УДК 517.53

А. А. Довгошей (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ТРЕХЧЛЕННАЯ РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ

We prove that three term recurrence relation for analytic polynomials which are orthogonal with respect to the harmonic measure in a simply connected domain G exists if and only if ∂G is an ellipse.

Доведено, що тричленна рекурентна формула для аналітичних многочленів, ортогональних відносно гармонічної міри в однозв'язній області G, буде існувати тоді і тільки тоді, коли ∂G — еліпс.

1. Введение и основной результат. Пусть G — ограниченная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, z_0 — отмеченная точка области G. Класс Харди $h^2 = h^2(G)$ — это множество комплекснозначных гармонических в G функций, для которых $|f(z)|^2$ имеет в G гармоническую мажоранту. Норма $f \in h^2(G)$ вводится соотношением

$$\|f\| = \|f\|_{h^2(G)} := (U_f(z_0))^{1/2}, \tag{1}$$

где $U_f(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта $|f(z)|^2$ в G. Если $\omega(\cdot) = \omega(\cdot, z_0)$ — гармоническая мера на $\Gamma = \partial G$ относительно точки $z_0 \in G$, а функции $f, g \in H(\overline{G})$, т. е. гармоничны в G и непрерывны в $\overline{G}$, то скалярное произведение этих функций в $h^2(G)$

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_{h^2(G)} = \int_\Gamma f(z)\,\overline{g(z)}\,d\omega(z).$$

Относительно нормы (1) $h^2(G)$ — пространство Гильберта, его подпространство $H^2 = H^2(G)$ состоит из аналитических в G функций (см., например, [1]).

В настоящей работе исследуются ортонормированные системы (ОН-системы) многочленов $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $H^2(G)$:

$$\langle \hat{P}_i, \hat{P}_j \rangle = \delta_{ij},$$

$$\hat{P}_n(z) = \mu_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \tag{2}$$

где $\mu_n > 0$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Основной результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Пусть G — область Каратеодори, $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ОН-система полиномов вида* (2). *Тогда равносильны следующие утверждения:*

i) *для любого натурального n существуют постоянные α_n, β_n, γ_n такие, что*

$$\hat{P}_{n+1}(z) = (\alpha_n z + \beta_n)\hat{P}_n(z) + \gamma_n \hat{P}_{n-1}(z); \tag{3}$$

ii) Γ — *эллипс.*

Если эллипс Γ задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то для любого натурального n

$$\alpha_n = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n},$$

$$\frac{\mu_n^2 \gamma_n}{\mu_{n+1}\mu_{n-1}} = \frac{(b^2-a^2)((a+b)^{2n-2} - (a-b)^{2n-2})}{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}. \tag{4}$$

Теорема 1 является „эллиптическим" аналогом классической теоремы, хорошо известной для многочленов, ортогональных на отрезке (см. [2, с. 55]). Доказательство теоремы 1 приведено в п. 2 настоящей работы. В третьем пункте найдены: модификация формулы Кристоффеля – Дарбу и теорема 2 — конформно-инвариантная форма теоремы 1.

2. Леммы и доказательство основной теоремы.

Лемма 1. *Для любых f, $g \in h^2(G)$ и любого компакта $K \subset G$ найдется постоянная $k = k(G, z_0, K)$ такая, что*

$$\max_{z \in K} |f(z) - g(z)| \le k\|f - g\|. \tag{5}$$

Неравенство (5) легко вывести из неравенства Гарнака (см. [3, с. 345]).

Утверждение 1. *В $H^2(G)$ существует единственная ОН-система полиномов вида* (2) *с $\mu_n > 0$.*

Доказательство. В силу леммы 1 система $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ линейно независима в $H^2(G)$. Применяя к $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ процесс ортогонализации Шмидта, легко убедиться в существовании $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Единственность проверяется стандартными рассуждениями (см., например, [4, с. 12]).

