формули

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{g'_t(t, h(t))}{g'_x(t, h(t))}, \tag{6}$$

причому ця похідна є неперервною відносно t для всіх $t \in B_{r_0}(t_0)$.

Якщо границя в (5) дорівнює нескінченності, то згідно з означенням 1 точка (t_1, ∞) є критичною точкою для рівняння (1), тобто маємо суперечність.

Розглянемо випадок, коли границя в (5) не існує. Тоді знайдуться послідовності $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, такі, що $\eta_n \to t_1 - 0$, $\zeta_n \to t_1 - 0$, а значення функції $h(\eta_n) \to h_1$, $h(\zeta_n) \to h_2$, де h_1, h_2 — деякі різні дійсні числа. Очевидно, що точки $(t_1, h^*) \in G_{k_0}$, де h^* — довільне дійсне число таке, що $h_1 \leq h^* \leq h_2$, є критичними точками для рівняння (1). Це випливає з таких міркувань. Оскільки функція $g(t,x)$ є неперервною в G_{k_0} і точки $(t_1, x) \in G_{k_0}$ для всіх $x \in [h_1, h_2]$, то з умови $g(\eta_n, h(\eta_n)) = 0$ випливає, що $\lim_{n \to \infty} g(\eta_n, h(\eta_n)) = g(t_1, h_1) = 0$. Аналогічно $g(t_1, x) = 0$ для всіх $x \in (h_1, h_2]$. Тоді звідси маємо $g'_x(t_1, x) = 0$ для всіх $x \in [h_1, h_2]$, що суперечить умові теореми про те, що рівняння (1) не має критичних точок в області G_{k_0}.

Нарешті, для випадку, коли в (5) існує скінченна границя, покажемо, що функцію $h(t)$ можна продовжити (зі збереженням гладкості в точці t_1) на деякий інтервал $B_{r_1}(t_1) \subset \mathcal{T}_{k_0}$. Дійсно, доозначимо функцію $h(t)$ в точці $t = t_1$, поклавши $h(t_1) = h^*$, де $h^* = \lim_{t \to t_1 - 0} h(t)$. Згідно з (6) і умовою $t_1 \in \mathcal{T}_{k_0}$ функція $h(t)$ має ліву похідну в точці t_1. Крім цього, внаслідок неперервності функції $g(t,x)$ в області G_{k_0} можна записати

$$\lim_{t \to t_1 - 0} g(t, x) = g(t_1, h(t_1)) = 0.$$

Таким чином, в точці $(t_1, h(t_1)) \in G_{k_0}$ виконуються всі умови теореми 1 про неявну функцію, а отже, існує єдина неперервно диференційовна функція $h_1(t)$, визначена в деякому околі $B_{r_1}(t_1)$ така, що мають місце рівності $h_1(t_1) = h_1(t)$ і $g(t, h_1(t)) = 0$ для всіх $t \in B_{r_1}(t_1)$. Внаслідок властивості єдиності, що випливає з теореми 1 про неявну функцію, для функцій $h = h(t)$ та $h_1 = h_1(t)$ виконується рівність $h(t) = h_1(t)$ для всіх $t \in B_{r_0}(t_0) \cap B_{r_1}(t_1)$.

Нехай $x(t) = h(t)$ для $t \in B_{r_0}(t_0)$ і $x(t) = h_1(t)$ для $t \in B_{r_1}(t_1)$. Тоді функція $x(t)$ визначена на множині $B_{r_0}(t_0) \cup B_{r_1}(t_1)$, на якій ця функція є неперервно диференційовною відносно t для всіх $t \in B_{r_0}(t_0) \cup B_{r_1}(t_1)$. Неперервність та неперервна диференційовність функції $x(t)$ випливає з теореми 1. Очевидно, що функція $x(t)$ задовольняє рівняння (1) та умову $x(t_0) = x_0$.

Якщо $r_1 + t_1 = \tau_{k_0+1}$, то доведення теореми завершено. У противному разі викладені вище міркування потрібно повторити ще раз, взявши за початкову точку $\left(t_2, \lim_{t \to t_2 - 0} h_1(t)\right)$, де $t_2 = t_1 + r_1$, причому дана границя необхідно існує.

