УДК 519.21

В. А. Гасаненко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К АСИМПТОТИКЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕБЫВАНИЯ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА МЕЖДУ ДВУМЯ РАСХОДЯЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ

We present the complete asymptotic expansion for the probability of stay of a homogeneous Poisson process inside a domain with curvilinear boundaries. The coefficients of this expansion are determined by the solutions of parabolic problems with one and two boundaries.

Для ймовірності невиходу однорідного пуассонового процесу з області з криволінійними межами, що розширюється, одержано повний асимптотичний розклад. Коефіцієнти цього розкладу визначаються з допомогою розв'язків одно- і двомежових параболічних задач.

Пусть $\xi(t)$ — однородный процесс Пуассона с параметром λ. Рассмотрим вероятность пребывания нормированного процесса $\eta_\lambda(t) = (\xi(t) - \lambda t)/\sqrt{\lambda}$ в области, ограниченной с двух сторон функциями, зависящими от времени $b_1(t) < b_2(t)$:

$$P_\lambda(T) = \mathrm{P}(b_1(t) \le \eta_\lambda(t) \le b_2(t),\ t \in [0, T]),\ b_1(0) < 0 < b_2(0),\ \eta_\lambda(0) = 0.$$

Для вычисления этой вероятности используем следующую функцию, определенную, как в [1, с. 204]:

$$Q_\lambda(x, t) = \mathrm{P}\left\{\xi(s) - \xi(t) + x \in D_{s,\lambda}, \quad t \le s \le T\right\}.$$

Здесь область $D_{s,\lambda}$ изменения переменной x при фиксированной переменной $s \in [0, T]$ определяется следующим образом:

$$D_{s,\lambda} = \left[b_1(s)\sqrt{\lambda} + s\lambda,\ b_2(s)\sqrt{\lambda} + s\lambda\right].$$

Таким образом, $P_\lambda(T) = Q_\lambda(0, 0)$. В этой же работе [1, с. 205] доказано, что функция $Q_\lambda(x, t)$ — решение следующей дифференциально-разностной граничной задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_\lambda(x, t) + \lambda(Q_\lambda(x+1, t) - Q_\lambda(x, t))\,\mathbb{I}_{x+1}(D_{t,\lambda}) = 0, \tag{1}$$

$$x \in \operatorname{int} D_{t,\lambda}, \quad Q(x, t) = \mathbb{I}_x(D_{T,\lambda}), \quad Q(x, t) = 0 \text{ при } (x, t) \notin D_{t,\lambda}.$$

Здесь $\mathbb{I}_x(A)$ — функция-индикатор множества A.

Решение (1) широко исследовано в случае, когда границы постоянны или изменяются линейно. Так, еще в работе [2], где эта задача пребывания появилась в связи с одной проблемой секвенциального анализа, было получено решение (1) при постоянных границах в терминах преобразования Лапласа. Однако для удаляющихся границ изучение асимптотики вероятности пребывания — актуальная задача и в настоящее время [3, 4]. В работе [5] для исследования асимптотики решения задач типа (1) при $\lambda \to \infty$ было предложено использовать метод последовательного исчерпывания невязок с помощью построения пограничных слоев. В данной работе для асимптотического решения (1) также строятся функции погранслоя. Метод построения отличается от метода из работы [6], где регулярные функции и функции погранслоя в асимптотическом разложении решения (1) определялись соответственно с помощью параболических уравнений и уравнений Вольтерра. Предложенный нами метод позволяет строить все эти функции с помощью только параболических уравнений, что в некоторых случаях приводит к явному их представлению через тепловые потенциалы.

Докажем лемму об априорной оценке решения задачи (1). Пусть даны две функции $l_1(t) < l_2(t)$, $t \ge 0$. Положим

$$d_t := [l_1(t), l_2(t)]; \qquad S_t := \{(x,r)\colon 0<r<t, \quad l_1(r)<x<l_2(r)\};$$
$$\Gamma_t := \{((x,0), x\in d_0)\cup((y,r), y\ge l_2(r)\cup y\le l_1(r),\ 0\le r\le t)\}.$$

Лемма. *Пусть дана дифференциально-разностная начально-краевая задача*

$$\frac{d}{dt}q(x,t) - \int\limits_{x+y\in d_t}(q(x+y,t)-q(x,t))\pi_t(dy) = R(x,t), \qquad x\in d_t, \quad 0<t\le T;$$
$$q(x,0) = g(x)\mathbb{1}_x(d_0);$$
$$q(y,t) = F_1(y,t), \quad y\in(-\infty, l_1(t)], \qquad q(y,t) = F_2(y,t), \quad y\in[l_2(t),\infty).$$

