УДК 530.145

А. М. Павлюк, $\boxed{\text{В. А. Яцун}}$ (Ін-т теорет. фізики НАН України, Київ)

РІВНЯННЯ РУХУ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В СУПЕРСИМЕТРИЧНІЙ ТЕОРІЇ ЯНГА – МІЛЛСА ІЗ СКАЛЯРНИМ МУЛЬТИПЛЕТОМ

We propose a system of first order equations of motion whose all the solutions are solutions of a system of second order equations of motion for supersymmetric Yang–Mills theory with a scalar multiplet. We find $N = 1$ transformations such that systems of first and second order equations of motion are invariant with respect to them.

Запропоновано систему рівнянь руху першого порядку, всі розв'язки якої є розв'язками системи рівнянь руху другого порядку для суперсиметричної теорії Янга – Міллса із скалярним мультиплетом. Знайдено такі $N = 1$ перетворення, відносно яких інваріантні системи рівнянь руху першого та другого порядків.

Задача дослідження нелінійних рівнянь Янга – Міллса (ЯМ) полегшується завдяки високому ступеню симетричності калібрувальних теорій. Пошук розв'язків, що характеризуються різного роду симетріями, — один із шляхів інтегрування рівнянь руху неабелевих калібрувальних теорій. Зокрема, розгляд автодуальних полів дає можливість звести систему рівнянь руху, яка є системою диференціальних рівнянь другого порядку, до системи диференціальних рівнянь першого порядку, що значно полегшує пошук розв'язків.

Наявність автодуальних конфігурацій ЯМ з нетривіальними топологічними властивостями (монополі, інстантони) стимулює пошук можливих узагальнень принципу автодуальності в теоріях ЯМ за наявності скалярних полів. В основі одного з ефективних методів побудови неавтодуальних конфігурацій калібрувальних полів з нетривіальними топологічними властивостями лежить концепція квазіавтодуального калібрувального поля, введена В. А. Яцуном [1, 2].

У цій роботі шляхом узагальнення системи рівнянь квазіавтодуальності одержано систему рівнянь руху першого порядку (РРПП) для суперсиметричної теорії ЯМ у просторі Мінковського з метричним тензором $\eta = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$, яка визначається двома мультиплетами компонентних полів — векторним V і скалярним Φ мультиплетами:

$$V = \left(V_m; \overline{\lambda}_\alpha; \overline{\lambda}_{\dot\alpha}; D\right), \qquad \Phi = \left(A, B; \psi_\alpha; \overline{\psi}_{\dot\alpha}; F, G\right).$$

Всі поля задані в приєднаному зображенні калібрувальної групи $SU(2)$. Калібрувально-інваріантний суперсиметричний лагранжіан теорії має вигляд [3] (в термінах вейлівських спінорів)

$$L = \mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} - i\overline{\lambda}\overline{\sigma}^m\mathcal{D}_m\lambda - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_mA)^2 - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_mB)^2 - i\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^m\mathcal{D}_m\psi + \right.$$

$$\left. + igD[A, B] + ig(A+iB)\left\{\lambda^\alpha, \psi_\alpha\right\} + ig(A-iB)\left\{\overline{\lambda}_{\dot\alpha}, \overline{\psi}^{\dot\alpha}\right\} + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2\right\}, \tag{1}$$

де $F_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m + ig[V_m, V_n]$ — тензор напруженості ЯМ; $\mathcal{D}_m = \partial_m + ig[V_m, \cdot]$ — коваріантна похідна.

Перейдемо від лоренцевих індексів до спінорних за правилом $x_m \to x_{\alpha\dot\alpha} = \sigma^m_{\alpha\dot\alpha}x_m$. Тут вжито позначення $\sigma^m = (-1, \overline{\sigma})$, де 1 — одинична (2×2)-вимірна матриця, $\overline{\sigma}$ — матриці Паулі. Спінорні індекси піднімаються і опускаються за допомогою спінорного ε-тензора

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, \quad \psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\psi^{\dot\beta}, \quad \psi^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\psi_{\dot\beta}.$$

Іншими словами, $\psi_1 = -\psi^2$, $\psi_2 = \psi^1$; аналогічно для точкових індексів. Двовимірний ε-тензор антисиметричний за індексами α і β, $\alpha, \beta = 1, 2$, і набуває таких значень: $\varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -\varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = +1$. Відомо, що антисиметричний тензор F_{mn} у спінорних позначеннях можна записати в такому вигляді:

$$F_{mn} \to F_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta}} \equiv \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^n_{\beta\dot{\beta}}F_{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}f_{\alpha\beta},$$

