УДК 518.9

В. В. Остапенко
(Ин-т прикл. систем. анализа НАН Украины и М-ва образования и науки Украины, Киев),
Г. С. Финин (Междунар. Соломонов ун-т, Киев)

МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ИЗ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

We study methods of elimination of an unknown or a group of unknowns from a system of linear inequalities. We justify these methods by using the Helly theorem. The methods under consideration are applied to calculate streams in networks with the generalized principle of preservation.

Вивчаються методи вилучення одного невідомого або групи невідомих із системи лінійних нерівностей. Обгрунтування цих методів проводиться на основі теореми Хеллі. Методи застосовуються для обчислення течій у мережах із узагальненим принципом збереження.

1. Введение. Алгоритмы исключения неизвестных из систем линейных неравенств рассматривались во многих работах. Значительный вклад в изучение возникающих здесь проблем внес С. Н. Черников, чьи исследования достаточно полно отражены в [1], где изложены обоснования алгоритмов и вопросы, связанные с уменьшением числа составляемых комбинаций неравенств. Известно, что в общем случае, если нет дополнительных ограничений для правил комбинирования, алгоритмы исключения неизвестных требуют весьма большого числа элементарных операций. Это число чрезвычайно быстро возрастает с увеличением числа неизвестных и неравенств. При этом исключение одного неизвестного может привести к новой системе неравенств, содержащей существенно большее число неравенств, чем исходная.

В процессе обоснования алгоритма исключения одного неизвестного используется достаточно сложный аппарат сверток [1] или теорема Александрова – Фань-Цзы (см., например, [2]). В настоящей статье в основу обоснования методов исключения положена теорема Хелли [3], которая для случая исключения одного неизвестного (случай одномерного пространства) является достаточно очевидной.

Нами рассмотрены вопросы исключения одного и группы неизвестных из системы линейных неравенств. Однако, как показано ниже, существуют случаи, когда целесообразно исключать сразу группу неизвестных, так как при последовательном исключении неизвестных число неравенств будет увеличиваться, а при исключении группы — может уменьшиться. Изложенные методы исключения неизвестных применялись для иследования потоков в сетях при условии выполнения обобщенного принципа сохранения. В классических задачах, посвященных потокам в сетях, обычно предполагается выполнение закона Кирхгофа [4 – 6]. Согласно этому закону разность поступающего и вытекающего из вершины сети вещества равна потреблению в этой вершине. В данной работе рассмотрен случай, когда эта разность принадлежит некоторому отрезку. В результате приходим к системе линейных неравенств специального вида. Такие ограничения возникают в задачах управления движением воды в каналах оросительных систем, в газовых и других транспортных сетях [7]. Решая указанные специальные системы методами исключения, удалось указать неизвестные или группы неизвестных, исключение которых приводит к уменьшению числа неравенств в новой системе.

2. Методы исключения неизвестных. Рассмотрим систему двусторонних линейных неравенств

$$b_i^- \le \langle a_i, x\rangle \le b_i^+, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, E^n — n-мерное евклидово пространство, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ — скалярное произведение в E^n, $b_i^{\pm}$ — заданные числа, причем b_i^- может принимать значение $-\infty$, а b_i^+ — значение $+\infty$.

Будем предполагать, что система (1) имеет решение, и пусть $M \subset E^n$ — множество всех векторов x, удовлетворяющих неравенствам (1). Рассмотрим процесс исключения группы неизвестных $x_1, \ldots, x_k$, $k < n$. Эта операция означает ортогональное проектирование на подпространство, образованное базисными векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$, где $e_i = (0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0)$. Обозначим через M_0 множество всех векторов $y = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ таких, что существует вектор $(x_1, \ldots, x_k)$ такой, что $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in M$.

Цель данного пункта — описать множество M_0.

Перепишем систему (1) в виде

$$b_i^- \leq \langle \overline{a}_k, \overline{x} \rangle - l_i(y) \leq b_i^+, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

где

$$l_i(y) = -\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j, \quad \overline{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}), \quad \overline{x} = (x_1, \ldots, x_k).$$

Отметим, что множество M_0 включает те y, для которых система (2) совместна.