Здесь $\pi_t(A)$ — некоторая положительная конечная мера на $[-\infty,\infty]$ при каждом фиксированном t. Тогда для любой фиксированной точки $t_1\in[0,T]$ справедливы следующие неравенства:

$$\sup_{\lambda>0}\min\left\{0;\ \min_{\Gamma_{t_1}}\left(e^{\lambda(t_1-t)}F_1(y,t), e^{\lambda(t_1-t)}F_2(y,t), e^{\lambda(t_1-t)}g(x)\right);\ \frac{1}{\lambda}\min_{S_{t_1}}\left(Re^{\lambda(t_1-t)}\right)\right\}\le$$
$$\le\ q(x,t_1)\ \le$$
$$\le\ \inf_{\lambda>0}\max\left\{0;\ \max_{\Gamma_{t_1}}\left(e^{\lambda(t_1-t)}F_1(y,t), e^{\lambda(t_1-t)}F_2(y,t), e^{\lambda(t_1-t)}g(x)\right);\ \frac{1}{\lambda}\max_{S_{t_1}}\left(Re^{\lambda(t_1-t)}\right)\right\}.$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме доказательства принципа максимума для параболических уравнений [7, с. 23]. Сделаем замену $q(x,t) = e^{\lambda t}u(x,t)$. Функция $u(x,t)$ — решение следующей задачи:

$$u_t + \lambda u = \int\limits_{x+y\in d_t}(u(x+y,t)-u(x,t))\,\pi_t(dy) + e^{-\lambda t}R(x,t), \quad x\in d_t, \tag{2}$$
$$u(x,0) = g(x)\mathbb{1}_{x\in d_0};$$
$$u(x,0) = e^{-\lambda t}F_1(y,t),\ y\le l_1(t), \qquad u(y,t) = e^{-\lambda t}F_2(y,t),\ y\ge l_2(t).$$

Возьмем произвольное $t_1\in[0,T]$. Возможны три случая: $u(x,t)$ — неположительна в S_{t_1} или наибольшее положительное значение принимается на множестве Γ_{t_1}, или это наибольшее значение принимается в некоторой точке $(x^0,t^0)\in S_{t_1}$. В первом случае $\max_{S_{t_1}}u(x,t)\le 0$; во втором $0<\max_{S_{t_1}}u(x,t)\le$ $\le\max_{\Gamma_{t_1}}u(x,t)$; в третьем $0<\max_{S_{t_1}}u(x,t)\le u(x^0,t^0)$, причем в точке (x^0,t^0) выполняются соотношения

$$u_t\ge 0, \quad u(x^0+y,t^0)-u(x^0,t^0)\le 0, \quad x^0+y\in d_{t^0}, \quad u_x=0, \quad u_{xx}\le 0. \tag{3}$$

Из первых двух соотношений из (3) и уравнения из (2) в точке (x^0,t^0) следует неравенство $\lambda u(x^0,t^0)\le e^{-\lambda t^0}R(x^0,t^0)$. Таким образом, во всех случаях справедлива оценка

$$\max_{S_{t_1}}u(x,t)\ \le\ \max\left\{0;\ \max_{\Gamma_{t_1}}u(x,t);\ \max_{S_{t_1}}\frac{R(x,t)\,e^{-\lambda t}}{\lambda}\right\},$$

из которой следует неравенство

$$q(x,t_1)\ \le\ e^{\lambda t_1}\max\left\{0;\ \max_{\Gamma_{t_1}}\left(q(x,t)\,e^{-\lambda t}\right);\ \lambda^{-1}\max_{S_{t_1}}\left(Re^{-\lambda t}\right)\right\}.$$

Таким образом, доказана оценка сверху. Аналогично, рассматривая точку наименьшего неположительного значения $u(x,t)$, получаем оценку снизу для $q(x,t)$.