Припустимо, що шуканий розв'язок $x^*(t)$ рівняння (1) побудовано на деякому інтервалі $\left(t_0 - r_0, t^*\right)$, де $t^* < \tau_{k_0+1}$, і цей розв'язок не можна продовжити при $t \geq t^*$. Розглянемо границю

$$\lim_{t \to t^* - 0} x^*(t). \tag{7}$$

Для випадків, коли границя в (7) не існує або дорівнює нескінченності, за допомогою міркувань, аналогічних попереднім, приходимо до суперечності. Якщо в (7) існує скінченна границя, то за допомогою міркувань, викладених вище, розв'язок $x^*(t)$ зі збереженням гладкості можна продовжити в точку $t = t^*$, а потім на деякий інтервал $B_{r^*}(t^*) \subset \mathcal{T}_{k_0}$. Таким чином, функція $x^*(t)$ може бути продовжена для $t \geq t^*$, що суперечить зробленому припущенню. Отже, рівняння (1) має розв'язок, визначений для всіх $t \in \left(t_0 - r_0, \tau_{k_0+1}\right)$, причому цей розв'язок єдиний.

Аналогічно розв'язок $h(t)$ можна продовжити при $t < t_0$. Таким чином, розв'язок рівняння (1) можна продовжити на всю множину $\mathcal{T}_{k_0}$ і цей розв'язок єдиний. Теорему доведено.

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *і нехай* $\varphi(t)$ *та* $\psi(t)$ — *розв'язки рівняння* (1), *визначені на* $\mathcal{T}_{k_0}$, *що задовольняють початкові умови* $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\psi(t_0) = \psi_0$, *причому* $\varphi_0 \neq \psi_0$. *Тоді* $\varphi(t) \neq \psi(t)$ *для всіх* $t \in \mathcal{T}_{k_0}$.

Доведення леми випливає з теореми 2.

Лема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2, $x = x(t)$ — *розв'язок рівняння* (1), *визначений на множині* $\mathcal{T}_{k_0} = \left(\tau_{k_0}, \tau_{k_0+1}\right)$, *де значення* τ_{k_0+1} *є скінченним. Тоді мають місце такі властивості*:

1) *якщо існує* $\lim_{t \to \tau_{k_0+1-0}} x(t) = x^* \neq \infty$, *точка* $\left(\tau_{k_0+1}, x^*\right)$ *не є критичною для рівняння* (1) *і* $\tau_{k_0+1} \in \mathcal{T}$, *то функція* $x(t)$ *визначена в точці* τ_{k_0+1} *і в даній точці функція* $x(t)$ *є неперервно диференційовною*;

2) *якщо існує* $\lim_{t \to \tau_{k_0+1-0}} x(t) = \infty$, *то точка* $\left(\tau_{k_0+1}, \infty\right)$ *є критичною для рівняння* (1), *а функція* $x(t)$ *має вертикальну асимптоту* $t = \tau_{k_0+1}$.

З доведення теореми 2 випливає також наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді якщо при деякому* $t_* \in \mathcal{T}_{k_0}$ *рівняння* $g(t_*, x) = 0$, *як рівняння відносно* x, *має рівно* $n \geq 1$ *розв'язків, то рівняння* (1) *також має рівно* n *розв'язків, кожен з яких визначений на всьому інтервалі* $\mathcal{T}_{k_0}$ *і є на даному інтервалі неперервно диференційовною за змінною* t *функцією, похідну якої можна обчислити за допомогою формули* (2).

3. Продовжуваність розв'язків. Розглянемо задачу про продовжуваність розв'язків рівняння $g(t,x)=0$ на максимальний інтервал та питання про визначення таких інтервалів.

Означення 3. *Будемо говорити, що розв'язок* $x=x(t)$ *рівняння* (1) *визначено на максимальному інтервалі* $(\alpha_1,\beta_1)\subset\mathcal{T}$, *якщо не існує розв'язку* $y=y(t)$ *рівняння* (1) *з інтервалом визначення* $(\alpha_2,\beta_2)\subset\mathcal{T}$ *такого, що* $x(t)=$ $=y(t)$ *для всіх* $t\in(\alpha_1,\beta_1)$ *і* $(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha_2,\beta_2)$.

З доведення теореми 2 випливає справедливість таких тверджень.

