УДК 517.9

О. М. Станжицький (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІТО ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА

By using the Lyapunov functions, we obtain conditions of the invariance and stochastic stability of invariant sets of Ito-type systems.

За допомогою функцій Ляпунова одержано умови інваріантності та стохастичної стійкості інваріантних множин систем типу Іто.

Розглянемо систему стохастичних рівнянь Іто

$$dx = a(t,x) + \sum_{r=1}^{k} b_r(t,x)\,dw_r(t), \tag{1}$$

де $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(t,x)$ і $b_r(t,x)$, $r = \overline{1,k}$, — вектори із $\mathbb{R}^n$, $w_1(t), \ldots, w_r(t)$ — незалежні скалярні вінерові процеси, визначені на деякому повному ймовірнісному просторі (Ω, F, P). Будемо вважати, що коефіцієнти a, b_r невипадкові і такі, що рівняння (1) має єдиний сильний розв'язок задачі Коші з початковими даними $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Умови, які накладаються на коефіцієнти системи (1), добре відомі (див., наприклад, [1, с. 281]), вони виконуються, наприклад, для борелевих за сукупністю змінних функцій $a(t,x)$, $b(t,x)$ і таких, що мають обмежені в області $\{t \geq 0\} \times \mathbb{R}^n$ частинні похідні по x. Позначимо через S деяку борелеву множину в $\{t \geq 0\} \times \mathbb{R}^n$. Нехай S_t — множина в $\mathbb{R}^n$, де $S_t = \{x : (t,x) \in S\}$ і є непорожньою при $t \geq 0$.

Означення 1. *Множину S назвемо інваріантною для системи* (1), *якщо*

$$\mathrm{P}\{(t, x(t,t_0,x_0)) \in S \ \ \forall t \geq t_0\} = 1 \tag{2}$$

при $(t_0, x_0) \in S$, *де* $x(t,t_0,x_0)$ — *розв'язок* (1) *такий, що* $x(t,t_0,x_0) = x_0$, $t_0 \geq 0$.

***Зауваження* 1.** Оскільки в подальшому ми будемо розглядати лише неперервні розв'язки системи (1), то для неперервних і замкнених множин S (тобто таких, що описуються неперервними функціями) означення 1 еквівалентне умові

$$\mathrm{P}\{(t, x(t,t_0,x_0)) \in S\} = 1 \qquad \forall t \geq t_0. \tag{3}$$

Дійсно, з (2) випливає (3). Слідування рівності (2) із (3) випливає з наступних міркувань. Нехай $t_r \geq t_0$ — додатні раціональні числа. Позначимо

$$A_i = \{\omega \in \Omega : (t_i, x(t_i,t_0,x_0)) \in S\}.$$

З (3) випливає, що $\mathrm{P}(A_i) = 1$, а тому $\mathrm{P}(\overline{A_i}) = 0$. Отже, і ймовірність зліченного об'єднання

$$\overline{A_i} = \{\omega : \exists i, (t_i, x(t_i,t_0,x_0)) \notin S\}$$

дорівнює нулю. Тому ймовірність доповнення цієї множини, а саме

$$\bigcap_i A_i = \{\omega :\ (t_i, x(t_i,t_0,x_0)) \in S \ \ \forall t_i \geq t_0\}$$

дорівнює 1. З останнього випливає, що траєкторія процесу $(t, x(t,t_0,x_0,\omega_0))$

для $\omega_0 \in \bigcap_i A_i$ належить S для всіх $t \geq t_0$. В противному разі внаслідок неперервності траєкторій і множини S знайшлася б раціональна точка t_i така, що $(t_i, x(t_i, t_0, x_0, \omega_0)) \notin S$. Останнє суперечить викладеному вище.

Означення 2. *Множину S назвемо стохастично стійкою, якщо для будь-яких $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при $\rho(x_0, S_{t_0}) < \delta$ виконана нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t \geq t_0} \rho(x(t, t_0, x_0), S_t) > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2. \tag{4}$$

Умови існування та стійкості інваріантних множин для (1) наведемо в термінах функцій Ляпунова $V(t, x)$, аналогічно тому, як це зроблено для детермінованих систем в [2] (гл. 2).

Відмітимо, що для систем, в яких випадкові збурення мають регулярний характер, умови інваріантності та стійкості множин $V(t, x) = 0$ отримано в [3], а для систем типу (1) близькі результати стосовно інваріантних множин вигляду $V(x) = C$ для довільного $C \in \mathbb{R}$ отримано в роботі [4] іншим методом.