де

$$f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \varepsilon^{\alpha\gamma}F_{\gamma\dot{\alpha},\alpha\dot{\beta}}, \quad f_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}F_{\alpha\dot{\gamma},\beta\dot{\alpha}}.$$

Теорія (1) коваріантна щодо наступних суперсиметричних перетворень:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi(A - iB) &= 2\xi\psi, \\
\delta_{\bar{\xi}}(A + iB) &= 2\bar{\xi}\bar{\psi}, \\
\delta_\xi V_{\alpha\dot{\alpha}} &= -2i\left(\xi_\alpha\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\lambda_\alpha\right), \\
\delta_\xi D &= -\xi^\alpha\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\lambda_\alpha, \\
\delta_\xi(F + iG) &= 2i\bar{\xi}_{\dot{\beta}}\left(\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\psi_\alpha + g\left[\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}, A - iB\right]\right), \\
\delta_\xi(F - iG) &= 2i\xi^\alpha\left(\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\psi^{\dot{\beta}} + g\left[\lambda_\alpha, A + iB\right]\right), \\
\delta_\xi\lambda_\alpha &= \frac{1}{2}\xi^\beta(f_{\alpha\beta} + 2i\varepsilon_{\alpha\beta}D), \\
\delta_\xi\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\left(f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - 2i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}D\right), \\
\delta_\xi\psi_\alpha &= i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}(A - iB) + \xi_\alpha(F + iG), \\
\delta_\xi\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= -i\xi^\alpha\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}(A + iB) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}(F - iG),
\end{aligned} \tag{2}$$

де ξ_α, $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ — параметри суперсиметричних перетворень. Генератори групи суперсиметричних перетворень мають вигляд

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\partial_{\alpha\dot{\alpha}}.$$

Запишемо систему рівнянь руху теорії (1):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\gamma}}f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot{\beta}}f_{\alpha\beta} + 8g\left(\left\{\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}\right\} + \left\{\psi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\beta}}\right\}\right) - \\
&- 2ig\left(\left[A - iB, \mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}(A + iB)\right] + \left[A + iB, \mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}(A - iB)\right]\right) = 0, \\
&\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\mathcal{D}^{\alpha\dot{\beta}}(A - iB) - 4ig\left\{\lambda^\alpha, \psi_\alpha\right\} - 2g[D, A - iB] = 0, \\
&\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\mathcal{D}^{\alpha\dot{\beta}}(A + iB) - 4ig\left\{\lambda_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\right\} + 2g[D, A + iB] = 0, \\
&D + ig[A, B] = 0, \\
&F = G = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}\lambda_\alpha - g\left[\overline{\psi}^{\dot\beta}, A-iB\right] = 0,$$

$$\mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}\overline{\lambda}^{\dot\beta} - g[\psi_\alpha, A+iB] = 0,$$

$$\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}\psi_\alpha + g\left[\overline{\lambda}^{\dot\beta}, A-iB\right] = 0,$$

$$\mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}\psi^{\dot\beta} + g[\lambda_\alpha, A+iB] = 0.$$

Система рівнянь руху (3) включає як диференціальні рівняння другого порядку (для бозонних полів), так і диференціальні рівняння першого порядку (для ферміонних полів). Рівняння руху для допоміжних полів — чисто алгебраїчні співвідношення. Вони не описують еволюцію в просторі-часі.

Розглянемо наступну задачу: знайти систему РРПП, всі розв'язки якої були б розв'язками системи рівнянь руху другого порядку (3). Основна трудність полягає в тому, щоб „вгадати" РРПП для бозонних полів. Зробимо це шляхом узагальнення відповідної системи рівнянь квазіавтодуальності.

Вперше задачу про рівняння квазіавтодуальності для суперсиметричної теорії ЯМ із скалярним мультиплетом розглянув В. А. Яцун в 1991 р. У роботі [4] було запропоновано приклад квазіавтодуальної системи для бозонного сектора цієї теорії в чотиривимірному евклідовому просторі. Ця система в спінорних позначеннях у просторі Мінковського має вигляд [5]

$$\begin{aligned} f_{11} &= f_{22} = 0, \\ f_{12} &= -2g[A, B], \\ \mathcal{D}_{2\dot\beta}(A-iB) &= 0, \\ \mathcal{D}_{1\dot\beta}(A+iB) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Узагальнюючи цю систему, одержуємо систему РРПП для бозонного сектора теорії (1), а потім шляхом суперсиметризації приєднаємо ферміонний сектор.