Теорема 4 (про продовжуваність розв'язку рівняння $g(t,x)=0$ на максимальний інтервал). *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді існує неперервно диференційовний розв'язок рівняння* (1) $x=x(t)$ *і цей розв'язок може бути продовжений на максимальний інтервал.*

Лема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Якщо* $x(t)$ — *деякий розв'язок рівняння* (1), *визначений на деякому максимальному інтервалі* $J=(\alpha,\beta)$, $-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty$, *то точки* $(\alpha,x(\alpha))$, $(\beta,x(\beta))$, $x(\alpha)=\lim_{t\to\alpha+0}x(t)$, $x(\beta)=$ $=\lim_{t\to\beta-0}x(t)$, *є критичними точками для рівняння* (1).

Теорема 5 (про існування розв'язку на максимальному інтервалі). *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді існує єдиний розв'язок* $x=x(t)$ *рівняння* (1), *визначений на деякому максимальному інтервалі* (ω_-,ω_+) *такий, що* $x(t_0)=$ $=x_0$. *Крім цього, функція* $x(t)$ *є неперервно диференційовною для всіх* $t\in(\omega_-,$ $\omega_+)$ *і її похідну можна знайти згідно з формулою* (2).

Використовуючи теореми 2, 4 і 5, можна сформулювати такий алгоритм пошуку максимального інтервалу для розв'язку рівняння (1). Нехай точка $(t_0,x_0)\in D$ задовольняє умови теореми 2. Тоді згідно з теоремою 2 існує єдиний розв'язок $x=x(t)$ рівняння (1), визначений на інтервалі $\mathcal{T}_{k_0}=\left(\tau_{k_0},\tau_{k_0+1}\right)$, де $\mathcal{T}_{k_0}\ni t_0$ такий, що $x(t_0)=x_0$. Якщо $\tau_{k_0}\ne-\infty$ і точка $(\tau_{k_0},x(\tau_{k_0}))$, де $x(\tau_{k_0})=\lim_{t\to\tau_{k_0}+0}x(t)$, не є критичною, то розв'язок $x(t)$ можна продовжити при $t<t_0$ на сусідній інтервал $\mathcal{T}_{k_0-1}$, причому функція $x(t)$ в точці τ_{k_0} буде неперервно диференційовною.

Аналогічно, якщо $\tau_{k_0+1}\ne+\infty$ і точка $(\tau_{k_0+1},x(\tau_{k_0+1}))$, де $x(\tau_{k_0+1})=$ $=\lim_{t\to\tau_{k_0+1}-0}x(t)$, не є критичною, то розв'язок $x(t)$ можна продовжити при $t>t_0$ на інтервал $\mathcal{T}_{k_0+1}$, причому функція $x(t)$ в точці τ_{k_0+1} буде неперервно диференційовною.

Не більш ніж за зліченну кількість кроків таким чином можна визначити максимальний інтервал існування розв'язку рівняння (1).

***Приклад* 4.** Нехай функція $g(t,x)$ має вигляд [16, с. 72]

$$g(t,x)=t+\varepsilon-\varepsilon e^x, \tag{8}$$

де $\varepsilon>0$, область $D=\mathbf{R}^2$. Множина критичних точок для функції $g(t,x)$ складається з двох точок $(-\varepsilon,-\infty)$, $(+\infty,+\infty)$.

Для точки $t_0=0$, $x_0=0$ виконуються всі умови теореми 2. Розв'язок рівняння (1) з функцією (8) має вигляд $x(t)=\ln(1+t/\varepsilon)$ і визначений на інтервалі $(-\varepsilon,+\infty)$, причому функція $x(t)$ є неперервно диференційовною для всіх t і задовольняє початкову умову $x(0)=0$.

Таким чином, критичні точки рівняння (1) для функції (8) визначають максимальний інтервал існування розв'язку рівнянь (1), (8).

Приклад 5. Нехай функція $g(t, x)$ має вигляд $g(t, x) = (t^2 + x^2 - 1) \times \times (t^2 + x^2 - 4)$, де область $D = \mathbf{R}^2$. Множина критичних точок для функції $g(t, x)$ складається з чотирьох точок: $(-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0)$.