Введем в $h^2(G)$ ОН-систему полиномов $\{\hat{Q}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ такую, что

$$\hat{Q}_{-n}(z) = \overline{\hat{Q}_n(z)} \quad \text{и при} \quad n \ge 0 \quad \hat{Q}_n(z) = \hat{P}_n(z).$$

Лемма 2. *Для любой односвязной ограниченной области G последовательность $\{\hat{Q}_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ является ОН-системой в $h^2(G)$,*

$$\langle \hat{Q}_i, \hat{Q}_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{6}$$

Доказательство. При $\operatorname{sign}(ij) \ge 0$ (6) следует из ортонормированности $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Пусть $i > 0$, $j < 0$, тогда

$$\langle \hat{Q}_i, \hat{Q}_j \rangle_{h^2} = \int_\Gamma \hat{P}_i(z)\hat{P}_j(z)\,d\omega(z). \tag{7}$$

По определению гармонической меры $\omega(\cdot, z_0)$

$$\forall f \in H(\overline{G}): \int_\Gamma f(z)\,d\omega(z) = f(z_0).$$

Так как при $n > 0$ имеем $\langle \hat{P}_n, \hat{P}_0 \rangle = 0$, то $\hat{P}_n$ ортогональны постоянным. Следовательно,

$$\forall n > 0: \int_\Gamma \hat{P}_n(z)\,d\omega(z) = \hat{P}_n(z_0) = 0.$$

В силу аналитичности $\hat{P}_i(z)\hat{P}_j(z) \in H(\overline{G})$ и

$$\langle \hat{Q}_i, \hat{Q}_j \rangle = \hat{P}_i(0)\hat{P}_j(0) = 0.$$

Если $i < 0$, $j > 0$, то в справедливости (6) убеждаемся, переходя в правой части равенства (7) к комплексно-сопряженным величинам.

***Замечание* 1.** Можно показать, что последовательность гармонических полиномов $\{B_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\deg B_n = |n|$ является ОН-системой в $H^2(G)$ тогда и только тогда, когда существуют действительное число α и унитарные матрицы A_n такие, что

$$B_0 = e^{i\alpha}\hat{Q}_0, \quad \begin{pmatrix} B_n \\ B_{-n} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} \hat{Q}_n \\ \hat{Q}_{-n} \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма дает необходимые условия ортогональности.

Лемма 3. *Если Q — гармонический многочлен,* $\deg Q = m$, *то для любого целого n*

$$(|n| > m) \Rightarrow (\langle Q, \hat{Q}_n \rangle = 0). \tag{8}$$

Доказательство. Представим Q в виде линейной комбинации элементов системы $\{\hat{Q}_k\}_{k=-m}^{m}$ и воспользуемся (6).

Утверждение 2. *Пусть Γ — произвольный эллипс, $P(z)$ — произвольный алгебраический полином степени m*

$$P(z) = \sum_{0 \le i+j \le m} a_{ij} z^i \bar{z}^j.$$

Тогда найдется гармонический полином $H(z)$ степени не выше m

$$H(z) = \sum_{0 \le k \le m} \alpha_k \operatorname{Re}(z^k) + \beta_k \operatorname{Im}(z^k)$$

такой, что для всех точек $z \in \Gamma$

$$P(z) = H(z).$$

Доказательство. Будем считать, что эллипс Γ задан параметрически

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi, \tag{9}$$

где $\varphi \in [0; 2\pi)$, $a \ge b$.

Используя эту параметризацию, представим $P(z)$ на Γ в виде тригонометрического многочлена

$$P(z) = P(x+iy) = P(a\cos\varphi + ib\sin\varphi) =$$
$$= \sum_{0\le k\le m} c_k \cos(k\varphi) + d_k \sin(k\varphi). \tag{10}$$

Для однородных гармонических многочленов параметризация (9) приводит к соотношениям

$$(a\cos\varphi + ib\sin\varphi)^k = \left(\frac{a+b}{2}e^{i\varphi} + \frac{a-b}{2}e^{-i\varphi}\right)^k =$$
$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{a+b}{2}\right)^l \left(\frac{a-b}{2}\right)^{k-l} e^{il\varphi} e^{-i\varphi(k-l)},$$

$$\operatorname{Re}(a\cos\varphi + ib\sin\varphi)^k =$$
$$= \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^k + \left(\frac{a-b}{2}\right)^k\right)\cos k\varphi + Q_{1k}(\cos\varphi, \sin\varphi), \tag{11}$$

$$\operatorname{Im}(a\cos\varphi + ib\sin\varphi)^k =$$
$$= \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^k - \left(\frac{a-b}{2}\right)^k\right)\sin k\varphi + Q_{2k}(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

где Q_{1k}, Q_{2k} — многочлены степени не выше $k-1$.