Для каждого $i = 1, \ldots, m$ множество всех $\overline{x}$, удовлетворяющих (2) при фиксированном y, является выпуклым. Согласно теореме Хелли система (2) совместна тогда и только тогда, когда совместна каждая из подсистем, составленных из $k+1$-го двустороннего неравенства вида (2). Рассмотрим для определенности подсистему для $i = 1, \ldots, k+1$. Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad l(y) = \begin{pmatrix} l_1(y) \\ \vdots \\ l_k(y) \end{pmatrix}, \quad \overline{b}^{\pm} = \begin{pmatrix} b_1^{\pm} \\ \vdots \\ b_k^{\pm} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда подсистема системы (2), составленная из первых $k+1$ неравенств, имеет полный ранг k, и пусть для определенности матрица A неособенная. В матричной форме первые $k+1$ неравенство имеют вид

$$\begin{gathered} \overline{b}^- \leq A\overline{x} - l(y) \leq \overline{b}^+, \\ b_{k+1}^- \leq \langle \overline{a}_{k+1}, \overline{x} \rangle - l_{k+1}(y) \leq b_{k+1}^+. \end{gathered} \tag{3}$$

Положим $A\overline{x} - l(y) = z$, выразим $\overline{x}$ через z и подставим в последнее неравенство (3). Получим

$$\overline{b}^- \leq z \leq \overline{b}^+, \tag{4}$$

$$b_{k+1}^- \leq \langle A^{*-1}\overline{a}_{k+1}, z \rangle - l_{k+1}(y) + \langle \overline{a}_{k+1}, A^{-1} l(y) \rangle \leq b_{k+1}^+. \tag{5}$$

Здесь и далее знак „ $*$ ” обозначает операцию транспонирования.

Положим $c = A^{*-1}\overline{a}_{k+1}$ и рассмотрим две задачи линейного программирования $\langle c, z \rangle \to \min$ и $\langle c, z \rangle \to \max$ при ограничениях (4). Пусть z^- — решение первой, а z^+ — решение второй задачи. Эти задачи имеют решения, так как допустимое множество не пусто в силу совместности исходной системы (1) и ограничено в силу формулы (4). Задача $\langle c, z \rangle \to \max$ при ограничениях (4) решается следующим образом. Если $c_i > 0$, то полагаем $z_i^+ = b_i^+$. Если $c_i < 0$, то полагаем $z_i^+ = b_i^-$. Если $c_i = 0$, то значение z^+ выбирается произвольно. Задача $\langle c, z \rangle \to \min$ решается аналогично.

Для совместности системы (4), (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$b_{k+1}^{-} - \langle c, z^{+} \rangle \leq \langle \overline{a}_{k+1}, A^{-1} l(y) \rangle - l_{k+1}(y) \leq b_{k+1}^{+} - \langle c, z^{-} \rangle. \tag{6}$$

Предположим, что подсистема системы (2), составленная из первых $k+1$ неравенства, имеет ранг $r < k$. Применяя теорему Хелли к данной подсистеме, получаем, что условием ее совместности является условие совместности всех ее подсистем, составленных из $r+1$ неравенства.

Положим

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} a_{1r+1} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{rr+1} & \ldots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

$$l^r = \begin{pmatrix} l_1(y) \\ \vdots \\ l_r(y) \end{pmatrix}, \quad \overline{b}_1^{\pm} = \begin{pmatrix} b_1^{\pm} \\ \vdots \\ b_r^{\pm} \end{pmatrix}.$$

Пусть для определенности матрица A_r — неособенная. Рассмотрим подсистему, составленную из $r+1$ первых неравенств системы (2). Эта подсистема имеет вид

$$\overline{b}_1^{-} \leq A_r u + B_r v - l^r(y) \leq \overline{b}_1^{+}, \tag{7}$$

$$b_{r+1}^{-} \leq \langle a_{r+1}^1, u \rangle + \langle a_{r+1}^2, v \rangle - l_{r+1}(y) \leq b_{r+1}^{+}, \tag{8}$$

где $u = (x_1, \ldots, x_r)$, $v = (x_{r+1}, \ldots, x_k)$, $a_{r+1}^1 = (a_{r+1,1}, \ldots, a_{r+1,r})$, $a_{r+1}^2 = $ $= (a_{r+1,r+1}, \ldots, a_{r+1,k})$.