Множина $\mathcal{T} = \mathbf{R}^2$ проекціями критичних точок на вісь Ot розбивається на п'ять інтервалів: $(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, +\infty)$, на яких рівняння (1) або ж не має розв'язків або ж має два чи чотири розв'язки, які визначені на відповідних максимальних інтервалах і які можна записати таким чином:

$$x_1(t) = \sqrt{4 - t^2}, \quad t \in (-2, 2), \qquad x_2(t) = -\sqrt{4 - t^2}, \quad t \in (-2, 2),$$

$$x_3(t) = \sqrt{1 - t^2}, \quad t \in (-1, 1), \qquad x_4(t) = -\sqrt{1 - t^2}, \quad t \in (-1, 1).$$

Теорема 6. *Припустимо, що рівняння* (1) *не має критичних точок на множині* $\mathcal{T} \times \overline{\mathbf{R}}^1$. *Якщо знайдеться точка* $(t_0, x_0) \in D$ *така, що* $g(t_0, x_0) = 0$ *і* (t_0, x_0) *не є ізольованим розв'язком рівняння* (1), *то тоді існує єдиний неперервно диференційовний розв'язок* $x = x(t)$ *рівняння* (1), *визначений на всій множині* $\mathcal{T}$ *такий, що* $x(t_0) = x_0$.

4. Кусково-гладкі (неперервні) розв'язки. Нехай точка (τ^*, x^*), $x^* \in \mathbf{R}^1$, є ізольованою критичною точкою для рівняння (1). Тоді для будь-якого, як завгодно малого, проколотого околу $\dot{U}(\tau^*, x^*)$ знайдеться некритична точка $(\bar{t}, \bar{x})$ з цього околу така, що $g(\bar{t}, \bar{x}) = 0$. Оскільки в точці $(\bar{t}, \bar{x})$ виконуються умови теореми 4 про продовжуваність розв'язку рівняння $g(t, x) = 0$ на максимальний інтервал, то існує функція $x = x(t)$, що є розв'язком рівняння (1), який визначено на деякому максимальному інтервалі (a, b), де $a \le \tau^* \le b$, $b - a > 0$, причому виконується умова $x(\bar{t}) = \bar{x}$. Більше того, знайдеться послідовність точок $\left\{(t_k, x_k) \in \dot{U}(\tau^*, x^*) : k \ge 1\right\}$ така, що $g(t_k, x_k) = 0$ і $(t_k, x_k) \to (\tau^*, x^*)$ при $k \to \infty$. Крім цього, послідовність $\{t_k, \ k \ge 1\}$ є монотонно зростаючою або спадною.

Нехай для визначеності послідовність $\{t_k : k \ge 1\}$ зростає. Тоді можна вважати, що $\bar{t} < t_k < \tau^*$ для всіх $k \ge 1$. Для кожної точки (t_k, x_k) виконуються умови теореми 4, на підставі якої можна стверджувати про існування (скінченної чи нескінченної) множини неперервно диференційовних функцій $A_1 = \{x_k(t) : t \in (a_k, \tau^*), \ k \in N_1 \subset \mathbf{Z}\}$, $N_1 \ne \varnothing$, таких що:

1) $a_k \le \tau_1 < \tau^*$ для деякого числа τ_1 та для всіх $k \ge 1$;

2) функції $x_k(t)$ є розв'язками рівняння (1), для яких виконується умова $\lim_{t \to \tau^* - 0} x_k(t) = x^*$.

Що стосується послідовності точок $\{(\tau_k, y_k), \ k \ge 1\}$ такої, що $\tau_k > \tau^*$, $k \ge 1$, $g(\tau_k, y_k) = 0$ і $(\tau_k, y_k) \to (\tau^*, x^*)$ при $k \to \infty$, то зауважимо, що така послідовність може існувати не завжди. Припустимо, що така послідовність існує. Вважатимемо, що $\tau_k \to \tau^*$ при $k \to \infty$ монотонно (спадаючи). Тоді аналогічно попередньому існує (скінченна чи нескінченна) множина неперервно диференційовних функцій $A_2 = \{y_k(t) : t \in (\tau^*, b_k), \ k \in N_2 \subset \mathbf{Z}\}$, $N_2 \ne \varnothing$, таких, що:

1) $b_k \ge \tau_2 > \tau^*$ для деякого числа τ_2 та для всіх $k \ge 1$;

2) функції $y_k(t)$ є розв'язками рівняння (1), для яких виконується умова $\lim_{t \to \tau^* + 0} y_k(t) = \bar{x}^*$.

