УДК 523.112

Т. В. Обиход (Ин-т ядерн. исслед. НАН Украины, Киев)

СИНГУЛЯРНОСТИ ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

By using the methods of toric geometry, we investigate F-theory compactifications on the elliptic Calabi–Yau threefolds.

Методами торичної геометрії досліджено компактифікації F-теорії на еліптичні трифолди Калабі – Яу.

1. Введение. Во времена создания общей теории относительности Эйнштейн говорил, что физика есть геометрия. Теоретики сегодняшнего дня, создавшие F-теорию [1 – 5], говорят, что физика высоких энергий есть торическая геометрия [6].

F-теория — это современный вариант единой теории фундаментальных взаимодействий. Ее прототипом послужила гомотопическая теория систем конденсированных сред [7]. F-теория устанавливает взаимно однозначное соответствие между солитонными состояниями и сингулярностями торических многообразий. Типичными примерами торических многообразий являются трифолды Калаби – Яу.

Цель настоящей работы — получить методами торической геометрии для трифолдов Калаби – Яу следующие результаты:

1) калибровочное содержание трифолдов;
2) мультиплетное содержание трифолдов;
3) фазовые переходы между трифолдами.

2. Компактификация на трифолды Калаби – Яу. Двенадцатимерное пространство, описывающее пространственно-временные и внутренние степени свободы, компактифицируем следующим образом [8, 9]:

$$\mathbb{R}^6 \times X^6,$$

где $\mathbb{R}^6$ — шестимерное пространство-время, на котором действует конформная группа $SO(4, 2)$, а X^6 — трифолд, являющийся трехмерным комплексным многообразием Калаби – Яу.

3. Торическое представление трифолдов. Рассмотрим взвешенное проективное пространство, определяемое следующим образом:

$$\mathbb{P}^4_{\omega_1,\ldots,\omega_5} = \mathbb{P}^4 / \mathbb{Z}_{\omega_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{\omega_5},$$

где $\mathbb{P}^4$ — четырехмерное проективное пространство, $\mathbb{Z}_{\omega_i}$ — циклическая группа порядка ω_i. Определим на $\mathbb{P}^4_{\omega_1,\ldots,\omega_5}$ полином, называемый суперпотенциалом, который удовлетворяет условию однородности:

$$W(x^{\omega_1}\varphi_1, \ldots, x^{\omega_5}\varphi_5) = x^d W(\varphi_1, \ldots, \varphi_5),$$

где $d = \sum_{i=1}^{5} \omega_i$. Множество точек $p \in \mathbb{P}^4_{\omega_1,\ldots,\omega_5}$, удовлетворяющих условию $W(p) = 0$, образует трифолд Калаби – Яу $X_d(\omega_1, \ldots, \omega_5)$. Ассоциируем с трифолдом $X_d(\omega_1, \ldots, \omega_5)$ выпуклый целочисленный полиэдр [10, 11]

$$\Delta = \left\{ (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}^5 \,\Big|\, \sum_{i=1}^{5} \omega_i x_i = 0,\ x_i \geq -1 \right\}.$$

Целочисленный полиэдр Δ называется рефлексивным, если соответствующий ему дуальный полиэдр

$$\nabla = \left\{ (y_1, \ldots, y_4) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \geq -1,\ (x_1, \ldots, x_4) \in \Delta \right\}$$

также целочислен. Наличие рефлексивных полиэдров Δ и ∇ свидетельствует, что многообразия Калаби – Яу имеют mirror симметрию. Это означает, что у каждого трифолда с характеристикой Эйлера $\chi = 2(h^{11} - h^{21})$ есть дуальный партнер – mirror с характеристикой Эйлера $\chi = 2(h^{21} - h^{11})$, где h^{11} и h^{21} — числа Ходжа трифолда.

Полиэдры Δ и ∇ рефлексивны тогда и только тогда, когда трифолд Калаби – Яу X описывается дисплеем

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon & = & \varepsilon & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ K3 & \to & X & \to & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathbb{P}^1 & \to & F_{2k} & \to & \mathbb{P}^1, \end{array} \qquad (1)$$

т. е. когда X является одновременно эллиптическим расслоением на поверхности Хирцебруха F_{2k} и $K3$-расслоением на проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

4. Nesting полиэдров. Исследуем эллиптические трифолды вида

$$X_{12k+12}(1, 1, 2k,\ 4k+4,\ 6k+6), \qquad (2)$$

где $k = 1, \ldots, 6$. Эти трифолды описываются дисплеем (1).

Применяя компьютерную программу PORTA [12], можно вычислить дуальные полиэдры для трифолдов (2). Полиэдры для каждого k имеют идентичные свойства, поэтому ограничимся рассмотрением случая $k = 1$. Для этого случая точки дуального полиэдра ∇ приведены в табл. 1.