Положим

$$\overline{z} = A_r u + B_r v - l^r(y). \tag{9}$$

Из уравнения (9) найдем u и подставим в (8). Получим, что система (7), (8) эквивалентна системе

$$b_1^{-} \leq \overline{z} \leq b_1^{+}, \tag{10}$$

$$b_{r+1}^{-} \leq \langle a_{r+1}^2 - B_r^* A_r^{*-1} a_{r+1}^1, v \rangle +$$
$$+ \langle A_r^{*-1} a_{r+1}^1, \overline{z} \rangle - l_{r+1}(y) + \langle a_{r+1}^1, A_r^{-1} l^r(y) \rangle \leq b_{r+1}^{+}. \tag{11}$$

Положим $\overline{c} = A_r^{*-1} a_{r+1}^1$, $\overline{d} = a_{r+1}^2 - B_r^* A_r^{*-1} a_{r+1}^1$. Если $\overline{d} \neq 0$, то с помощью выбора v всегда можно добиться выполнения (11). В противном случае приходим к рассмотренному выше случаю $r = k$.

Обозначим через $\overline{z}^{-}$ и $\overline{z}^{+}$ решения соответствующих задач $\langle \overline{c}, \overline{z} \rangle \to \min$ и $\langle \overline{c}, \overline{z} \rangle \to \max$ при условиях (10). Относительно существования и решения этих задач справедливы те же рассуждения, что и для задач с ограничениями (4). В результате получаем следующие условия совместности:

$$b_{r+1}^{-} - \langle \overline{c}, \overline{z}^{+} \rangle \leq \langle a_{r+1}^1, A_r^{-1} l^r(y) \rangle - l_{r+1}(y) \leq b_{r+1}^{+} - \langle \overline{c}, \overline{z}^{-} \rangle. \tag{12}$$

Продолжим изучение случая, когда подсистема системы (2), состоящая из первых $k+1$ неравенства, имеет не полный ранг. В введенных выше обозначениях предполагаем, что матрица A_r — неособенная. Рассмотрим случай, когда существует такое p, что $1 \leq p < k$ и

$$\bar{a}_s = \sum_{j=p}^{r} \xi_{sj}\,\bar{a}_j, \quad s = r+1, \ldots, k,$$
$$l_s(y) \equiv 0, \quad s = p, \ldots, k, \tag{13}$$

где ξ_{sj} — некоторые числа. Это означает, что все векторы $\bar{a}_s$ линейно выражаются через векторы $\bar{a}_p, \ldots, \bar{a}_r$. Тогда вместо системы (4) получаем систему, состоящую из системы (10) и

$$b_s^- \le \sum_{j=p}^{r} \xi_{sj} z_j \le b_s^+, \quad s = r+1, \ldots, k, \tag{14}$$

где $z_j = \langle a_j, x\rangle$.

Из уравнения (9) находим вектор u и подставляем в $k+1$ неравенство системы (2). Получаем

$$b_{k+1}^- \le \langle a_{k+1}^2 - B_r^* A_r^{*-1} a_{k+1}^1, v\rangle + \langle A_r^{*-1} a_{k+1}^1, \bar{z}\rangle -$$
$$- l_{k+1}(y) + \langle a_{k+1}^1, A_r^{-1} l^r(y)\rangle \le b_{k+1}^+, \tag{15}$$

где $a_{k+1}^1 = (a_{k+1,1}, \ldots, a_{k+1,r})$, $a_{k+1}^2 = (a_{k+1,r+1}, \ldots, a_{k+1,k})$.

Положим $\bar{c}_1 = A_r^{*-1} a_{k+1}^1$, $\bar{d}_1 = a_{k+1}^2 - B_r^* A_r^{*-1} a_{k+1}^1$. Если $\bar{d}_1 \ne 0$, то с помощью выбора y можно всегда добиться выполнения (15). В противном случае находим $\bar{z}_1^-$ и $\bar{z}_1^+$ как решения соответственно задач линейного программирования $\langle \bar{c}_1, \bar{z}\rangle \to \min$ и $\langle \bar{c}_1, \bar{z}\rangle \to \max$ при ограничениях (10), (14). Существование решения этих задач обосновывается, как и выше, с помощью ограничения (10). В данном случае удается указать простой алгоритм решения, так как есть дополнительные ограничения (14). В результате получаем следующие условия совместности системы (2):

$$b_{k+1}^- - \langle \bar{c}_1, \bar{z}_1^+\rangle \le \langle a_{k+1}^1, A_r^{-1} l^r(y)\rangle - l_{k+1}(y) \le b_{k+1}^+ - \langle \bar{c}_1, \bar{z}_1^-\rangle. \tag{16}$$

Полученный результат сформулируем в виде метода исключения группы переменных из системы линейных неравенств.