Докажем, что любой многочлен вида (10) является линейной комбинацией многочленов (11) порядка $k \le m$. Доказательство проведем индукцией по m.

Это очевидно при $m=0$. Пусть $m>0$. Поскольку для любого эллипса, не вырождающегося в отрезок,

$$0 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^m - \left(\frac{a-b}{2}\right)^m \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^m + \left(\frac{a-b}{2}\right)^m,$$

то, используя (10) и (11), получаем

$$P(a\cos\varphi + i\sin\varphi) = \alpha_m \operatorname{Re}(z^m) + \beta_m \operatorname{Im}(z^m) + Q(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

где

$$\alpha_m = c_m\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^m + \left(\frac{a-b}{2}\right)^m\right)^{-1},$$

$$\beta_m = d_m\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^m - \left(\frac{a-b}{2}\right)^m\right)^{-1},$$

а порядок $Q(\cos\varphi, \sin\varphi)$ не превышает $m-1$.

В силу предположения индукции Q является линейной комбинацией многочленов (11) порядка не выше $m-1$. Следовательно, для эллипсов (9) утверждение справедливо.

Осталось заметить, что после сдвига и поворота эллипса ситуация сводится к уже рассмотренной. При этих преобразованиях степени многочленов не изменяются, а гармонические многочлены переходят в гармонические.

Из утверждения 2 следует, что для области, ограниченной эллипсом, справедливо предложение более сильное, чем лемма 3.

Лемма 4. *Пусть граница области G — эллипс, тогда для любого алгебраического полинома Q*

$$(\deg Q < |n|) \Rightarrow \left(\int_{\Gamma} Q(z)\overline{\hat{Q}_n(z)}\, d\omega(z) = 0 \right).$$

Как известно, ограниченная область G называется областью Каратеодори, если ее граница совпадает с границей неограниченной компоненты дополнения к $\overline{G}$.

Лемма 5. *Пусть G — область Каратеодори, $f \in h^2(G)$, $S(z)$ — ряд Фурье функции f по ОН-системе $\{\hat{Q}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$*

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{Q}_n(z)\langle f, \hat{Q}_n \rangle. \tag{12}$$

Тогда ряд (12) *сходится к $f(z)$ равномерно на компактах из G.*

Доказательство. Так как G — область Каратеодори, то аналитические полиномы плотны в $H^2(G)$. Покажем, что гармонические полиномы плотны в $h^2(G)$. Пусть f — вещественная функция, а $\tilde{f}$ — ее гармонически сопряженная. Тогда $f + i\tilde{f} \in H^2(G)$. Это хорошо известно в круге, а дла области G следует из конформной инвариантности нормы в $h^2(G)$. Осталось приблизить $f + i\tilde{f}$ в $H^2(G)$ аналитическими полиномами P_n и взять $\operatorname{Re} P_n$. Наконец, произвольная функция f из $h^2(G)$ представима в виде $f = f_1 + i f_2$, где f_1, f_2 — вещественные функции из $h^2(G)$. Таким образом, ряд (12) сходится к f в $h^2(G)$.

Равномерная сходимость на компактах из G вытекает из (5).