Нехай D — обмежена в $\mathbb{R}^n$ область і в області $\{t \geq 0\} \times \overline{D}$ задано невід'ємну, неперервно диференційовну по t і двічі неперервно диференційовну по x функцію $V(t, x)$. Позначимо через N множину її нулів в $\{t \geq 0\} \times D$, тобто множину $V(t, x) = 0$. Через N_t позначимо множину $x \in \mathbb{R}^n$ таку, що $V(t, x) = 0$ при фіксованому $t \geq 0$. Припустимо, що вона не порожня в D для довільного $t \geq 0$. Нехай також проекція множини N нулів функції V на $\mathbb{R}^n$ замкнена в D.

Умови додатної інваріантності та стохастичної стійкості множини $V(t, x) = 0$ наведемо в термінах твірного диференціального оператора L марковського процесу, що описується системою (1) і має вигляд

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V, a(t, x)) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} (\nabla V, b_r(t, x))^2 V, \tag{5}$$

де $\nabla = (\partial / \partial x_1, \ldots, \partial / \partial x_n)$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються наведені вище умови. Тоді якщо в області* $\{t \geq 0\} \times D$

$$LV(t, x) \leq 0, \tag{6}$$

то множина

$$V(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in D \tag{7}$$

є додатно інваріантною для (1). *Якщо, крім того,*

$$\inf_{t \geq 0,\, x \in D:\, \rho(N_t, x) > \delta} V(t, x) = V_\delta > 0 \tag{8}$$

при довільному $\delta > 0$, то множина (7) *і стохастично стійка.*

Зауваження 2. Очевидно, що (8) виконується автоматично, якщо в умовах теореми функція V залежить тільки від x.

Доведення. Не втрачаючи загальності, доведення проведемо для $t_0 = 0$. Розглянемо розв'язок $x(t, x_0)$ системи (1) такий, що $x(0, x_0) = x_0 \in N_0$, тобто належить множині нулів функції $V(t, x)$ при $t = 0$. Оскільки множина N

замкнена в D, то і N_0 замкнена в D, а тому $x(t, x_0) \in D$ для t з деякого інтервалу $[0, \tau_D)$ в силу неперервності $x(t, x_0)$. Тут τ_D — момент першого виходу $x(t, x_0)$ із D. Очевидно, що $\tau_D > 0$ з імовірністю 1. Позначимо $\tau_D(t) = \min\{\tau_D, t\}$. Тоді, застосовуючи до процесу $V(t, x(t, x_0))$ формулу Іто і використовуючи лему із [5, с. 110], одержуємо

$$MV(\tau_D(t), x(\tau_D(t)), x_0) - V(0, x_0) = M\int_0^{\tau_D(t)} LV(s, x(s, x_0))\,ds,$$

звідки в силу (6) маємо

$$MV(\tau_D(t), x(\tau_D(t), x_0)) \leq 0.$$

Звідси внаслідок невід'ємності функції V в області $\{t > 0\} \times D$ отримуємо співвідношення

$$V(\tau_D(t), x(\tau_D(t), x_0)) = 0 \tag{9}$$

з імовірністю 1. Рівність (9) означає, що з імовірністю 1 точка $(\tau_D(t), x(\tau_D(t), x_0)) \in N$. А оскільки проекція N на $\mathbb{R}^n$ замкнена в D, то точка $x(\tau_D(t), x_0)$ з імовірністю 1 є внутрішньою в D. Останнє означає, що $\tau_D(t)$ з імовірністю 1 не є моментом виходу τ_D з області D, а тому $\tau_D(t) = t$ з імовірністю 1. Тоді з (9) випливає, що $V(t, x(t, x_0)) = 0$ з імовірністю 1 для будь-якого $t \geq 0$. Звідси випливає, що

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t_i \in Q^+} V(t_i, x(t_i, x_0)) = 0\right\} = 1.$$

Тут Q^+ — множина невід'ємних раціональних чисел. Але внаслідок неперервності

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t_i \in Q^+} V(t_i, x(t_i, x_0)) = 0\right\} = \mathrm{P}\left\{\sup_{t \geq 0} V(t, x(t, x_0)) = 0\right\} = 1.$$

З останньої рівності і випливає, що

$$\mathrm{P}\{(t, x(t, x_0)) \in N \;\; \forall t \geq 0\} = 1.$$

Доведемо тепер стохастичну стійкість множини N. Нехай ε_1 і ε_2 — довільні додатні сталі, причому ε_1-окіл множини N_t міститься в D для кожного $t \geq 0$ разом зі своєю границею. Враховуючи те, що проекція N — компакт D, цього завжди можна досягти. Позначимо

$$V_{\varepsilon_1} = \inf\nolimits_{t \geq 0,\, x \in D:\, \rho(N_t, x) > \varepsilon_1} V(t, x),$$