Множество M_0 описывается в виде системы линейных неравенств, которая получается следующим образом. Последовательно рассматриваются все подсистемы системы (1), состоящие из $k+1$ неравенства. Для каждой такой подсистемы перенумеруем систему (1) таким образом, чтобы неравенства данной подсистемы имели номера от 1 до $k+1$. Если подсистема имеет полный ранг, то в систему, описывающую множество M_0, включается неравенство (6). Если подсистема имеет неполный ранг, но при этом выполняется условие (13) и $\bar{d}_l = 0$, то в новую систему включается неравенство (16). Если подсистема имеет неполный ранг и не выполняется условие (13), то последовательно рассматриваем все входящие в нее подсистемы, состоящие из $r+1$ неравенства и имеющие ранг $r < k$. Для каждой подсистемы из $r+1$ неравенства перенумеруем подсистему из $k+1$ неравенства таким образом, чтобы неравенства этой подсистемы имели номера от 1 до $r+1$. В этом случае, если $d_l = 0$, то в новую систему неравенств, описывающую множество M_0, включается неравенство (12).

Остановимся теперь на частном случае исключения одного неизвестного x_1. Для размерности $k = 1$ теорема Хелли имеет достаточно очевидную формулировку: конечная система интервалов имеет непустое пересечение тогда и только тогда, когда они попарно пересекаются. Отсюда вытекает, что для описания множества M_0 следует выбирать произвольные пары неравенств вида (1), содержащие неизвестную x_1, и из каждой пары с помощью элементарных операций исключать x_1.

Сформулируем эти утверждения в виде теоремы. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{i1} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Положим $I_+ = \{i : a_{i1} > 0\}$, $I_0 = \{i : a_{i1} = 0\}$.

Теорема 1. *Множество M_0 описывается системой линейных неравенств*

$$\lambda_{ki} b_i^- - \mu_{ki} b_k^+ \leq$$

$$\leq \lambda_{ki} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j - \mu_{ki} \sum_{j=2}^{n} a_{kj} x_j \leq \lambda_{ki} b_i^+ - \mu_{ki} b_k^-, \quad i, k \in I_+,$$

$$b_i^- \leq \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i^+, \quad i \in I_0,$$

где λ_{ki} и μ_{ki} такие, что $\lambda_{ki} a_{i1} - \mu_{ki} a_{k1} = 0$.

3. Линейные неравенства на графах. Рассмотрим конечный связный граф $G = (V, E)$, где V и E — соответственно множества его вершин и ребер. Будем считать, что граф не ориентирован, т. е. для любых $a, b \in V$ таких, что $(a, b) \in E$, выполняется равенство $(a, b) = (b, a)$. Для каждой вершины $i \in V$ обозначим через $N(i)$ ее окрестность $N(i) = \{j \in V : (i, j) \in E\}$.

Рассмотрим систему неравенств относительно неизвестных потоков x_{ij}

$$\sum_{j \in N(i)} \alpha_{ij} x_{ij} \in A_i, \quad i \in V, \tag{17}$$

$$x_{ij} \in B_{ij}, \quad (i, j) \in E. \tag{18}$$

Здесь a_i и B_{ij} — некоторые отрезки. Будем говорить, что граф G задает структуру системы неравенств (17), (18). Неравенства (17) назовем структурными, а неравенства (18) — ограничениями на неизвестные. Полагаем, что $\alpha_{ij} \neq 0$.

Величины x_{ij} можно отождествлять с абсолютными величинами потока, протекающего через ребро (i, j). Направление потока определяется знаками коэффициентов α_{ij}. Поэтому считаем, что $x_{ij} = x_{ji}$ и $B_{ij} = B_{ji}$.