***Доказательство теоремы* 1.** Докажем, что i) $\Rightarrow$ ii). Умножая правую и левую части в (3) скалярно на z, получаем

$$\langle \hat{P}_{n+1}, z \rangle = \alpha_n \int_{\Gamma} |z|^2\, \hat{P}_n(z)\, d\omega(z) + \beta_n \langle \hat{P}_n, z \rangle + \gamma_n \langle \hat{P}_{n-1}, z \rangle.$$

Пусть $n \geq 3$, в силу (8)

$$\langle \hat{P}_{n+1}, z \rangle = \langle \hat{P}_n, z \rangle = \langle \hat{P}_{n-1}, z \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha_n \int_{\Gamma} |z|^2\, \hat{P}_n(z)\, d\omega(z) = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{n+1} в правой и левой частях (3), находим

$$\alpha_n = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} > 0.$$

Таким образом, при $n \geq 3$

$$\int_{\Gamma} |z|^2\, \hat{P}_n(z)\, d\omega(z) = 0. \tag{13}$$

Пусть $f(z)$ — функция из $H(G)$, равная $|z|^2$ на ∂G. Существование и единственность такой функции следует из регулярности Γ относительно задачи Дирихле:

$$\Delta f = 0, \quad f|_\Gamma = |z|^2.$$

Разложим f в ряд Фурье (12). В силу (13) этот ряд может быть записан в виде

$$S(z) = \langle f, \hat{P}_0 \rangle + 2\operatorname{Re}\left(\langle f, \hat{P}_1 \rangle \hat{P}_1(z) + \langle f, \hat{P}_2 \rangle \hat{P}_2(z)\right).$$

Согласно лемме 5 $\forall z \in G$: $f(z) = S(z)$, а так как $f \in H(\overline{G})$, то на Γ

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\langle f, \hat{P}_1 \rangle \hat{P}_1(z) + \langle f, \hat{P}_2 \rangle \hat{P}_2(z)\right) = \langle f, \hat{P}_0 \rangle.$$

Таким образом, Γ — линия уровня многочлена второго порядка (или часть такой линии). Поскольку Γ ограничена и разбивает плоскость, то Γ — эллипс.

Проверим импликацию ii) $\Rightarrow$ i). Пусть

$$P(z) := \hat{P}_{n+1}(z) - \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} z \hat{P}_n(z).$$

Тогда

$$\langle P, \hat{P}_k \rangle = \langle \hat{P}_{n+1}, \hat{P}_k \rangle - \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \langle z\hat{P}_n, \hat{P}_k \rangle. \tag{14}$$

Пусть $k < n-1$, так как $\deg\left(z\overline{\hat{P}_k(z)}\right) \le k+1 < n$, Γ — эллипс, то в соответствии с леммой 4

$$\langle z\hat{P}_n, \hat{P}_k \rangle = \int_\Gamma \hat{P}_n(z)\, z\overline{\hat{P}_k}(z)\, d\omega(z) = 0.$$

Таким образом,

$$P(z) = \hat{P}_{n+1}(z) - \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} z\hat{P}_n(z) = \langle P, \hat{P}_n \rangle \hat{P}_n(z) + \langle P, \hat{P}_{n-1} \rangle \hat{P}_{n-1}(z), \tag{15}$$

что и доказывает первое утверждение теоремы.

Осталось доказать (4).

В силу (14), (15) и леммы 4

$$\gamma_n = \langle P, \hat{P}_{n-1} \rangle = -\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \langle z\hat{P}_n, \hat{P}_{n-1} \rangle =$$

$$= -\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \int_\Gamma \hat{P}_n(z)\, z\, \overline{\hat{P}_{n-1}}(z)\, d\omega(z) = -\frac{\mu_{n+1}\mu_{n-1}}{\mu_n} \int_\Gamma \hat{P}_n(z)\, z\bar{z}^{n-1}\, d\omega(z).$$

Согласно утверждению 2 полином $z\bar{z}^{n-1}$ представим на Γ в виде

$$z\bar{z}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (\nu_k \bar{z}^k + \theta_k z^k). \tag{16}$$

Следовательно, используя лемму 4, получаем

$$\gamma_n = -\frac{\mu_{n+1}\mu_{n-1}}{\mu_n} \sum_{k=0}^{n} \left(\nu_k \langle \hat{P}_n, z^k \rangle + \theta_k \langle \hat{P}_n, \bar{z}^k \rangle\right) =$$

$$= -\frac{\mu_{n+1}\mu_{n-1}}{\mu_n} \left(\nu_n \langle \hat{P}_n, z^n \rangle + \theta_n \langle \hat{P}_n, \bar{z}^n \rangle\right).$$