Теорема 1. *Система рівнянь руху другого порядку для бозонного сектора теорії (1)*

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}f_{\alpha\beta} - ig\left(\left[A-iB, \mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}(A+iB)\right]+\left[A+iB, \mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}(A-iB)\right]\right) &= 0, \\ \mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}(A-iB) - 2g[D, A-iB] &= 0, \\ \mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}(A+iB) + 2g[D, A+iB] &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

задовольняється на полях, що є розв'язками системи рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= 2gc_{\alpha\beta}[A, B], \\ (c_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}(A-iB) &= 0, \\ (c_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}(A+iB) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

де $c_{\alpha\beta}$ *— комплексні сталі коефіцієнти, що задовольняють умови*

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} \tag{7}$$

і

$$\det\|c_{\alpha\beta}\| \equiv c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \equiv \frac{1}{2}c^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = -1. \tag{8}$$

Доведення. Відмітимо, що при запису першого рівняння системи (5) враховано тотожність Біанкі:

$$\mathcal{D}_{\alpha}^{\beta} f_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_{\alpha}^{\dot\beta} f_{\dot\alpha\dot\beta}.$$

Тепер обгрунтуємо необхідність умов (7) і (8). Симетричність $c_{\alpha\beta}$ щодо перестановки індексів α і β випливає із симетричності біспінорних величин $f_{\alpha\beta}$. Розписуючи друге рівняння системи (6), одержуємо систему двох лінійних однорідних рівнянь зі змінними $\mathcal{D}_{1\dot\beta}(A-iB)$ і $\mathcal{D}_{2\dot\beta}(A-iB)$. Ця система матиме нетривіальні, відмінні від нуля розв'язки лише тоді, коли її детермінант дорівнюватиме нулю. Враховуючи, що $c_{12} = c_{21}$, маємо

$$\det\left\| c_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha} \right\| = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12}+1 \\ c_{12}-1 & c_{22} \end{Vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 + 1 = 0,$$

тобто одержуємо умову (8). Аналогічно, із третього рівняння системи (6) випливає

$$\det\left\| c_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} \right\| = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12}-1 \\ c_{12}+1 & c_{22} \end{Vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 + 1 = 0,$$

тобто знову отримали умову (8).

Для доведення теореми від першого рівняння системи (6) візьмемо коваріантну похідну $\varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}$, а від другого і третього рівнянь — коваріантну похідну $\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}$. Одержимо систему рівнянь другого порядку:

$$\begin{gathered} \varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}\left(f_{\alpha\beta} - 2gc_{\alpha\beta}[A,B]\right) = 0, \\ \left(c_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}\right)\varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}(A-iB) = 0, \\ \left(c_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}\right)\varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}(A+iB) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Як показує безпосередня перевірка, система (9) збігається із системою (5), якщо виконуються умови (6) – (8) теореми. Звідси випливає, що система рівнянь другого порядку (5) задовольняється на полях, що є розв'язками системи рівнянь першого порядку (6) (зауважимо, що обернене твердження не вірне). Теорему доведено.

Теорема 2. *Повна система рівнянь руху* (3) *задовольняється на полях, що є розв'язками наступної системи рівнянь першого порядку*:

$$\begin{gathered} f_{\alpha\beta} = 2gc_{\alpha\beta}[A,B], \\ \left(c_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}\right)\varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}(A-iB) = 0, \\ \left(c_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}\right)\varepsilon^{\beta\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\dot\beta}(A+iB) = 0, \\ D + ig[A,B] = 0, \\ F = G = 0, \\ \mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}\overline{\lambda}^{\dot\beta} - g[\psi_\alpha, A+iB] = 0, \\ \mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}\psi_\alpha + g\left[\overline{\lambda}^{\dot\beta}, A-iB\right] = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

$$(c_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta})\psi^{\beta} = 0,$$
$$\lambda_{\alpha} = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = 0.$$

Система (10) *коваріантна щодо суперсиметричних перетворень* (2) *у підпросторі параметрів цих перетворень, який визначається такою умовою:*

$$(c_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon^{\beta} = 0. \tag{11}$$

Доведення. Оскільки система (10) включає рівняння $\lambda_{\alpha} = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = 0$, то всі спінорні антикомутатори в рівняннях руху дорівнюють нулю. Тому перші три рівняння системи (3) зводяться до рівнянь руху для бозонних полів, які розглядались в теоремі 1. Доповнимо систему (6) рівняннями руху для допоміжних та спінорних полів, які не дорівнюють нулю. Одержана система задовольняє систему рівнянь руху (3). Як показує безпосередня перевірка, вона не коваріантна щодо суперсиметричних перетворень (2) в усьому просторі параметрів суперсиметричних перетворень. Проте, накладаючи додаткові обмеження на спінорні поля

$$(c_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta})\psi^{\beta} = 0, \tag{12}$$

одержуємо систему (10), яка коваріантна щодо суперсиметричних перетворень (2) у підпросторі параметрів цих перетворень (11). Теорему доведено.