Пусть $(a, b) \in E$. Рассмотрим вопрос исключения неизвестной x_{ab} из системы (17), (18). Обозначим (17′) систему неравенств (17), в которую не входят неравенства

$$\sum_{j \in N(a)} \alpha_{aj} x_{aj} \in A_a, \qquad \sum_{j \in N(b)} \alpha_{bj} x_{bj} \in A_b,$$

и пусть (18′) — система неравенств (18) без включения $x_{ab} \in B_{ab}$. Отсюда и из теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *При исключении неизвестной x_{ab} множество M_0 описывается системой, состоящей из неравенств* (17′), (18′) *и трех неравенств вида*

$$\begin{gathered} c_a - \gamma \leq y_a \leq d_a - \beta, \qquad c_b - \gamma \leq y_b \leq d_b - \beta, \\ c_a - d_b \leq y_a - y_b \leq d_a - c_b, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$y_a = \sum_{j \in N(a),\, j \neq b} \alpha_{ab}^{-1} \alpha_{aj} x_{aj}, \qquad y_b = \sum_{j \in N(b),\, j \neq a} \alpha_{ba}^{-1} \alpha_{bj} x_{bj},$$

$$\alpha_{ab}^{-1} A_a = [c_a, d_a], \qquad \alpha_{ba}^{-1} A_b = [c_b, d_b], \qquad B_{ab} = [\beta, \gamma].$$

Пусть $\rho(a)$ — локальная степень величины a, т. е. число ребер, инцидентных a. Вершина a называется концевой, если $\rho(a) = 1$. Ребро, инцидентное концевой вершине, называется концевым. Вершину a назовем промежуточной, если $\rho(a) = 2$. Ребро назовем промежуточным, если оно соединяет две промежуточные вершины.

Пусть a — концевая вершина, а (a, b) — концевое ребро. В этом случае $y_a = 0$ и, следовательно, множество M_0 описывается неравенствами (17′), (18′) и неравенством $c_b - \min\{d_a, \gamma\} \leq y_b \leq d_b - \max\{c_a, \beta\}$.

Пусть (a, b) — промежуточное ребро. Тогда вершины a и b соответственно имеют еще по одному инцидентному ребру (a_0, a) и (b, b_0). В этом случае первое из неравенств (19) является ограничением только на одну неизвестную $x_{a_0 a}$, а второе — на x_{bb_0}. В этом случае неравенства (19) можно отнести к неравенствам вида (18′).

Таким образом, в случае если ребро (a, b) является концевым или промежуточным, то при исключении неизвестной x_{ab} число двусторонних неравенств уменьшается на два. Кроме того, новая система неравенств, описывающая множество M_0, соответствует новому графу, который получается из предыдущего стягиванием ребра (a, b). При этом вершины a и b отождествляются.

При решении практических потоковых задач часто встречаются графы, которые являются либо деревом, либо имеют один цикл, т. е. циклический ранг $\gamma(G)$ равен 0 или 1.

Пусть G — дерево ($\gamma(G) = 0$). Тогда существует ребро, которое является концевым. В процессе стягивания концевого ребра снова получаем дерево. Если $\gamma(G) = 1$, то последовательно применяя операцию стягивания для концевых ребер, получаем граф, состоящий из одного простого цикла C. В графе C все вершины являются промежуточными. Таким образом, если $\gamma(G) \leq 1$, то на каждом шаге исключения существует неизвестная x_{ab}, соответствующая концевому или промежуточному ребру. В результате на каждом шаге число двусторонних неравенств уменьшается на два.

Рассмотрим теперь случай, когда граф G имеет более сложную структуру. Например, на практике возникает ситуация, когда магистральный трубопровод проходит через пункт потребления, имеющий сложную пространственную структуру. Возникает задача отыскания связей между входящим и выходящим потоками. После отыскания этих потоков рассчитываются потоки внутри пункта потребления. Данная задача приводит к необходимости исключения группы неизвестных. Нами рассмотрен вопрос исключения группы неизвестных потоков, протекающих по концевому или промежуточному подграфу.

Подграф $G_0 = (V_0, E_0)$ назовем концевым, если существует подграф $\overline{G}_0 = (\overline{V}_0, \overline{E}_0)$ и вершина $a \in V$ такие, что:

А. $G_0 \cup \overline{G}_0 = G$;

Б. $V_0 \cap \overline{V}_0 = \{a\}, \quad E_0 \cap \overline{E}_0 = \varnothing$.