Как и при доказательстве леммы 2, видим, что $\langle \hat{P}_n, \bar{z}^n \rangle = 0$. Следовательно,

$$\gamma_n = -\frac{\mu_{n+1}\,\mu_{n-1}}{\mu_n} \nu_n \langle \hat{P}_n, z^n \rangle = -\frac{\mu_{n+1}\,\mu_{n-1}}{\mu_n^2} \nu_n . \tag{17}$$

Найдем коэффициент ν_n. Параметризуем эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ соотношениями $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. Функции $z\bar{z}^{n-1}$, z^k и $\bar{z}^k$ — тригонометрические полиномы — разложим по системе $\{e^{im\varphi}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$. Сравнивая коэффициенты при $e^{in\varphi}$ и $e^{-in\varphi}$, получаем систему уравнений

$$\theta_n \left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \nu_n \left(\frac{a-b}{2}\right)^n = \frac{a+b}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^{n-1},$$

$$\theta_n \left(\frac{a-b}{2}\right)^n + \nu_n \left(\frac{a+b}{2}\right)^n = \frac{a-b}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1}.$$

Отсюда

$$\nu_n = \frac{(a^2-b^2)[(a+b)^{2n-2} - (a-b)^{2n-2}]}{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}},$$

$$\theta_n = \frac{4ab(a^2-b^2)^{n-1}}{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}.$$

Подставляя найденное ν_n в (17), получаем (4).

3. Следствия основной теоремы. Анализируя приведенное доказательство теоремы 1, можно заметить, что условие „G — область Каратеодори" необходимо лишь для полноты системы $\{\hat{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $H^2(G)$.

Следовательно, справедливо следующее.

Утверждение 3. *Пусть G — ограниченная односвязная область и полиномы плотны в $H^2(G)$. Тогда условия* i) *и* ii) *теоремы* 1 *равносильны.*

Учитывая это утверждение и конформную инвариантность нормы в $H^2(G)$, можно придать теореме 1 более общую форму.

Пусть $g(z) \not\equiv 0$ — аналитическая функция, ограниченная в G. Легко видеть, что в $H^2(G)$ существует единственная ОН-система $\{\hat{P}_{ng}\}_{n=0}^{\infty}$ „полиномов" от $g(z)$ вида

$$\hat{P}_{ng}(z) = \psi_n (g(z))^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k (g(z))^k, \tag{18}$$

где $\psi_n > 0$.

Теорема 2. *Пусть G — односвязная область, $g \in H^{\infty}(G)$, $\{\hat{P}_{ng}\}_{n=0}^{\infty}$ — ОН-система полиномов вида* (18), *полная в $H^2(G)$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

j) *для любого натурального n существуют постоянные α_n, β_n, γ_n такие, что*

$$\forall z \in G: \ \hat{P}_{n+1,g}(z) = (\alpha_n g(z) + \beta_n)\hat{P}_{n,g}(z) + \gamma_n \hat{P}_{n-1,g}(z);$$

jj) *функция $w = g(z)$ конформно и однолистно отображает область G на внутренность эллипса.*

Если $w = g(z)$ *однолистно отображает* G *на внутренность эллипса, который в плоскости* $w = u + iv$ *задается уравнением*

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

то $\alpha_n = \dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$, *а для* γ_n *справедливо* (4).

Доказательство. Так как функции из $H^2(G)$ разделяют точки области G, то из полноты системы $\{\hat{P}_{ng}\}$ и неравенства (5) следует однолистность g. Пусть $\Omega := g(G)$ и $w_0 = g(z_0)$ — отмеченная точка области Ω.

Тогда из определения (1) следует, что оператор композиции

$$F_g\colon\ H^2(\Omega) \to H^2(G),$$

$$\forall f \in H^2(\Omega)\colon\ F_g(f) = f \circ g,$$

является изометрическим изоморфизмом пространств $H^2(\Omega)$ и $H^2(G)$. При этом изоморфизме „полиномам" от $g(z)$ в области G соответствуют обычные полиномы в Ω. Осталось воспользоваться теоремой 1 и утверждением 3.