Розглянемо функції $h_{nm}(t)$, визначені таким чином:

$$h_{nm}(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in (a_n, \tau^*); \\ y_m(t), & t \in (\tau^*, b_m), \end{cases}$$

де $n \in N_1$, $m \in N_2$.

Оскільки функції $x_n(t)$ та $y_m(t)$ є неперервно диференційовними відповідно на інтервалах (a_n, τ^*) і (τ^*, b_m), то функція $h_{nm}(t)$, доозначена за неперервністю в точці (τ^*, x^*), тобто визначена згідно з рівністю

$$h_{nm}(\tau^*) = \lim_{t \to \tau^* - 0} x_n(t) = \lim_{t \to \tau^* + 0} y_m(t) = x^*,$$

є кусково-гладкою на інтервалі I. Очевидно, що $I \neq \varnothing$, оскільки $(\tau_1, \tau_2) \subset I$.

Отже, побудовано непорожню (скінченну чи нескінченну) сукупність неперервних (кусково-гладких) функцій $\{ h_{nm}(t) : t \in I \}$, де $n \in N_1$, $m \in N_2$, що задовольняють рівність (1), причому кожна з функцій $h_{nm}(t)$ є неперервно диференційовною на множині $(\tau_1, \tau^*) \bigcup (\tau^*, \tau_2)$ і проходить через точку $(\tau^*, x^*) \in I$.

Таким чином, для рівняння (1) можна визначити поняття кусково-гладкого (неперервного) розв'язку та довести аналогічні теоремам 2 – 5 твердження про продовжуваність та максимальний інтервал визначення таких розв'язків, але в цьому випадку може втратитись властивість єдиності розв'язку в зв'язкуз наявністю критичних точок на відповідних інтервалах визначеності таких розв'язків.

5. Періодичні розв'язки. Розглянемо задачу про існування періодичного розв'язку рівняння (1). Справедливою є наступна лема.

Лема 5. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *функція* $g = g(t,x)$ *періодична по* t *з періодом* T *і рівняння* (1) *має розв'язок на інтервалі* (α, β). *Тоді існує функція* $x = x(t)$, *визначена на множині* $\mathcal{T} \bigcap \{ (\alpha + mT, \beta + mT),$ $m \in \mathbf{Z}\}$, *що задовольняє рівняння* (1).

Доведення. З умови леми випливає, що існує неперервно диференційовна функція $x^* = x^*(t)$, визначена на (α, β) така, що $g\big(t, x^*(t)\big) = 0$ для всіх $t \in$ $\in (\alpha, \beta)$. Розглянемо $m_0 \in \mathbf{Z}$ таке, що $(\alpha + m_0T, \beta + m_0T) \bigcap \mathcal{T} \neq \varnothing$. Нехай для визначеності $(\alpha + m_0T, \beta + m_0T) \subset \mathcal{T}$. Внаслідок періодичності функції $g(t,x)$ по t справедлива рівність $g(t + m_0T, x) = g(t,x) = 0$ для всіх $t \in (\alpha +$ $+ m_0T, \beta + m_0T)$.

Позначимо $\bar{t} = t + m_0T$. Тоді $g(\bar{t}, x) = g(t,x)$ для всіх $x \in \mathcal{L}(\bar{t}) \neq \varnothing$. З умови леми випливає, що рівняння $g(\bar{t}, x) = 0$ має на (α, β) розв'язок $x =$ $= x^*(\bar{t}) = x^*(t + m_0T)$, де $t + m_0T \in (\alpha, \beta)$. Оскільки $t + m_0T \in (\alpha, \beta)$, то $t \in$ $\in (\alpha - m_0T, \beta - m_0T)$, тобто рівняння (1) має розв'язок $x = x^*(t)$, де $t \in (\alpha -$ $- m_0T, \beta - m_0T)$, звідки випливає справедливість леми.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *функція* $g(t,x)$ *є періодичною відносно* t *з періодом* T, *а рівняння* (1) *має неперервно диференційовний розв'язок на інтервалі* (α, β), *причому* $\beta - \alpha \geq T$. *Тоді існує кусково-гладкий періодичний розв'язок рівняння* (1), *визначений на множині* $\mathcal{T}$.