Наслідок 1. *Система рівнянь першого порядку* (10) *і може бути записана в такому вигляді:*

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta} &= 2g c_{\alpha\beta}[A, B],\\
\mathcal{D}_{1\dot{\alpha}}(A - iB) &= k_1 \mathcal{D}_{2\dot{\alpha}}(A - iB),\\
\mathcal{D}_{1\dot{\alpha}}(A + iB) &= k_2 \mathcal{D}_{2\dot{\alpha}}(A + iB),\\
D + ig[A, B] &= 0,\\
F = G &= 0,\\
\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\lambda}^{\dot{\beta}} - g[\psi_{\alpha}, A + iB] &= 0,\\
\mathcal{D}^{\alpha\dot{\beta}}\psi_{\alpha} + g\left[\overline{\lambda}^{\dot{\beta}}, A - iB\right] &= 0,\\
\lambda_{\alpha} = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} &= 0,\\
\psi_1 &= k_1 \psi_2,
\end{aligned} \tag{13}$$

де коефіцієнти k_1, k_2 *визначаються співвідношеннями*

$$k_1 = \frac{c_{11}}{c_{12} + 1} = \frac{c_{12} - 1}{c_{22}}, \quad k_2 = \frac{c_{11}}{c_{12} - 1} = \frac{c_{12} + 1}{c_{22}}. \tag{14}$$

Система (13) *інваріантна відносно суперсиметричних перетворень* (2) *у підпросторі параметрів, який визначається умовою*

$$\xi_1 = k_2 \xi_2. \tag{15}$$

Доведення. Покладаючи в другому рівнянні системи (10) почергово $\alpha = 1$ і $\alpha = 2$, одержуємо систему двох рівнянь:

$$(c_{12} + 1)\mathcal{D}_{1\dot{\beta}}(A - iB) - c_{11}\mathcal{D}_{2\dot{\beta}}(A - iB) = 0,$$
$$c_{22}\mathcal{D}_{1\dot{\beta}}(A - iB) - (c_{12} - 1)\mathcal{D}_{2\dot{\beta}}(A - iB) = 0.$$

Внаслідок умови (8) ці рівняння є лінійно залежними, а тому їх можна замінити одним рівнянням

$$\mathcal{D}_{1\dot\alpha}(A-iB)=k_1\mathcal{D}_{2\dot\alpha}(A-iB),$$

де

$$k_1=\frac{c_{11}}{c_{12}+1}=\frac{c_{12}-1}{c_{22}}.$$

Аналогічно, третє рівняння системи (10) замінюємо системою двох лінійно залежних рівнянь

$$(c_{12}-1)\mathcal{D}_{1\dot\beta}(A+iB)-c_{11}\mathcal{D}_{2\dot\beta}(A+iB)=0,$$

$$c_{22}\mathcal{D}_{1\dot\beta}(A+iB)-(c_{12}+1)\mathcal{D}_{2\dot\beta}(A+iB)=0,$$

які можна замінити одним рівнянням

$$\mathcal{D}_{1\dot\beta}(A+iB)=k_2\mathcal{D}_{2\dot\alpha}(A+iB),$$

де

$$k_2=\frac{c_{11}}{c_{12}-1}=\frac{c_{12}+1}{c_{22}}.$$

Подібним чином розписуються рівняння $\left(c_{\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\beta}\right)\psi^{\beta}=0$, $\left(c_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta}\right)\xi^{\beta}=0$. Наслідок доведено.

Зауважимо, що система (4) одержується із бозонного сектора системи (13) при наступних значеннях коефіцієнтів

$$c_{11}=c_{22}=0,\quad c_{12}=-1,\quad k_1=\infty,\quad k_2=0.$$

Система РРПП (13) інваріантна відносно перетворень, які одержуються із (2) при врахуванні умови (15). Щоб записати ці перетворення в явному вигляді, в (2) слід зробити наступні підстановки:

$$\xi^{\alpha}\to-\xi^1(k\varepsilon^{1\alpha}+\varepsilon^{2\alpha}),\quad \xi_{\alpha}\to\xi^1(k\varepsilon_{2\alpha}-\varepsilon_{1\alpha}).$$