$V_{\varepsilon_1} > 0$ за умовою теореми. Аналогічно теоремі із [5, с. 207], використовуючи мартингальну властивість процесу $V\left(\tau_{U_{\varepsilon_1}}(t), x\left(\tau_{U_{\varepsilon_1}}(t), t_0, x_0\right)\right)$ (U_{ε_1} — ε_1-окіл N_t), можна показати, що для розв'язку $x(t, t_0, x_0)$ системи (1) справедлива оцінка

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t \geq t_0} \rho(x(t, t_0, x_0), N_t) > \varepsilon_1\right\} \leq \frac{V(t_0, x_0)}{V_{\varepsilon_1}}. \tag{10}$$

Виберемо тепер δ-окіл множини N_0 так, щоб

$$V(t_0, x_0) \le V_{\varepsilon_1}\varepsilon_2. \tag{11}$$

Внаслідок леми із [2, с. 64] такий вибір завжди можливий. Тоді із (10) і (11) випливає доведення теореми.

Перейдемо до вивчення локально інваріантних множин системи (1).

Нехай $S \in \mathbb{R}^{n+1}$ — деяка замкнена, непорожня для кожного $t \ge 0$ множина. Візьмемо довільне $t_0 \ge 0$. Позначимо

$$\tau(t_0, x_0) = \inf_{t > t_0}\{(t, x(t, t_0, x_0)) \notin S\}.$$

Очевидно, що $\tau(t_0, x_0)$ є марковським моментом відносно потоку F_t σ-алгебр, що фігурують в означенні рівняння (1).

Означення 3. *Множину S назвемо локально інваріантною для системи* (1), *якщо з того, що $(t_0, x_0) \in S$, випливає виконання з імовірністю* 1 *нерівності $\tau(t_0, x_0) > 0$.*

Відносно опису таких множин справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо в області $\{t \ge 0\} \times \overline{D}$ існує невід'ємна функція Ляпунова $V(t, x)$ така, що $LV(t, x) \le 0$, то множина $V(t, x) = 0$, $x \in D$, якщо вона непорожня, є локально інваріантною для* (1).

Доведення. Нехай $t_0 \ge 0$, $x_0 \in D$ такі, що $V(t_0, x_0) = 0$. Тоді, використовуючи неперервність розв'язку $x(t, t_0, x_0)$, можна стверджувати, що $\tau_U > 0$ з імовірністю 1, де τ_U — момент виходу розв'язку $x(t, t_0, x_0)$ з деякого U-околу точки $x_0 \in D$. А тому на інтервалі $[t_0, \tau_D)$ справедлива рівність (9), з якої і випливає доведення теореми.

Наведемо приклад, що ілюструє отримані результати. Розглянемо систему стохастичних рівнянь Іто

$$dx = -x\,dt - y\,dw(t), \qquad dy = -y\,dt + x\,dw(t) \tag{12}$$

в області $x^2 + y^2 \le 2$, $w(t)$ — вінерів процес.

Тоді множина S точок, що задовольняє співвідношення

$$x^2 + y^2 = \exp\{-t\}$$

при $t \ge 0$, є інваріантною для (12) і стохастично стійкою.

Дійсно, за функцію Ляпунова, що фігурує в теоремі 1, можна взяти $V = \left(x^2 + y^2 - \exp\{-t\}\right)^2$. Множиною N_0 є множина точок (x, y) така, що $x^2 + y^2 \le 1$, компактна в області $x^2 + y^2 \le 2$. Неважко пересвідчитись, що

$$LV = 2\left(x^2 + y^2 - \exp\{-t\}\right)\left(\exp\{-t\} - x^2 - y^2\right) = -2V \le 0,$$

звідки випливає виконання нерівності (6). Виконання умови (8) для функції V очевидне.

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 611 с.
2. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
3. *Станжицький О.М.* Дослідження інваріантних множин систем з випадковими збуреннями за допомогою функції Ляпунова // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С.309–312.
4. *Kulinich G.L., Pereguda O.V.* Phase picture of the diffusion processes with the degenerate diffusion matrices // Random Oper. and Stochast. Equat. – 1997. – **5**, № 8. – P. 203–216.
5. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука 1969. – 367 с.

Отримано 15.03.99,
після доопрацювання — 21.04.00