Замечание 2. Плотность полиномов в $H^2(G)$ для областей Каратеодори доказана в [5]. Однако известно, что существуют луноообразные области [6], области типа круга с разрезом и кольца с разрезом [7] (очевидно, не являющиеся областями Каратеодори), для которых полиномы плотны в $H^2(G)$.

В классической теории многочленов, ортогональных на отрезке, непосредственным следствием трехчленной рекуррентной формулы является тождество Кристоффеля – Дарбу [2, с. 56].

Приведем аналог этого тождества для многочленов, ортогональных относительно гармонической меры на эллипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Пусть при $n \geq 0$

$$\delta_n := \left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\right]\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}},$$

$$\kappa_n := \alpha_n\delta_n = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n.$$

Тогда, используя (3) и (4), получаем

$$\delta_n(\hat{P}_{n+1}(z)\,\hat{P}_n(w) - \hat{P}_n(z)\,\hat{P}_{n+1}(w)) =$$

$$= \kappa_n(z-w)\,\hat{P}_n(z)\,\hat{P}_n(w) + \delta_{n-1}(\hat{P}_n(z)\,\hat{P}_{n-1}(w) - \hat{P}_{n-1}(z)\,\hat{P}_n(w)). \tag{19}$$

Теорема 3. *Пусть* Γ — *эллипс* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *тогда справедливы следующие равенства*:

$$\sum_{n=1}^{N} \kappa_n\,\hat{P}_n(z)\,\hat{P}_n(w) = \delta_N\,\frac{\hat{P}_{N+1}(z)\,\hat{P}_N(w) - \hat{P}_N(z)\,\hat{P}_{N+1}(w)}{z-w}, \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \kappa_n\,\hat{P}_n^2(z) = \delta_N(\hat{P}'_{N+1}(z)\,\hat{P}_N(z) - \hat{P}'_N(z)\,\hat{P}_{N+1}(z)). \tag{21}$$

Доказательство. Просуммировав (19) по n от единицы до N, получим (20). При $w \to z$ из (20) следует (21).

Теорема 4. *Пусть* Γ — *эллипс* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *а отмеченная точка* z_0 *лежит на действительной оси. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{N} \kappa_n \left|\hat{P}_n(z)\right|^2 = \delta_N \frac{\operatorname{Im}(\hat{P}_{N+1}(z)\hat{P}_N(z))}{\operatorname{Im}(z)}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть π_n — множество многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом. Из равенства Парсеваля и утверждения 1 следует, что существует единственный полином $P_n \in \pi_n$ такой, что

$$\| P_n \|_{H^2} = \min\{\| P_n \|_{H^2} \colon \; P \in \pi_n\}, \tag{23}$$

при этом

$$P_n(z) = \frac{1}{\mu_n} \hat{P}_n(z). \tag{24}$$

Пусть $P_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \bar{z}_i)$. Положим

$$\tilde{P}_n(z) := \prod_{i=1}^{n} (z - \bar{z}_i).$$

Так как $\operatorname{Im}(z_0) = 0$, а эллипс Γ симметричен относительно действительной оси, то

$$\| P_n \|_{H^2} = \| \tilde{P}_n \|_{H^2}.$$

Следовательно, из (23) получаем

$$P_n(z) = \tilde{P}_n(z),$$

а из последнего равенства и (24) следует, что коэффициенты $\hat{P}_n(z)$ — действительные числа. Полагая в (20) $w = \bar{z}$, простыми преобразованиями получаем (22).

1. *Duren P.* Theory of H^p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 158 p.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
3. *Довгошей А. А.* Об интегральных представлениях в классах Харди и наилучших приближениях в некоторых функциональных пространствах // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 342 – 347.
4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
5. *Caugharan J. G.* Polinomial approximation and spectral properties of composition operators in H^2 // Indiana Univ. Math. J. – 1971. – **21**, № 1. – P. 81 – 811.
6. *Akeroyd J.* Polynomial approximation in the mean with respect to harmonic measure on crescents // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – **303**. – P. 193 – 199.
7. *Akeroyd J.* Density of the polynomials in the Hardy space of certain slit domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – **115**, № 4. – P. 1013 – 1021.

Получено 09.03.99