Одержані перетворення утворюють 3-параметричну підгрупу 4-параметричної групи суперсиметричних перетворень (2). Генератори підгрупи мають вигляд

$$\hat{Q}_1=\frac{\partial}{\partial\theta^1}+i\bar\theta^{\dot\alpha}(k_2\varepsilon^{1\alpha}+\varepsilon^{2\alpha})\partial_{\alpha\dot\alpha},\quad \hat{\bar{Q}}_{\dot\alpha}=-\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}-i\theta^1(k_2\varepsilon^{1\alpha}+\varepsilon^{2\alpha})\partial_{\alpha\dot\alpha}.$$

Отже, система РРПП у суперсиметричній теорії ЯМ із скалярним мультиплетом інваріантна стосовно підгрупи $N=1$ суперсиметричних перетворень в тривимірному підпросторі чотиривимірного простору параметрів цих перетворень. У зв'язку з цим виникає задача: знайти такі $N=1$ суперсиметричні перетворення, в які б входили незалежним чином всі чотири параметри і відносно яких була б інваріантною як система РРПП (13), так і система рівнянь руху (3). Цю задачу розв'язуємо таким чином. Спочатку запишемо систему РРПП у термінах компонентних полів $N=2$ теорії ЯМ і знайдемо підгрупу інваріантності цієї системи. Ця підгрупа визначається 4 параметрами (сама ж група $N=2$ суперсиметричних перетворень задається 8 параметрами). Оскільки група $N=1$ перетворень є 4-параметричною, то за допомогою редукції із 4-параметричної підгрупи $N=2$ перетворень одержимо групу $N=1$ перетворень, яка є шуканою групою інваріантності. В результаті одержуємо наступну систему $N=1$ інфінітезимальних перетворень

$$\delta_\xi (A - iB) = 2\xi\lambda,$$

$$\delta_{\dot\xi} (A + iB) = 2\bar\xi\bar\psi,$$

$$\delta_\xi V_{\alpha\dot\alpha} = 2i\left(\xi_\alpha \bar\psi_{\dot\alpha} - \bar\xi_{\dot\alpha}\lambda_\alpha\right),$$

$$\delta_\xi D = \xi^\alpha \mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} + \bar\xi_{\dot\alpha}\mathcal{D}^{\alpha\dot\alpha}\lambda_\alpha,$$

$$\delta_\xi (F + iG) = 2i\xi^\alpha\left(\mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}\bar\lambda^{\dot\beta} - g\left[\psi_\alpha, A + iB\right]\right) +$$

$$+ 2i\bar\xi_{\dot\beta}\left(\mathcal{D}^{\alpha\dot\beta}\psi_\alpha + g\left[\bar\lambda^{\dot\beta}, A - iB\right]\right),$$

$$\delta_\xi (F - iG) = 0,$$

$$\delta_\xi \lambda_\alpha = \xi_\alpha (F - iG),$$

$$\delta_\xi \bar\lambda_{\dot\alpha} = \frac{1}{2}\bar\varepsilon^{\dot\beta}\left(f_{\dot\alpha\dot\beta} - 2i\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}D\right) - i\xi^\alpha\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}(A + iB),$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = -\frac{1}{2}\xi^\beta\left(f_{\alpha\beta} + 2i\varepsilon_{\alpha\beta}D\right) + i\bar\xi^{\dot\alpha}\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}(A - iB),$$

$$\delta_\xi \bar\psi_{\dot\alpha} = \xi_{\dot\alpha}(F - iG).$$

Безпосередня перевірка показує, що ці перетворення утворюють алгебру, причому ця алгебра є алгеброю інваріантності системи РРПП (10), (13), а також системи рівнянь руху (3).

1. *Yatsun V. A.* Integrable Model of Yang – Mills theory and quasi-instantons // Lett. Math. Phys. – 1986. – **11**, № 1. – P. 153 – 159.
2. *Яцун В. А.* Неавтодуальные инстантоны в теории Янга – Миллса со скалярным полем // Докл. АН СССР. – 1986. – **289**, № 3. – С. 589 – 592.
3. *Ferrara S., Zumino B.* Supergauge invariant Yang – Mils theories // Nucl. Phys. B. – 1974. – **79**, № 3. – P. 413–421.
4. *Яцун В. А.* Інваріантний лагранжіан для суперсиметричних квазіавтодуальних калібрувальних полів // Укр. фіз. журн. – 1991. – **36**, № 12. – С. 1828 – 1832.
5. *Яцун В. А., Павлюк А. М.* Суперпольове формулювання рівнянь квазіавтодуальності в $N = 2$ теорії Янга – Міллса // Там же. – 1995. – **40**, № 6. – С. 522 – 526.

Одержано 30.12.98,
після доопрацювання — 23.03.99