Сделаем замену переменных в (1): $y = \dfrac{x - b_1(t)\sqrt{\lambda} - t\lambda}{\sqrt{\lambda}}$, $s = T - t$. Теперь (1) преобразуется в следующую задачу для $0 \le y \le \infty$, $0 \le s \le T$:

$$-\frac{\partial}{\partial s} q_\lambda(y,s) + \frac{\partial}{\partial y} q_\lambda(y,s) \frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s} q_\lambda(y,s) - \left(\dot{b}_1(T-s) + \sqrt{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial y} q_\lambda(y,s) = -\lambda\left(q_\lambda\left(y + \sqrt{\lambda},\, s\right) - q_\lambda(y,s)\right),$$

$$q_\lambda(y,s) = 0, \quad y \le 0 \vee y \ge b(s) \quad q_\lambda(y,0) = 1, \quad y \in [0, b(0)].$$

Здесь $b(s) = b_2(T-s) - b_1(T-s)$. Перепишем эту задачу в операторной форме. Обозначим через A_ε, $\varepsilon \to 0$, оператор, действующий на гладкие функции следующим образом:

$$A_\varepsilon f(y,s) = \left(\frac{\partial}{\partial s} - \left(\dot{b}_1(T-s) + \varepsilon^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \varepsilon^{-2}(I_\varepsilon - I)\right) f(y,s),$$

где I — тождественный оператор, $If = f$; I_δ — оператор сдвига по первой координате, $I_\delta f(y,s) = f(y+\delta, s)$. Переобозначив $\varepsilon^{-1} = \sqrt{\lambda}$, получим $P_\lambda(T) = q_\varepsilon(-b_1(0), T)$. Функция $q_\varepsilon(y,s)$ — решение следующей задачи:

$$A_\varepsilon q_\varepsilon(y,s) = 0, \quad y \in [0, b(s)], \quad 0 < s < T; \tag{4}$$

$$q_\varepsilon(y,s) = 0, \quad y \le 0 \vee y \ge b(s) \quad q_\varepsilon(y,0) = 1, \quad y \in [0, b(0)].$$

Далее введем несколько операторов, действующих в пространстве конечно-дифференцируемых функций. Положим

$$\Psi(z,\tau,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\left[e^{-\frac{(z-\xi)^2}{2\tau}} - e^{-\frac{(z+\xi)^2}{2\tau}}\right].$$

Теперь определим операторы

$$K_m f(z,\tau) = \frac{1}{(m+2)!}\int_0^\infty \int_0^\tau \Psi(z, \tau - t, \xi) \frac{\partial^{m+2} f(\xi, t)}{\partial \xi^{m+2}}\, dt\, d\xi, \quad m \ge 1;$$

$$B_\varepsilon f(z,\tau) = -\int_0^\infty \int_0^\tau \Psi(z, \tau - t, \xi)\, \dot{b}_1(T - t\varepsilon) \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi}\, dt\, d\xi.$$

Обозначим оператор B_ε при $\varepsilon = 1$ символом B. Тогда

$$Kg(\cdot)(z,\tau) = \int_0^\infty \Psi(z,\tau,\xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

$$Lf(y,s) = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \dot{b}_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{2\partial y^2}\right) f(y,s).$$

Для формулировки теоремы необходимо определить некоторые функции $b_{lm}(y,s)$, $a_{lm}(y,s)$, $\beta_l(y,s)$, $\sigma(l)$, $l \ge 0$, $m \ge 1$. Эти функции существенным образом зависят от четности индекса l. Функция $\sigma(l)$ — индикатор четности:

$$\sigma(l) = \begin{cases} 0, & \text{если } l = 2k, \\ 1, & \text{если } l = 2k+1, \quad k \ge 0. \end{cases}$$

Функции $b_{lm}(y,s)$, $a_{lm}(y,s)$, $\beta_l(y,s)$, $\sigma(l)$, $l \ge 0$, $m \ge 1$, вычисляются следующим образом. При фиксированных l и k определим специальное множество индексов

$$(l,k,\pm p,m) :=$$
$$:= \{(p,m)\colon 2m \pm p - \sigma(l+1-p) = k,\ 1 \le m \le [(l+1)/2],\ 1 \le p \le l+1\}.$$

Через $[x]$ будем обозначать максимальное целое число не больше x. Далее

$$\beta_0(y,s) = \frac{1}{2} K \mathbb{1}^{+}(\cdot)(y,s), \quad \mathbb{1}^{+}(y) = \mathbb{1}_y((0,\infty)),$$
$$b_{11}(y,s) = B\beta_0(y,s); \quad a_{11}(y,s) = K_1\beta_0(y,s).$$