Теорема 3. *В результате исключения неизвестных x_{ij} для всех $(i, j) \in E_0$ остается новая система вида* (17), (18), *в которой $i \in \overline{V}_0$, $(i, j) \in \overline{E}_0$. При $i = a$ получаем неравенство*

$$\sum_j \alpha_{aj} x_{aj} \in \overline{A}_a,$$

где суммирование проводится по всем индексам j из окрестности вершины a в графе $\overline{G}_0$, $\overline{A}_a$ — некоторый отрезок. Остальные неравенства остаются прежними.

Доказательство. Из определения G_0 следует существование только одного структурного неравенства (17) при $i = a$, в котором содержатся исключаемые неизвестные x_{ij}, $(i,j)\in E_0$ и неизвестные x_{ij}, $(i,j)\in \overline{E}_0$, которые остаются.

Воспользуемся методом исключения группы неизвестных, считая, что $(k+1)$-е неравенство соответствует неравенству (17) при $i = a$. В этом случае $l(y) \equiv 0$ или $l^r(y) \equiv 0$. Подставляя эти значения в неравенства (6) или (16), получаем ограничение на $l_{k+1}(y)$. В этом случае ограничения имеют вид

$$\sum_j \alpha_{aj} x_{aj} \in \overline{A}_a ,$$

где суммирование проводится по всем индексам j из окрестности вершины a в графе $\overline{G}_0$, $\overline{A}_a$ — некоторый отрезок. Остальные неравенства остаются прежними. При этом новый граф получается из исходного путем стягивания подграфа G_0 в точку a. Теорема доказана.

Подграф $G_0 = (V_0, E_0)$ назовем промежуточным, если существует подграф $\overline{G}_0 = (\overline{V}_0, \overline{E}_0)$ и вершины $a, b \in V$ такие, что:

А. $G_0 \cup \overline{G}_0 = G$.

Б. $V_0 \cap \overline{V}_0 = \{a, b\}$, $E_0 \cap \overline{E}_0 = \varnothing$.

В. Существуют только две единственные вершины $a' \in \overline{V}_0$, $b' \in \overline{V}_0$ такие, что $(a', a) \in E$, $(b', b) \in E$.

Пусть G_0 — промежуточный подграф. Рассмотрим произвольную простую цепь в подграфе G_0. Пусть $(a, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{m-1}, b)$ — простая цепь. Назовем величину

$$\gamma = (-1)^{m-1} \frac{\alpha_{i_1 a}\alpha_{i_2 i_1} \ldots \alpha_{b i_{m-1}}}{\alpha_{a i_1}\alpha_{i_1 i_2} \ldots \alpha_{i_{m-1} b}}$$

весом данной цепи.

Теорема 4. *Пусть в подграфе G_0 существует p простых цепей, соединяющих вершины a и b и γ_s, $s = 1, \ldots, p$, — вес s-й цепи. Тогда в результате исключения группы неизвестных, соответствующих ребрам графа G_0, получаем следующие ограничения, связывающие неизвестные $x_{aa'}$ и $x_{bb'}$:*

$$b_*^s \le \alpha_{aa'}\gamma_s x_{aa'} + \alpha_{bb'} x_{bb'} \le b_s^* ,$$

где b_*^s, b_s^*, $s = 1, \ldots, p$, — некоторые числа. При этом остается система неравенств вида (17), (18), *в которой $i \in \overline{V}_0$, $(i,j) \in \overline{E}_0$.*

Доказательство теоремы базируется на результатах пункта 2 и не приводится ввиду его громоздкости.

1. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
2. *Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976. – 189 с.
3. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли Б.* Теорема Хелли. – М.: Мир, 1968. – 250 с.
4. *Форд Д., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. – М.: Наука, 1966. – 276 с.
5. *Ловецкий С. Е., Меламед И. И.* Статистические потоки в сетях // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 10. – С. 3–29.
6. *Кирик Е. Е., Пшеничный Б. Н.* Теория и методы расчета сетей // Обозрение прикл. и пром. математики. – 1995. – **2**, № 1. – С. 49–69.
7. *Ostapenko V. V., Jakovleva A. P.* Mathematical questions of modeling and control in water distribution problems // Control and Cybernetics. – 1991. – **20**, № 4. – P. 99–111.

Получено 29.04.99,
после доработки — 20.09.99