Таблица 1

∇
(−1, 0, 2, 3)
(0, −1, 2, 3)
(0, 0, −1, 0)
(0, 0, 0, −1)
(0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 1)
(0, 0, 1, 1)
(0, 0, 1, 2)
(0, 0, 2, 3)
(0, 1, 2, 3)
(1, 2, 2, 3)

Следующие наблюдения проясняют структуру полиэдра ∇:

1. Опуская первую и последнюю точки ∇, получаем дуальный полиэдр ∇^3 для $K3$ поверхности $X_{12}(1, 1, 4, 6)$.

2. Опуская первые две точки и последние две точки ∇, получаем дуальный полиэдр ${}^2\nabla$ для тора $X_6(1, 2, 3)$.

3. Полиэдр ${}^3\nabla$ разделяется на части top и bottom полиэдром ${}^2\nabla$ и представляется в виде объединения

$$ {}^3\nabla = \nabla^H_{\mathrm{bot}} \cup \nabla^{k=1}_{\mathrm{top}}, $$

где $\nabla^{k=1}_{\mathrm{top}}$ зависит только от $k=1$, тогда как ∇^H_{bot} зависит только от enhanced группы H. К вычислению этих групп мы и перейдем.

Введем специальные точки

$$ pt_1^{(j)} = (0, -j, 2, 3), $$

$$ pt_2^{(j)} = (0, -j, 1, 2), $$

$$ pt_3^{(j)} = (0, -j, 1, 1), $$

$$ pt_4^{(j)} = (0, -j, 0, 1), $$

$$ pt_5^{(j)} = (0, -j, 0, 0), $$

$$ pt_6^{(j)} = (0, -j, -1, 0), $$

$$ pt_7^{(j)} = (0, -j, 0, -1), $$

где j — положительное целое число.

Рассмотрим теперь возможность присоединения к ${}^2\nabla$ комбинаций точек $pt_r^{(j)}$ всеми возможными способами так, чтобы возникающие полиэдры bottom были рефлексивными. В табл. 2 и на рисунках 1 и 2 показаны рефлексивные полиэдры bottom, из которых вычитываются диаграммы Дынкина для enhanced групп.

Таблица 2

H	Bottom
$SU(1)$	$\{pt_1^{(1)}\}$
$SU(2)$	$\{pt_1^{(1)}, pt_2^{(1)}\}$
$SU(3)$	$\{pt_1^{(1)}, pt_2^{(1)}, pt_3^{(1)}\}$
$SU(4)$	$\{pt_1^{(1)}, pt_2^{(1)}, pt_3^{(1)}, pt_4^{(1)}\}$
$SU(5)$	$\{pt_1^{(1)}, pt_2^{(1)}, pt_3^{(1)}, pt_4^{(1)}, pt_5^{(1)}\}$
$SO(10)$	$\{pt_1^{(2)}, pt_2^{(2)}, pt_3^{(1)}, pt_4^{(1)}, pt_5^{(1)}\}$
E_6	$\{pt_1^{(3)}, pt_2^{(2)}, pt_3^{(2)}, pt_4^{(1)}, pt_5^{(1)}\}$
E_7	$\{pt_1^{(4)}, pt_2^{(3)}, pt_3^{(2)}, pt_4^{(2)}, pt_5^{(1)}\}$

Заметим, что в каждом случае есть точки ${}^2\nabla$ и обозначение $pt_r^{(j)}$ подразумевает наличие $pt_r^{(j-1)}, \ldots, pt_r^{(1)}$.

В результате мы получаем табл. 3 для цепочек трифолдов, демонстрирующих nesting полиэдров.