С целью упрощения формул обозначим

$$r_{l+1,k}(y,s) = \sum_{(l,k,-p,m)} K_p b_{l+1-p,m}(y,s).$$

Теперь если l — нечетное число, то $l+1$-й набор функций определяется по предыдущим наборам с помощью следующих соотношений:

$$b_{l+1,j}(y,s) = Bb_{l,j-1}(y,s)\mathbb{1}_j(2 \le j \le [(l+2)/2]) + r_{l+1,2j}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le [(l-2)/2]);$$
$$\beta_{l+1}(y,s) = Ba_{l1}(y,s) + r_{l+1,0}(y,s);$$
$$a_{l+1,j}(y,s) = Ba_{l,j+1}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le (l+1)/2) + r_{l+1,-2j}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le [(l-2)/2]) +$$
$$+ K_{2j}\beta_{l+1-2j}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le (l+1)/2) +$$
$$+ \sum_{(l,2j,+p,m)} K_p r_{l+1-p,m}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le [(l+2)/2]).$$

Если l — четное число, то эти соотношения имеют вид

$$b_{l+1,j}(y,s) = Bb_{l,j-1}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le (l+2)/2) + r_{l+1,-2(j-1)}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le l/2);$$
$$a_{l+1,j}(y,s) = Ba_{lj}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le [(l+1)/2]) + r_{l+1,2j-1}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le l/2) +$$
$$+ K_{2j-1}\beta_{l+1-2(j-1)}(y,s)\mathbb{1}_j(1 \le j \le (l+2)/2) +$$
$$+ \sum_{(l,2j-1,+p,m)} K_p r_{l+1-p,m}(y,s)\mathbb{1}_j(2 \le j \le (l+2)/2).$$

Далее

$$v_{lm}(y,s) = b_{l,[(l+1)/2]-m}(y,s)\mathbb{1}_m(0 \le m \le [(l+1)/2]-1) +$$
$$+ (1-\sigma(l))\beta_l(y,s)\mathbb{1}_m([(l+2)/2]) + a_{lm}(y,s)\mathbb{1}_m([(l+1)/2]+1 \le m \le l).$$

Наконец положим

$$\hat{v}_l(y,s) = \sum_{k=l}^{n} v_{kl}(y,s).$$

Теорема. *Если функции $b_1(t)$, $b_2(t)$ имеют непрерывные первые производные, то справедливо следующее асимптотическое представление:*

$$P_\lambda(T) = \sum_{l=0}^{n} \lambda^{-\frac{l}{2}} \hat{v}_l(-b_1(0),T) + \sum_{l=0}^{n} \lambda^{-\frac{l}{2}} u_l(-b_1(0),T) + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}\right).$$

Функции $u_k(y,s)$, $0 \le y \le b(s)$, $0 \le s \le T$, *— решения следующих задач:*

$$Lu_0(y,s) = \alpha_0(y,s), \quad 0 < y < b(s), \quad 0 < s \le T;$$

$u_0(0,s) =$ [illegible], $\quad u_0(y,0) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_y([0,b(0))), \quad u_0(b(s),s) = -\hat{v}_0(b(s),s), \quad 0 \le s \le T;$

$$
\begin{aligned}
Lu_k(y,s) &= \sum_{m+1}^{k} \frac{(-1)^m}{(m+2)!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial y^{m+2}} u_{k-m}(y,s) + \alpha_k(y,s), \quad 0 < y < b(s), \quad 0 < s \le T;\\
u_k(0,s) &= 0, \quad u_k(b(s),s) = -\hat{v}_k(b(s),s), \quad 0 \le s \le T;\\
u_k(y,0) &= 0, \quad 0 \le y < b(0).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Функции $\alpha_k(y,s)$, $0 \le k \le n$, *определяются таким образом*:

$$
\alpha_0(y,s) = -\dot{b}_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y} v_{n0}(y,s);
$$

$$
\alpha_k(y,s) = -\dot{b}_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y} v_{nk}(y,s) + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial^{r+2}}{\partial y^{r+2}} \sum_{l=n+1-r}^{n} v_{l,k-r}(y,s).
$$

Доказательство. Решение задачи (4) определим как сумму двух функций:

$$
q_\varepsilon(y,s) = U_\varepsilon(y,s) + V_\varepsilon(z,\tau), \qquad z = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tau = \frac{s}{\varepsilon}.
$$

Функция U_ε представляет регулярную часть q_ε, а V_ε — функция погранслоя. Эти функции строятся с помощью рядов:

$$
U_\varepsilon(y,s) = \sum_{l\ge 1} \varepsilon^l u_l(y,s), \quad V_\varepsilon(z,\tau) = \sum_{l \ge 0} \varepsilon^{l/2} v_l(z,\tau). \tag{6}
$$