Доведення. Оскільки рівняння (1) на інтервалі (α, β) має розв'язок $x =$ $= x_0(t)$, то $g\big(t, x_0(t)\big) = 0$ для всіх $t \in (\alpha, \alpha + T)$. Розглянемо кусково-гладку функцію $x = x_m(t)$, де $t \in (\alpha + mT, \alpha + (m+1)T) \bigcap \mathcal{T}$, для $x_m(t) = x_0(t - mT)$ при $t \in (\alpha + mT, \alpha + (m+1)T) \bigcap \mathcal{T}$. Очевидно, що $x(t)$ задовольняє рівняння (1), є періодичною та кусково-гладкою (не обов'язково неперервною) функцією.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *функція* $g(t,x)$ *є періодичною по* t *з періодом* T, *рівняння* (1) *має неперервно диференційовний роз-*

в'язок на інтервалі (α, β), причому $\beta - \alpha > T$ *і існує* $t_0 \in \mathcal{T}_{k_0}$, $k_0 \in B$, *таке, що рівняння* $g(t_0, x) = 0$, *як рівняння відносно* x, *має єдиний розв'язок. Тоді рівняння* (1) *має єдиний неперервно диференційовний розв'язок, визначений на всій множині* $\mathcal{T}$, *і цей розв'язок є періодичним.*

Доведення. На підставі теореми 3 на інтервалі $\mathcal{T}_{k_0}$ існує єдиний неперервно диференційовний розв'язок $x = h(t)$ рівняння (1). З теореми 7 випливає існування періодичної кусково-гладкої функції $x_*(t)$, визначеної на всій множині $\mathcal{T}$, яка задовольняє рівняння (1).

Очевидно, що $h(t) = x_*(t)$ для всіх $t \in \mathcal{T}_{k_0}$. З періодичності функції $g(t, x)$ за змінною t та єдиності розв'язку рівняння (1) на $\mathcal{T}_{k_0}$ випливає єдиність періодичного кусково-гладкого розв'язку $x_*(t)$, що визначений на всій множині $\mathcal{T}$.

Покажемо, що функція $x_*(t)$ є неперервно диференційовною функцією для всіх $t \in \mathcal{T}$. Припустимо супротивне. Нехай існує точка $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathcal{L}$ така, що $x_*(\bar{t}) = \bar{x}$ і функція $x_*(t)$ не є неперервно диференційовною в цій точці. Оскільки $\beta - \alpha > T$, то знайдеться число $m_0 \in \mathbf{Z}$ таке, що $\bar{t} + m_0 T \in (\alpha, \beta)$, а отже, внаслідок періодичності функції $g(t, x)$ розв'язок $x = x_*(t)$ рівняння (1) в точці $\bar{t} + m_0 T$ також не є неперервно диференційовним, що суперечить умові теореми 8. Отже, функція $x = x_*(t)$ є неперервно диференційовною на всій множині $\mathcal{T}$. Теорему доведено.

1. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1953. – 468 с.
2. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 333 с.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
4. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. – 247 с.
5. *Математическая* энциклопедия: В 5-ти т. – М.: Сов. энцикл., 1985.– Т. 5. – 1246 с.
6. *Еругин Н. П.* Неявные функции. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та., 1956. – 59 с.
7. *Гурса Э.* Курс математического анализа: В 3-х т. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. –Т. 1. – 591 с.
8. *Зубов В. И.* К вопросу существования и приближенного представлення неявних функций // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1956. – № 19. – С. 48–54.
9. *Лозинский С. М.* Обратные функции, неявные функции и решение уравнений // Там же. – 1957. – № 7. – С. 131–142.
10. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу // Математика. Новое в заруб. науке. – М.: Мир, 1977. – Т. 5. – 232 с.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
12. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.
13. *Измаилов А. Ф.* Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Мат. заметки. – 2000. – **67**, вып. 1. – С. 57–68.
14. *Арутюнов А. В.* Теоремы о неявной функции и анормальные точки // Докл. РАН. – 1999. – **368**, № 5. – С. 586–589.
15. *Рейх С., Хацкевич В., Шойхет Д.* Глобальная теорема о неявной функции и теоремы о неподвижных точках для голоморфных отображений и полугрупп // Там же. – 1996. – **347**, № 6. – С. 743–745.
16. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. – М.: Наука, 1972. – 622 с.
17. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 1994. – 360 с.
18. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: В 2-х ч. – М.: Наука, 1985. – Ч. 1. – 320 с.

Одержано 30.12.99,
після доопрацювання – 16.06.2000