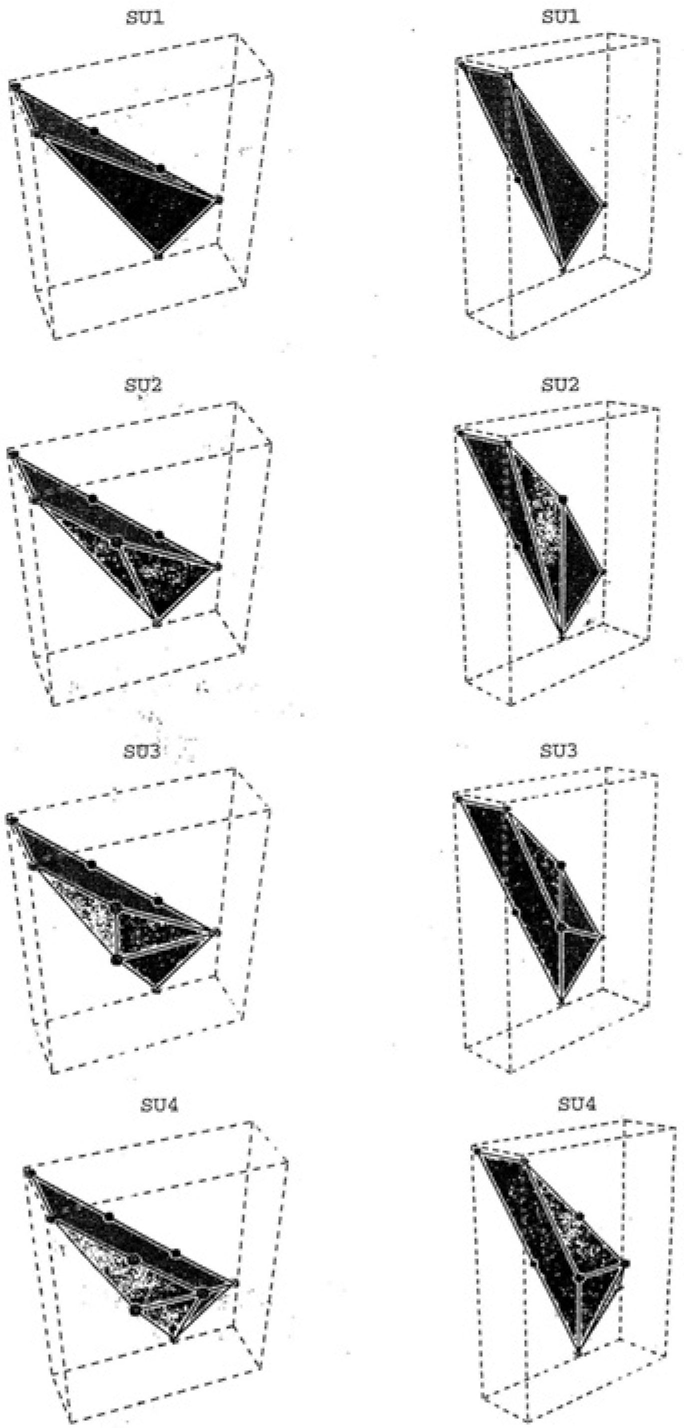

Рис. 1

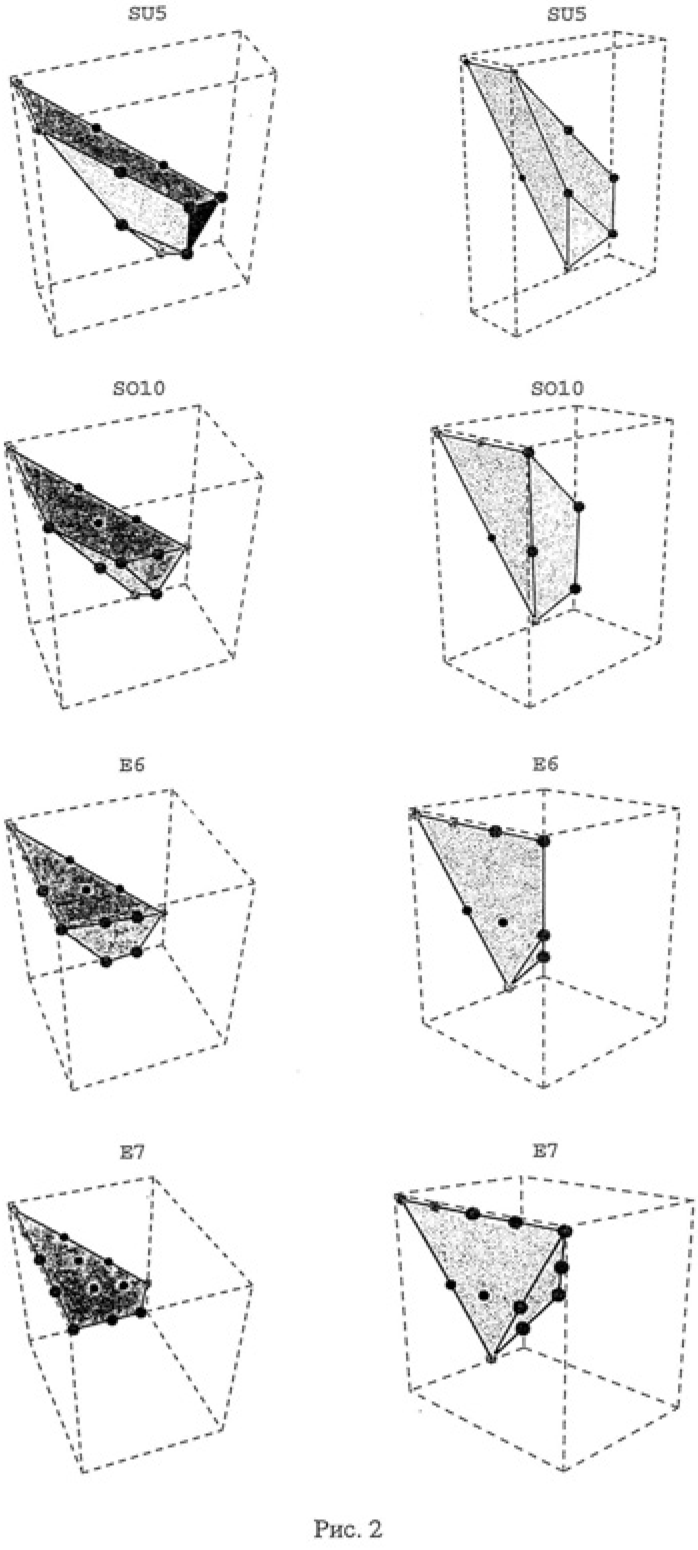

Рис. 2

Таблица 3

F_n	$SU(1)$	$SU(2)$	$SU(3)$	$SU(4)$	$SU(5)$	$SO(10)$	E_6	E_7
F_2	(243, 3)	(190, 4)	(161, 5)	(138, 6)	(117, 7)	(112, 8)	(105, 9)	(96, 10)
F_4	(271, 7)	(194, 8)	(153, 9)	(122, 10)	(95, 11)	(88, 12)	(79, 13)	(68, 14)
F_6	(321, 9)	(220, 10)	(167, 11)	(128, 12)	(95, 13)	(86, 14)	(75, 15)	(62, 16)
F_8	(376, 10)	(251, 11)	(186, 12)	(139, 13)	(100, 14)	(89, 15)	(76, 16)	(61, 17)
F_{10}	(433, 13)	(284, 14)	(207, 15)	(152, 16)	(107, 17)	(94, 18)	(79, 19)	(62, 20)
F_{12}	(491, 11)	(318, 12)	(229, 13)	(166, 14)	(115, 15)	(100, 16)	(83, 17)	(64, 18)

Числа Ходжа (h^{21}, h^{11}) также вычитываются из полиэдров.

Enhanced группы определяют типы сингулярностей слоев эллиптических расслоений трифолдов [13, 14]. Эти сингулярности интерпретируются как солитонные состояния. Числа Ходжа (h^{11}, h^{21}) показывают из скольких векторных мультиплетов и синглетных гипермультиплетов состоят солитонные состояния. Диагональные генераторы enhanced групп являются квантовыми числами типа цветов и ароматов. Nesting полиэдров интерпретируется как фазовый переход.

1. *Bershadsky M., Intriligator K., Kachru S., Morrison D. R., Sadov V., Vafa C.* Geometric singularities and enhanced gauge symmetries // Nucl. Phys. B. – 1996. – **481**. – P. 215 – 252.
2. *Candelas P., Font A.* Duality between the webs of heterotic and type II vacua // Ibid. – 1998. – **511**. – P. 295 – 325.