Частичные суммы из (6) обозначим соответственно $U_{n,\varepsilon}(y,s)$, $V_{n,\varepsilon}(z,\tau)$. Эти функции будем строить так, чтобы выполнялось соотношение

$$
q_{n,\varepsilon}(y,s) := q_\varepsilon(y,s) - \left(U_{n,\varepsilon}(y,s) + V_{n,\varepsilon}(z,\tau)\right) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \tag{7}
$$

Для класса функций, имеющих $n+3$-ю производную по y, определим оператор сдвига I_ε с помощью конечного фрагмента ряда Тейлора следующим образом:

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon f(y,s) &= I_\varepsilon f(y,s) + \sum_{l=1}^{l+2} \frac{(\varepsilon)^l}{l!}\frac{\partial^l}{\partial y^l} f(y,s) + \\
&+ \frac{\varepsilon^{n+3}}{(n+3)!} f^{(n+3)}(y-\theta_\varepsilon, s), \quad 0 \le \theta_\varepsilon \le \varepsilon.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Далее, делая замену (8) в операторной части (4), получаем уравнение для $q_{n,\varepsilon}(y,s)$:

$$
\begin{aligned}
A_\varepsilon q_{n,\varepsilon} = {}& \frac{\partial}{\partial s} U_{n,\varepsilon} + \dot{b}_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y} U_{n,\varepsilon} - \frac{\partial^2}{2\partial y^2} U_{n,\varepsilon} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(l+2)!}\varepsilon^l \frac{\partial^{l+2}}{\partial y^{l+2}} U_{n,\varepsilon} - \\
& - \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+3)!}\frac{\partial^{n+3}}{\partial y^{n+3}} U_{n,\varepsilon}(y-\theta_\varepsilon, s) + \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \tau} V_{n,\varepsilon} + \frac{\dot{b}_1(T-s)}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial z} V_{n,\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{2\partial z^2} V_{n,\varepsilon} - \sum_{l=1}^{n} \varepsilon^{l-\frac{l+2}{2}} \frac{1}{(l+2)!}\frac{\partial^{l+2}}{\partial z^{l+2}} V_{n,\varepsilon} - \\
& - \frac{\varepsilon^{(n-1)/2}}{(n+3)!}\frac{\partial^{n+3}}{\partial z^{n+3}} V_{n,\varepsilon}(z-\hat{\theta}_\varepsilon, \tau), \quad 0 \le \hat{\theta}_\varepsilon \le \sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Начнем построение решений (9), удовлетворяющих условию (7), с определения функций $v_l(z,\tau)$, $0 \le l \le n$. Следуя (9), функции v_l определяются как решения следующих задач:

$$\hat{L}v_0 = 0, \quad v_0(z,0) = \frac{1}{2}, \quad z > 0, \quad v_0(0,\tau) = 0,$$

$$\hat{L}v_l = -\dot{b}_1(T-\varepsilon\tau)\frac{\partial}{\partial z}v_{l-1} + \sum_{m=1}^{l}\frac{1}{(m+2)!}\frac{\partial^{m+2}}{2\partial z^{m+2}}v_{l-m},$$

$$v_l(0,\tau) = v_l(z,0) = 0, \quad z,\tau \geq 0, \quad l \geq 1. \tag{10}$$

Здесь оператор $\hat{L}$ имеет следующую запись: $\hat{L} := \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{2\partial z^2}$.

Следуя результатам монографии [8, с. 233], заключаем, что решения (10) имеют вид

$$v_0(z,\tau) = \frac{1}{2}K\mathbb{1}^+(\cdot)(z,\tau);$$

$$v_l(z,\tau) = B_\varepsilon v_{l-1}(z,\tau) + \sum_{m=1}^{l}K_m v_{l-m}(z,\tau). \tag{11}$$

Теперь с помощью полученных функций v_l определим функции u_l. С этой целью получим представление функций v_l в начальных переменных (y,s): $v_l(y/\sqrt{\varepsilon},\ s/\varepsilon)$. Следующие соотношения проверяются прямыми вычислениями:

$$v_0\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{s}{\varepsilon}\right) = v_0(y,s), \quad \frac{\partial^r}{\partial z^r}f(z,\tau)\big|_{z=y/\sqrt{\varepsilon},\tau=s/\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{r}{2}}\frac{\partial^r}{\partial y^r}f\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{s}{\varepsilon}\right).$$

Далее, если

$$\hat{\Psi}f(z,\tau) = \int_0^\infty\int_0^\tau \Psi(z,\tau-t,\xi)f(\xi,t)\,dt\,d\xi,$$

то

$$\hat{\Psi}f(z,\tau)\big|_{z=y/\sqrt{\varepsilon},\tau=s/\sqrt{\varepsilon}} = \varepsilon^{-1}\int_0^\infty\int_0^s \Psi(y,s-t,\xi)\,f\left(\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{t}{\varepsilon}\right)dt\,d\xi.$$

Использовав последние соотношения и (11), методом математической индукции докажем, что имеет место следующее представление:

$$v_l\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{s}{\varepsilon}\right) = \sum_{m=1}^{[(l+1)/2]}\varepsilon^{-\frac{2m-\sigma(l)}{2}}b_{lm}(y,s) + (1-\sigma(l))\,\beta_l(y,s) + \sum_{m=1}^{[(l+1)/2]}\varepsilon^{\frac{2m-\sigma(l)}{2}}a_{lm}(y,s). \tag{12}$$

Определения функций $b_{lm}(y,s)$, $a_{lm}(y,s)$, $\beta_l(y,s)$ даны в формулировке теоремы.

Для $l=0$, $\sigma(0)=0$ и $v_0(y/\sqrt{\varepsilon},\ s/\varepsilon) = v_0(y,s) =: \beta_0(y,s)$.

Для $l=1$, $\sigma(1)=1$, следуя (11), получаем

$$v_1\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{s}{\varepsilon}\right) = B_\varepsilon v_0\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{s}{\varepsilon}\right) + K_1 v_0\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{s}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}B\beta_0(y,s) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}K_1\beta_0(y,s).$$

Предположим, что формула (12) справедлива для всех v_r, $r \leq l$, и сделаем следующий шаг индукции. Если l — четное число, то, используя предположение индукции и (11), получаем

$$v_{l+1}\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{s}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}B\left(\sum_{m=1}^{[(l+1)/2]}\varepsilon^{-m}b_{lm}(y,s) + \beta_l(y,s) + \sum_{m=1}^{[(l+1)/2]}\varepsilon^{m}a_{lm}(y,s)\right) +$$

$$+\sum_{p=1}^{l+1}\varepsilon^{\frac{p}{2}}K_p\left(\sum_{m=1}^{[(l+1-p)/2]}\varepsilon^{-\frac{2m-\sigma(l+1-p)}{2}}b_{l+1-p,m}(y,s)+(1-\sigma(l+1-p))\beta_{l+1-p}(y,s)+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{[(l+1-p)/2]}\varepsilon^{\frac{2m-\sigma(l+1-p)}{2}}a_{l+1-p}(y,s)\right). \qquad (13)$$

Если n_1 и n_2 — два натуральных числа, то нетрудно доказать тождество $\sigma(|\sigma(|n_1\pm n_2|)\pm n_2|)\equiv\sigma(n_1)$. Применительно к выражениям в показателях степеней ε из (13) это тождество имеет следующий вид: $\sigma(|\sigma(l+1-p)\pm p|)=$ $=\sigma(l+1)$. Из последнего следует, что показатели степеней ε в слагаемых из (13) в случае четного l имеют вид $\pm(2m-1)/2$, $m\geq 1$. Заметим, что в (13) нет слагаемых с нулевым показателем степени ε, так как уравнение $2m-1=0$ в данном случае неразрешимо. Наконец, группируя слагаемые из (13) при одинаковых степенях ε, получаем нужное представление.

Для четного l доказательство проводится аналогично.

Из доказанного представления следует равенство

$$\varepsilon^{\frac{l}{2}}v_l\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{s}{\varepsilon}\right)=\sum_{m=0}^{l}\varepsilon^m v_{lm}(y,s).$$

Функции $v_{lm}(y,s)$ определены в формулировке теоремы.

Теперь построим функции $u_k(y,s)$. Они должны компенсировать возмущение, которое внесла частичная сумма $V_{n,\varepsilon}$, состоящая из уже построенных функций $v_l(z,\tau)$, в правую часть (9). Одновременно эта компенсация должна быть такая, чтобы условие (7) выполнялось для всей области изменения параметров: $\{-\infty\leq y\leq\infty,\ s\geq 0\}$.