3. *Candelas P., Perevalov E., Rajesh G.* Toric geometry and enhanced gauge symmetry of F-theory/heterotic vacua // Ibid. –1997. – **507**. – P. 445 – 474.
4. *Perevalov E., Skarke H.* Enhanced gauge symmetry in type II and F-theory compactifications: Dynkin diagrams from polyhedra // Ibid. – 1997. – **505**. – P. 679 – 700.
5. *Candelas P., Perevalov E., Rajesh G.* Matter from toric geometry // Ibid. – 1998. – **519**. – P. 225 – 238.
6. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. – 581 p.
7. *Rajaraman R.* Solitons and instantons. – Amsterdam: North-Holland, 1982. – 414 p.
8. *Morrison D. R., Vafa C.* Compactifications of F-theory on Calabi – Yau threefolds – I // Nucl. Phys. B. – 1996. – **473**. – P. 74 – 92.
9. *Morrison D. R., Vafa C.* Compactifications of F-theory on Calabi – Yau threefolds – II // Ibid. 1996. – **476**. – P. 437 – 469.
10. *Hosono S., Klemm A., Theisen S., Yau S.-T.* Mirror symmetry, mirror map and applications to Calabi – Yau hypersurfaces // Communs Math. Phys. – 1995. – **167**. – P. 301 – 350.
11. *Hosono S., Klemm A., Theisen S., Yau S.-T.* Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi – Yau spaces // Nucl. Phys. B. – 1995. – **433** – P. 501 – 554.
12. *Christo T., Loebel A.* PORTA - A polyhedron representation transformation algorithm // http://elib.zib.de/.
13. *Kodaira K.* On compact analytic surface II // Ann. Math. – 1963. – **77**. – P. 563.
14. *Tate J.* Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, in modular functions of one variable // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1975. – **476**. – 300 p.

Одержано 28.10.98