Поскольку функции $v_l(z,\tau)$ — решения (10), то взнос частичной суммы $V_{n,\varepsilon}(z,\tau)$ в правую часть уравнения (9) имеет следующий вид:

$$\frac{\dot b_1(T-\tau\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon^{n/2}v_n(z,\tau)\right)-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=n+1}^{2n}\varepsilon^{k/2}\sum_{r+l=k,\,l\geq 0,\,r\geq 1}\frac{1}{(r+2)!}\frac{\partial^{r+2}}{\partial z^{r+2}}v_l(z,\tau)-$$

$$-\frac{\varepsilon^{(n-1)/2}}{(n+3)!}\frac{\partial^{n+3}}{\partial z^{n+3}}\left(\sum_{l=0}^{n}\varepsilon^{\frac{l}{2}}v_l(z-\hat\theta_\varepsilon,\tau)\right)=$$

$$=\dot b_1(T-s)\sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m\frac{\partial}{\partial y}v_{nm}(y,s)-\sum_{k=n+1}^{2n}\varepsilon^r\sum_{r+l=k,r\geq 1,l\geq 0}\sum_{m=0}^{l}\frac{\partial^r}{\partial y^r}v_{lm}(y,s)\varepsilon^m-$$

$$-\frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+3)!}\left(\sum_{l=0}^{n}\varepsilon^l\frac{\partial^{n+3}}{\partial z^{n+3}}\hat v_l(y-\theta_\varepsilon,s)\right)=$$

$$=\dot b_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y}v_{n0}(y,s)-$$

$$-\sum_{m=1}^{n}\varepsilon^m\left(\dot b_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y}v_{nm}(y,s)-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial^{r+2}}{\partial y^{r+2}}\sum_{l=n+1-r}^{n}v_{l,m-r}(y,s)\right)-$$

$$-\sum_{m=n+1}^{2n}\varepsilon^m\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^{r+2}}{\partial y^{r+2}}\sum_{l=n+1-r}^{n}v_{l,\min(m-r,n)}(y,s)-$$

$$-\frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+3)!}\left(\sum_{l=0}^{n}\varepsilon^l\frac{\partial^{n+3}}{\partial y^{n+3}}\hat v_l(y-\theta_\varepsilon,s)\right)=:-\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\alpha_k(y,t)+\varepsilon^{n+1}R_\varepsilon(y,s). \qquad (14)$$

По построению функции b_{lm}, a_{lm}, β_l представляют собой конечную сумму конечного числа итераций тепловых потенциалов, откуда следует, что

$$\sup_{-\infty<y<\infty,\ 0\le s\le T,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0} \max\left(\left|\frac{\partial^{n+3}}{\partial y^{n+3}}\hat{v}_k(y,s)\right|,\ 1\le k\le n\right) \le C < \infty. \qquad (15)$$

Здесь ε_0 — произвольное фиксированное положительное число. Далее, так как функции α_k из последней суммы в (14) входят в правые части уравнений для функций $u_k(y,s)$, $1\le k\le n$, то после определения u_k эта сумма исчезает. Отметим, что разрешимость задач для определения u_k и v_k следует из известных теорем для параболических уравнений. Таким образом, правая часть в уравнении (9) после приведенного построения функций u_k и v_k будет иметь вид

$$-\sum_{k=n+1}^{2n}\varepsilon^k\sum_{l+m=k}\frac{(-1)^n}{(n+2)!}\frac{\partial^{l+2}}{\partial y^{l+2}}u_m(y,s) - \frac{\varepsilon^{n+3}}{(n+3)!}\left(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(y-\theta_\varepsilon, s)\right) +$$

$$+\ \varepsilon^{n+1}R_\varepsilon(y,s) =:\ \varepsilon^{n+1}\hat{R}_\varepsilon(y,s).$$

Из этого построения следует оценка

$$\sup_{y\in(-\infty,\infty),\ s\ge0}\left|\hat{R}(y,s)\right| \le C_1 < \infty.$$

Поскольку имеет место (15), то следующее продолжение $\tilde{V}_{n,\varepsilon}(z,\tau)$ частичной суммы $V_{n,\varepsilon}(z,\tau)$ на область $(z\le0,\ \tau\ge0)$: $\tilde{V}_{n,\varepsilon}(z,\tau)$, $z\le 0 = V_{n,\varepsilon}(-z,\tau)$, $z\ge$ ≥ 0, является корректным. Частичную сумму $U_{n,\varepsilon}(y,s)$ для $y\le0\vee y\ge b(s)$ определим из условий $U_{n,\varepsilon}(y,s) = -V_{n,\varepsilon}(y/\sqrt{\varepsilon},\ s/\varepsilon)$. Последнее выполняется, если положить $u_k(y,s)|_{y\le0} = -\hat{v}_k(y,s)|_{y\le0}$ и $u_k(y,s)|_{y\ge b(s)} = -\hat{v}_k(y,s)|_{y\ge b(s)}$. Таким образом, $q_{n,\varepsilon}(y,s)$ — решение следующей задачи:

$$A_\varepsilon q_{n,\varepsilon}(y,s) = \varepsilon^{n+1}\hat{R}(y,s), \quad 0<y<b(s), \quad 0\le s\le T;$$

$$q_{n,\varepsilon}(y,s) = 0, \quad y\le0\vee y\ge b(s), \quad 0\le s\le T.$$

Теперь, используя лемму при $\pi_t(dy) = \pi_t(\{1\}) = \lambda$, заключаем, что выполнено (7). Теорема доказана.

Особенность предложенного разложения — полный пересчет коэффициентов частичного асимптотического ряда при увеличении точности приближения, т. е. при вычислении следующего члена асимптотики. Если мы, например, ищем приближение $P_T = c_0 + O(\lambda^{-1/2})$, то c_0 определяется следующим образом. Вначале устанавливается $\beta_0(y,s)$, затем определяется функция $u_0(y,s)$ как решение следующей начально-краевой задачи:

$$Lu_0(y,s) = -\dot{b}_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y}\beta_0(y,s), \quad 0<y<b(s), \quad 0<s\le T;$$

$$u_0(0,s) = 0, \quad u_0(y,0) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_y([0,b(0))),$$

$$u_0(b(s),s) = -\beta_0(b(s),s), \quad 0\le s\le T.$$

Наконец, вычисляем c_0 по формуле

$$c_0 = \beta_0(-b_1(0),T) + u_0(-b_1(0),T).$$

Далее, если ищем приближение более точное: $P_T = c_0 + c_1\lambda^{-1/2} + O(\lambda^{-1})$, то в этом случае $u_0(y,s)$ определяется как решение задачи

$$Lu_0(y,s) = -\dot{b}_1(T-s)\frac{\partial}{\partial y}(B\beta_0(y,s)), \quad 0 < y < b(s), \quad 0 < s \le T;$$

$$u_0(0,s) = 0, \quad u_0(y,0) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_y([0,b(0))),$$

$$u_0(b(s),s) = -(\beta_0(b(s),s) + B\beta_0(b(s),s)), \quad 0 \le s \le T.$$

Затем c_0 вычисляется по формуле

$$c_0 = \beta_0(-b_1(0),T) + B\beta_0(-b_1(0),T) + u_0(-b_1(0),T).$$

Такая ситуация связана с тем, что новый $n+1$-й член разложения v_{n+1} вносит такое возмущение, которое можно погасить, только изменив все члены разложения u_l, $l \le n+1$.

Эта ситуация упрощается в случае постоянства одной из границ $b_i(s)$. Если, например, $b_1(s) = b_1 = \text{const}$, то в этом случае исчезает оператор B_ε и для компенсации возмущения нового $n+1$ члена разложения v_{n+1} достаточно правильно построить один новый член разложения u_{n+1}. В этом случае мы можем, например, окончательно, описать c_0 (как и все остальные c_k, $k \ge 1$) вне зависимости от степени приближения. А именно, c_0 вычисляется по формуле $c_0 = \beta_0(-b_1, T) + u_0(-b_1, T)$, где $u_0(y,s)$ — решение следующей задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{2\partial y^2}\right)u_0(y,s) = 0, \quad 0 < y < b(s);$$

$$u_0(0,s) = 0, \quad u_0(y,0) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_y([0,b(0))), \quad u_0(b(s),s) = -\beta_0(b(s),s), \quad 0 \le s \le T.$$

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
2. *Dvoretsky A., Kiefer J., Wolfowitz J.* Sequential decision problem for processes with continuous time-parameter. Testing hypotheses // Ann. Math. Statist. – 1953. – **24**. – P. 254 – 264.
3. *DeLucia J., Poor H. V.* The moment generating function of the stopping time for a linearly stopped Poisson process // Communs Statist.-Stochast. Models. – 1997. – **13**, № 2. – P. 275 – 292.
4. *Loader C. R.* Boundary crossing probabilities for locally Poisson processes // Ann. Appl. Probab. – 1992. – **2**, № 1. – P. 199 – 228.
5. *Королюк В. С.* Об асимптотике некоторых функционалов в решетчатой схеме блуждания // Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – **6**, № 3. – С. 334 – 341.
6. *Королюк В. С., Гусак Д. В.* К асимптотике распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 2. – С. 138 – 144.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

Получено 23.12.99